Bachillerato a distancia

Dibujo Técnico II

Subdirección General de Aprendizaje a lo largo de la vida

CIDEAD Centro para la Innovación y Desarrollo de la Educación a Distancia

DTII



Introducción

UNIDADES



GOBIERNO DE ESPAÑA

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE FORMACIÓN PROFESIONAL





Autores : Carlos Ayala Luna
Ana Mª de Benito Zamarrón
Animaciones: José Antonio Cuadrado Vicente
Antonio L. Martín González
Mª Luisa Bermejo López
Coordinación editorial: Juan Antonio Olmedo González
Revisión técnica : José Ramón Llonis Morla
Tratamiento electrónico: Félix García Zarcero
Mª Luisa Bermejo López
Maqueta : Julio Calderón Grande
Diseño de cubierta : Mª Luisa Bermejo López



Ministerio de Educación
Secretaría de Estado de Educación y Formación Profesional
Dirección General de Formación Profesional
Subdirección General de Aprendizaje a lo largo de la vida

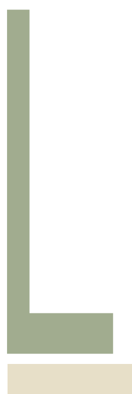
Edita:
©Secretaría General Técnica
Subdirección General de Información y Publicaciones

NIPO: 820-10-161-3

Telf. 91 377 83 00

Impreso en España.





Los contenidos de este material didáctico de *Dibujo Técnico II*, de Segundo de Bachillerato para la modalidad de educación a distancia, se ajustan al Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, y a la Orden Ministerial 1729/2008, de 11 de junio de 2008, por los que se regula el currículo de la Ley Orgánica de Educación.

En este curso se introducen conceptos nuevos o complementarios de los estudiados en *Dibujo Técnico I*, que permiten realizar nuevas construcciones. Así, los conceptos de arco capaz, potencia, e inversión facilitan la realización de construcciones de tangencia no resolubles con los conocimientos de Primero de Bachillerato. El conocimiento de los puntos y rectas notables del triángulo complementa la casuística de sus construcciones al considerar datos las alturas, bisectrices, radios de las circunferencias inscrita y circunscrita, etc. Los métodos del sistema diédrico (giros, abatimientos y cambios de plano) simplifican la realización de operaciones tales como representación de poliedros y superficies, sección por planos, desarrollos, distancias, etc. Finalmente, los cortes y vistas especiales prescritos en la norma UNE 1032 permiten representar, entre otros elementos, piezas industriales huecas, o elementos situados en planos oblicuos.

De las diez unidades de este material didáctico, las cuatro primeras desarrollan contenidos de geometría métrica y proyectiva: arco capaz, teoremas del cateto y de la altura, potencia y sus aplicaciones, construcciones de triángulos y polígonos regulares, inversión, homología y curvas cónicas.

Las cuatro unidades siguientes profundizan en el sistema diédrico teórico y normalizado: métodos, verdaderas magnitudes, representación de superficies, sección por planos, intersección con rectas, desarrollos, cortes, secciones, vistas especiales, acotación, etc.

Las dos últimas desarrollan las relaciones de incidencia, intersección, paralelismo, abatimientos de planos, representación de superficies y objetos, sección por planos e intersecciones con rectas, en las perspectivas axonométrica, caballera y cónica.

Podemos resumir el aprendizaje de esta materia en dos fases: el estudio de la teoría para comprender y asimilar los principios geométricos fundamentales, memorizando los conceptos necesarios para resolver problemas; y la realización práctica de las construcciones geométricas recogidas en cada unidad y de sus actividades, atendiendo especialmente a la correcta ejecución de los trazados.

Siempre que ha sido posible, en las ilustraciones se presentan a la izquierda los datos del ejercicio y a la derecha su realización. De este modo el alumno puede copiar o calcar los



datos aparte para dibujar la construcción mientras la estudia. En cualquier caso, los datos aparecen siempre con trazo medio, la construcción con trazo fino y la solución con trazo grueso.

Para mayor claridad, se recomienda identificar cada línea o elemento con su notación correspondiente.

Todas las unidades constan de los siguientes apartados :

- La **Introducción**, que informa del contenido de la unidad y facilita instrucciones para su aprendizaje; propone **objetivos**, que describen las competencias que debe adquirir el alumno tras su estudio; incluye un **mapa conceptual**, que presenta las relaciones entre los conceptos fundamentales y los contenidos de la unidad; y se cierra con el **Índice de contenidos**, que recoge todos los epígrafes de la unidad.
- El **desarrollo secuenciado** de cada unidad aborda los contenidos teóricos y las construcciones necesarias para su comprensión; incluye en ocasiones ejercicios resueltos, titulados **Aplicaciones**, que suelen aportar información sobre su utilidad práctica. En los **Recuerda** se destacan los conceptos e instrucciones fundamentales. Las **Actividades** proponen ejercicios prácticos que sirven para desarrollar y afianzar los contenidos expuestos.
- En todas las unidades se incluyen **animaciones interactivas para el soporte electrónico** que relacionan los contenidos en estudio, con su tratamiento mediante las técnicas infográficas del dibujo técnico.

El material de dibujo recomendable es el siguiente:

- **Papel**, formato A4 (210 x 297 mm.) blanco, de 80 gr/m^2 o más, para los dibujos de las actividades, y vegetal transparente, que se empleará cuando se desee calcar los datos para realizar las actividades y poder compararlas con la solución.
- **Goma de borrar,** blanca o incolora de buena calidad.
- **Portaminas o lápiz de grafito**, de dureza 2H para el trazado general, y HB para destacar las soluciones y datos.
- **Compás y plantillas**, ambos con calidad suficiente para el nivel de exigencia gráfica del curso. El compás debe permitir el trazado de círculos grandes y pequeños, y las plantillas (escuadra y cartabón) deben ser de bordes rectos y de un tamaño adecuado a las dimensiones del papel.
- Transportador de ángulos y regla graduada de veinte centímetros de longitud.







1 Trazados en el plano. Potencia

- *Localización de un barco mediante el arco capaz (Ilustración de los autores utilizando fotografías del Banco de imágenes del ISFTIC).*

En esta Unidad se completan los trazados en el plano estudiados en Primero, presentando la construcción del arco capaz, su aplicación para determinar la posición de un barco sobre la carta náutica, y la construcción de la media proporcional.

Se introduce, además el concepto de potencia de un punto y sus aplicaciones en la realización de construcciones de tangencia y equivalencia de figuras. Facilitará la comprensión de los fundamentos geométricos de estas aplicaciones y consecuentemente su memorización, la construcción del segmento representativo de la potencia positiva o negativa y el trazado del eje o centro radical.

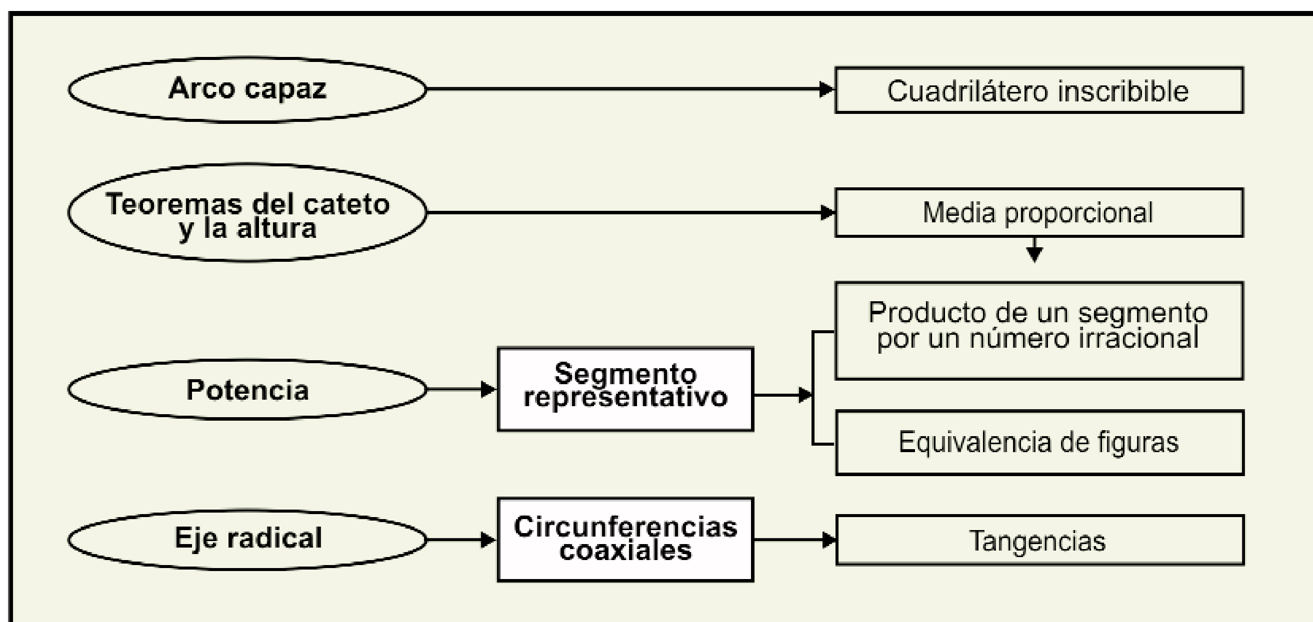
En las ilustraciones de este libro los trazados se realizan con regla y compás, con excepción de las perpendiculares y paralelas, en las que se utilizan la escuadra y el cartabón. Aunque en el texto la redacción de las construcciones se simplifica, citando construcciones sin desglosarlas en sus operaciones elementales, en la ilustración aparecen todos los trazados necesarios.

Con el estudio de esta Unidad nos proponemos alcanzar los siguientes **objetivos**:

1. Aplicar el concepto de arco capaz como auxiliar de otras construcciones
2. Obtener la media proporcional de dos segmentos por distintos procedimientos
3. Obtener el producto de un segmento por un número irracional
4. Utilizar el concepto de potencia en la resolución de construcciones de tangencia y figuras equivalentes







ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. Trazados en el plano

1.1. Arco capaz de un ángulo sobre un segmento

Ángulo inscrito en una circunferencia es aquel cuyo vértice es un punto de ella [Ilustración 1, izquierda]. **El ángulo central correspondiente** al ángulo inscrito abarca el mismo arco que aquel y su vértice es el centro de la circunferencia.

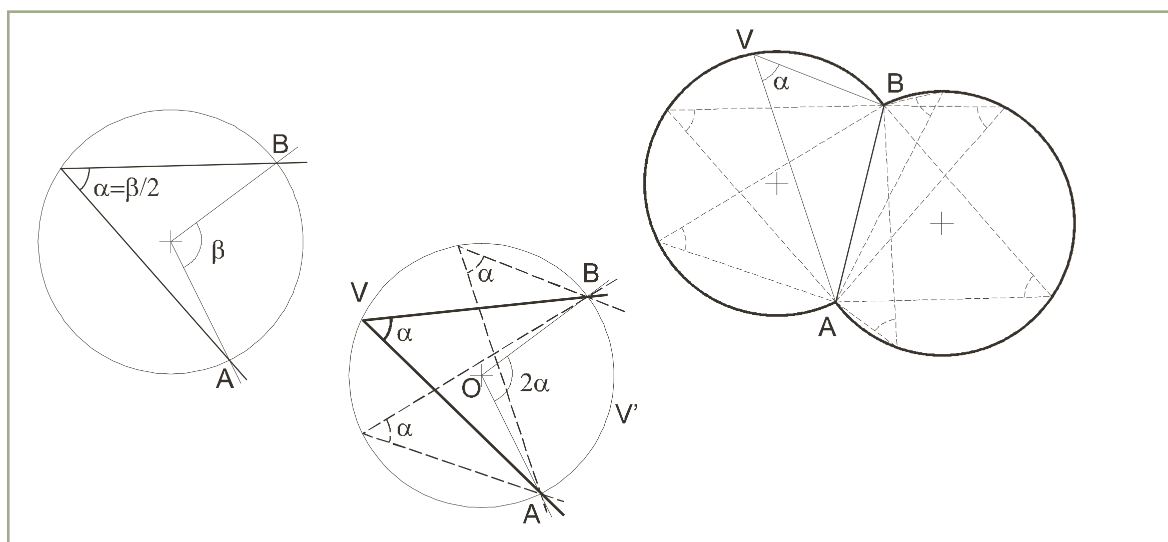


Ilustración 1  Animación 

El valor del ángulo inscrito es la mitad del ángulo central correspondiente. Así pues, si varios ángulos inscritos comparten el mismo ángulo central sus valores serán iguales. Recíprocamente, elegido un ángulo α y considerando los puntos *A*, *B* fijos y *V* variable, los vértices *V* de los ángulos *AVB* de valor α definen un arco *AVB* cuyo centro *O* es el vértice del ángulo central *AOB* de valor 2α [Ilustración 1, centro].

Se llama arco capaz del ángulo α sobre el segmento *AB*, al lugar geométrico de los vértices de todos los ángulos iguales a él cuyos lados pasan por los extremos del segmento. Esta formado por dos arcos de circunferencia simétricos cuyos extremos *A* y *B* pertenecen al eje de simetría [Ilustración 1, derecha].

1.2. Construcción del arco capaz

Sea el segmento $\overline{AB}$ y el ángulo α [Ilustración 2].

Se transporta el ángulo α a partir del lado *AB* con vértice en *A,* en el semiplano opuesto al que ocupará el arco capaz, de los dos en que $\overline{AB}$ divide al plano. La perpendicular al lado *AC* por *A* corta a la mediatriz de $\overline{AB}$ en el centro O_1 de uno de los dos arcos de circunferencia que forman el **arco capaz**. El centro O_2 del otro arco es simétrico de O_1 respecto de $\overline{AB}$.

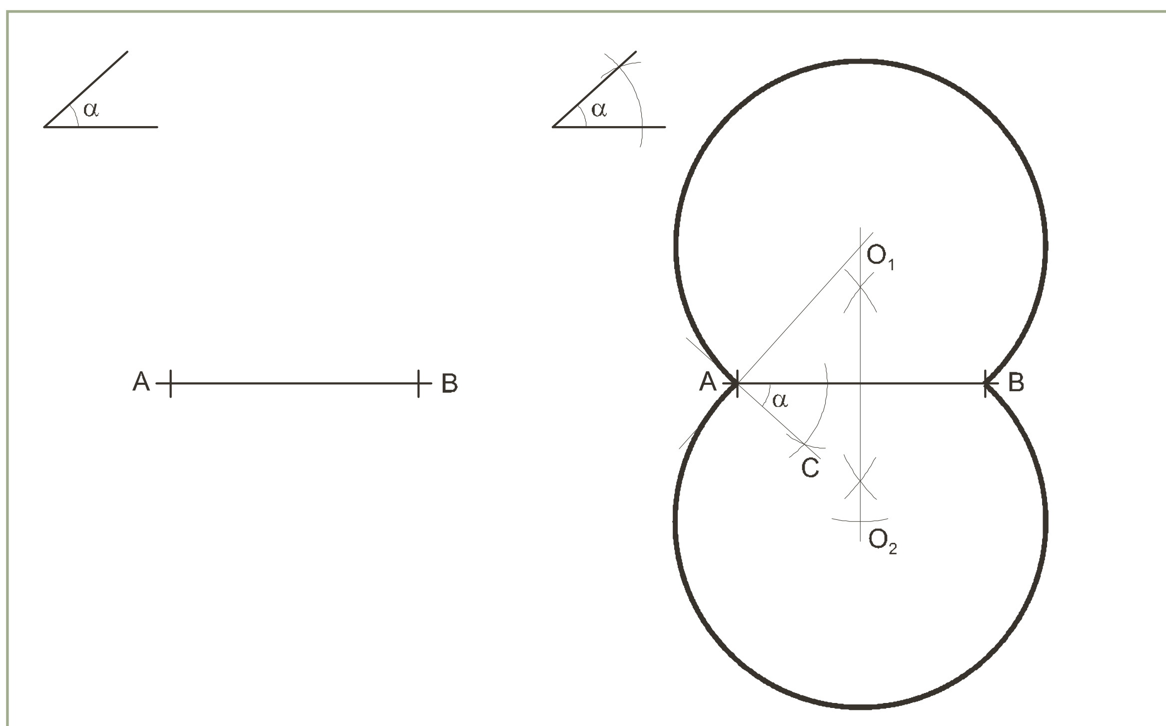
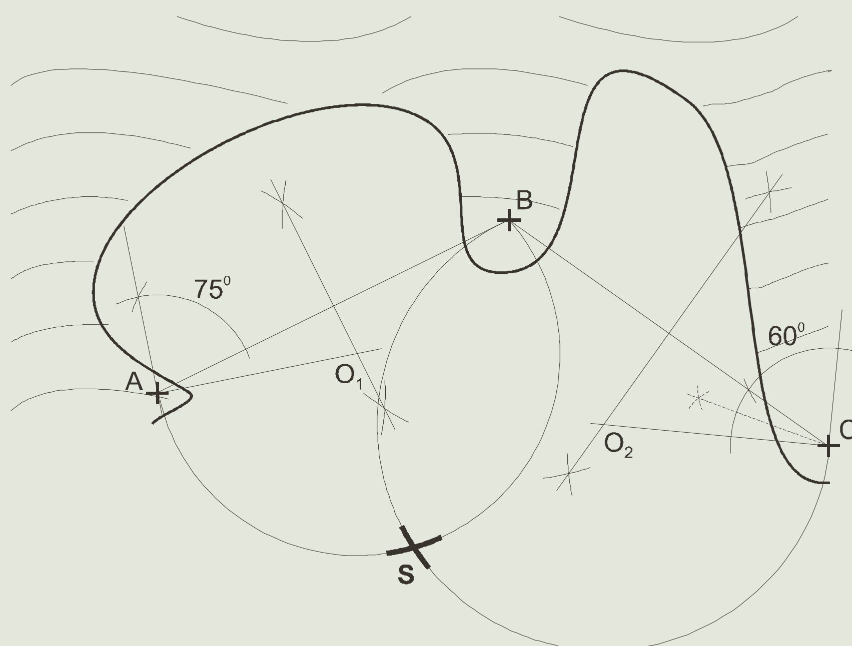


Ilustración 2  Animación 

Aplicación



Desde la cubierta de un barco *S* se miden los ángulos que forman entre sí las visuales a tres puntos de la costa *A, B, C,* resultando 75º para *A* y *B*, y 60º para *B* y *C*. Para situarlo en la carta náutica se trazan los arcos capaces correspondientes a dichos ángulos. Su punto de intersección da la posición de *S*.

1.3. Cuadrilátero inscribible

La condición para que un cuadrilátero pueda inscribirse en una circunferencia es que sus ángulos opuestos sean suplementarios.

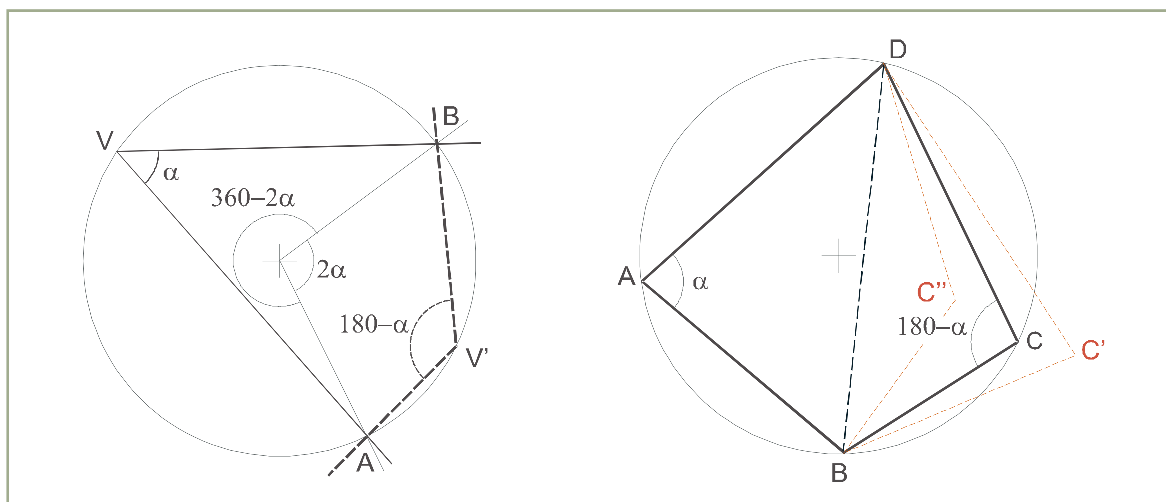


Ilustración 3 Animación

Sea una circunferencia, dos puntos fijos *A*, *B* de ella, y los puntos genéricos *V*, *V'* de los arcos *AVB* y *BV'A* [Ilustración 3 izquierda].

El ángulo inscrito *BV'A* es **suplementario** del *AVB*, ya que sus centrales correspondientes suman 360°.

En el cuadrilátero inscribible *ABCD* de la Ilustración 3 derecha, el arco capaz del ángulo α sobre la diagonal *BD*, determina la existencia del arco capaz de 180º-α, que completa la circunferencia. El ángulo interior en *C* deberá ser suplementario del *A*, ya que si fuera menor o mayor el vértice *C* ocuparía las posiciones *C'* o *C''*.

1.4. Teorema del cateto

El cateto del triángulo rectángulo es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.

En la Ilustración 4 los triángulos rectángulos *ABC* y *BDC* son semejantes, pues comparten el ángulo en *C*. Podemos establecer la proporción $\frac{AC}{BC}=\frac{BC}{DC}$, igualando las razones entre las hipotenusas con la de los catetos menores. Así, el cateto *BC* es media proporcional entre la hipotenusa *AC* del triángulo rectángulo *ABC* y su proyección sobre ella *DC*.

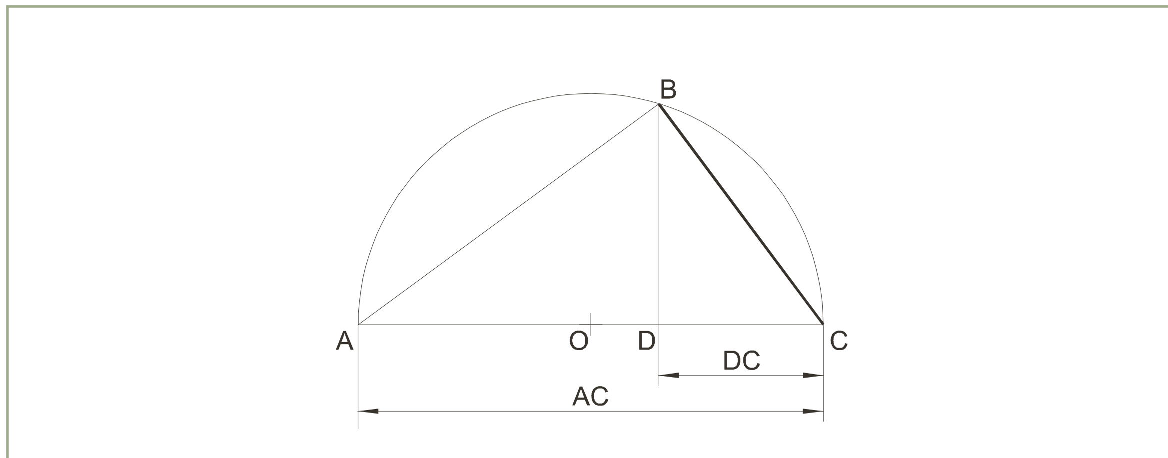


Ilustración 4 Animación

1.5. Teorema de la altura

La altura sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo es media proporcional entre las dos partes en que la divide.

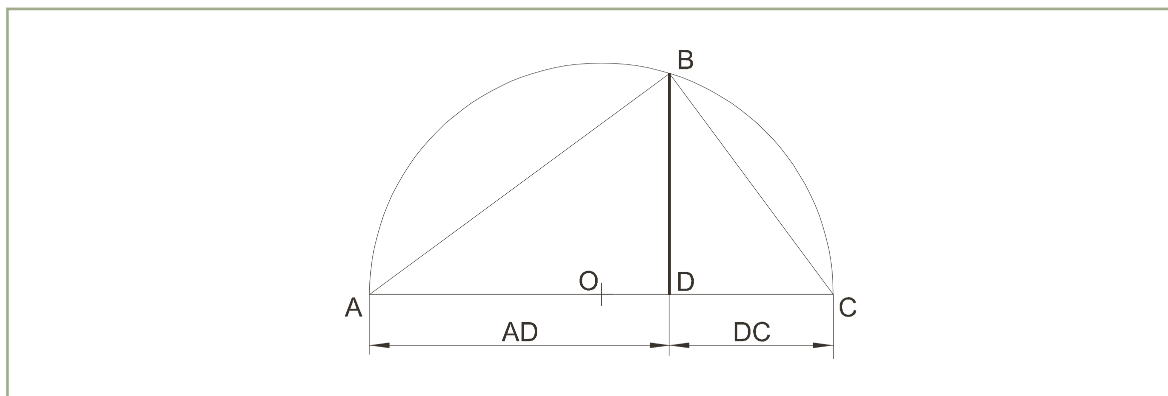


Ilustración 5 Animación

En la Ilustración 5 los triángulos rectángulos *ADB* y *BDC* son semejantes, pues sus lados homólogos son perpendiculares. Podemos establecer la proporción $\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{DC}$, igualando las razones entre los catetos. Así, la altura *BD* del triángulo rectángulo *ABC* es media proporcional entre las dos partes *AD* y *DC* en que divide a la hipotenusa.

1.6. Construcción de la media proporcional de dos segmentos

Sean los segmentos $\bar{a}$ y $\bar{c}$ [Ilustración 6].

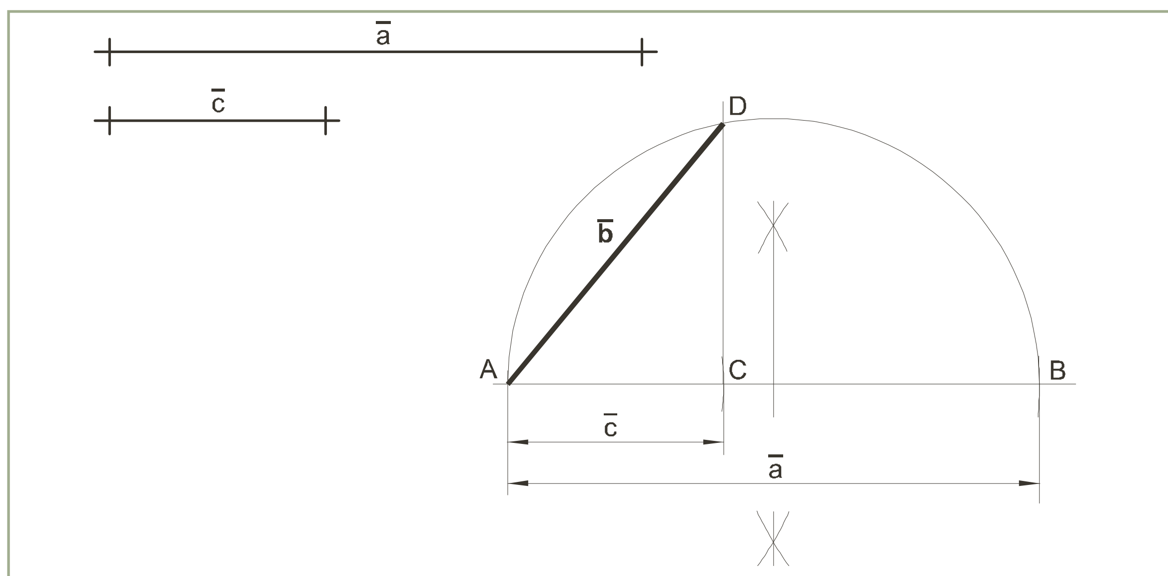
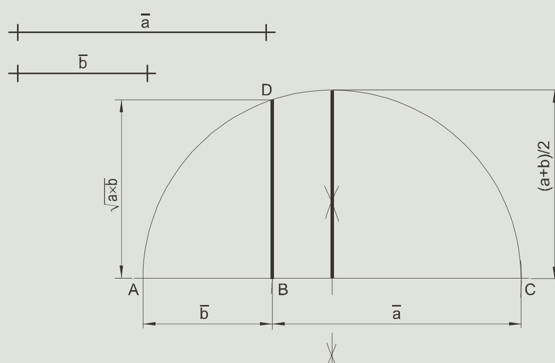


Ilustración 6

Si se desea utilizar el teorema del cateto, se transportan ambos segmentos con origen en *A* e igual sentido sobre una semirrecta. El punto de corte *D* de su perpendicular por *C*, con el arco capaz de 90º del segmento mayor $\bar{a}$, determina la longitud del segmento $\overline{AD}$, media proporcional.

Aplicación



Se desea comparar gráficamente las medias geométrica y aritmética de las medidas de dos segmentos.

Sean $\bar{a}$ y $\bar{b}$ los segmentos. Se transportan consecutivamente sobre una semirrecta para hallar su media proporcional mediante el teorema de la altura. El arco capaz de 90º de su suma corta en *D* a la perpendicular a ésta por *B*.

El segmento $\overline{BD}$ es la media proporcional de $\bar{a}$ y $\bar{b}$, y su medida la media geométrica $\sqrt{a \times b}$ de las de aquellos. El radio del arco capaz es la media aritmética $\frac{a+b}{2}$, que es siempre mayor o igual que la media geométrica.

2. Potencia

2.1. Potencia de un punto respecto de una circunferencia

Dada una circunferencia y un punto *P* interior o exterior a ella [Ilustración 7], trazamos desde *P* dos secantes cualesquiera. Las rectas auxiliares *AB'* y *A'B* permiten comparar los triángulos *PAB'* y *PBA'*. Estos son semejantes, pues los ángulos en *P* son compartidos u opuestos por el vértice, y los ángulos en *A'* y *B'* son inscritos e iguales, por abarcar el mismo arco. La proporción entre sus lados es $\frac{PA'}{PB'} = \frac{PB}{PA}$, multiplicando medios y extremos será *PA x PA' = PB x PB'*, así pues, para cualquier secante que pase por *P* dicho producto es constante y recibe el nombre de potencia.

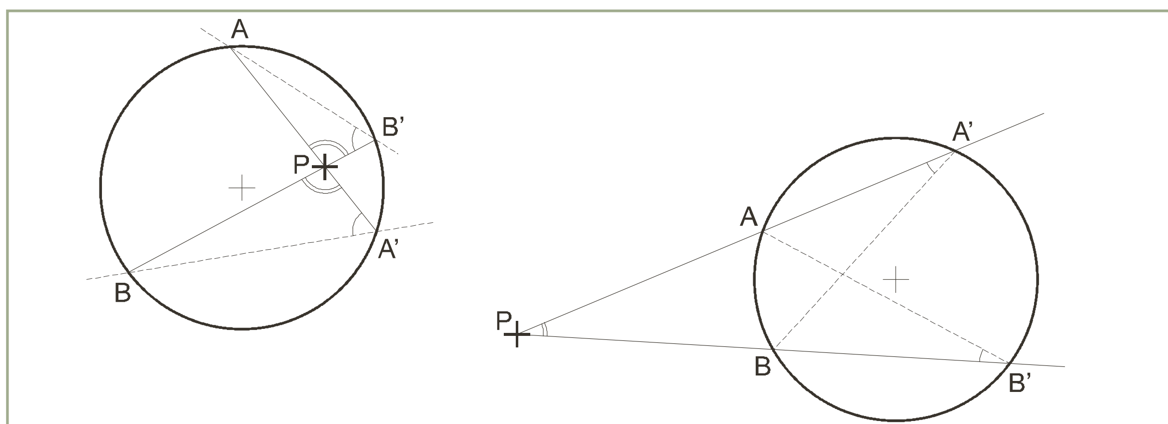


Ilustración 7

Potencia de un punto respecto de una circunferencia es el producto de las distancias desde dicho punto a los dos de intersección de cualquier secante que pasa por él.

2.2. Valor de la potencia

La potencia es el producto de las longitudes de dos segmentos orientados, en el mismo sentido cuando el punto es exterior o en sentidos contrarios si el punto es interior, por lo que en el segundo caso se considerará una de las distancias con signo positivo y la otra negativo. Así, la potencia será **positiva** para los puntos en el exterior y **negativa** para los del interior.

Para hallar la expresión de la potencia de un punto *P*, a partir de su distancia *d* al centro *O*, consideramos la secante que pasa por éste [Ilustración 8].

Si *P* es exterior, $Potencia = (d + R) \times (d - R) = d^2 - R^2$, ya que ambos segmentos son positivos.

Si *P* es interior, $Potencia = (R + d) \times [-(R - d)] = d^2 - R^2$, pues debemos asignar a los segmentos signos contrarios.

Si *P* está en la circunferencia uno de los segmentos es cero y la potencia también.

Si *P* está en el centro *O* la potencia es la mínima posible $-R^2$ y crece según se aleja de él.

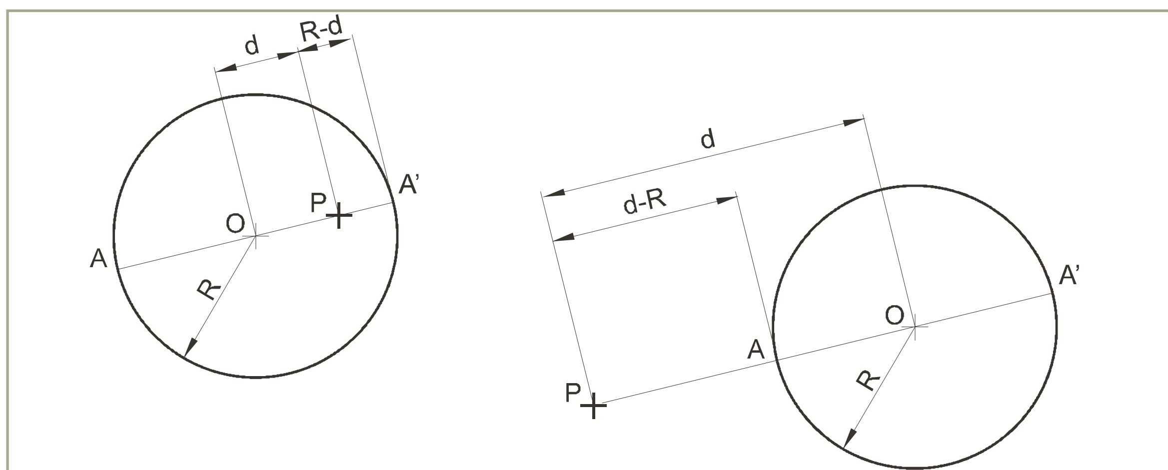


Ilustración 8

2.3. Segmento representativo

Para calcular el valor de la potencia de un punto *P* podemos utilizar cualquiera de las infinitas secantes que pasan por él, pero una de ellas presenta la ventaja de producir dos segmentos iguales en magnitud [Ilustración 9]. Dicho **segmento representativo** se convierte así en expresión gráfica de la **potencia**, cuya longitud al cuadrado es su valor.

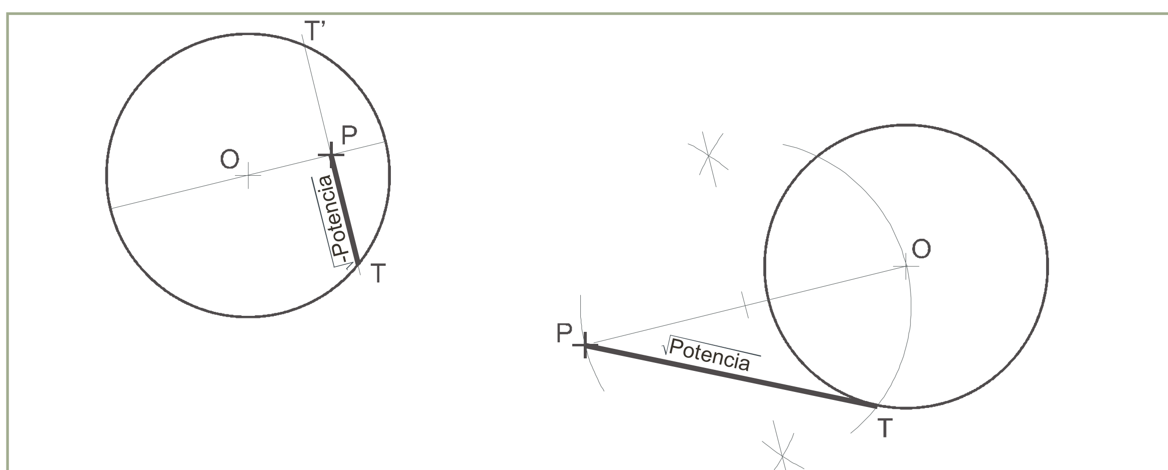
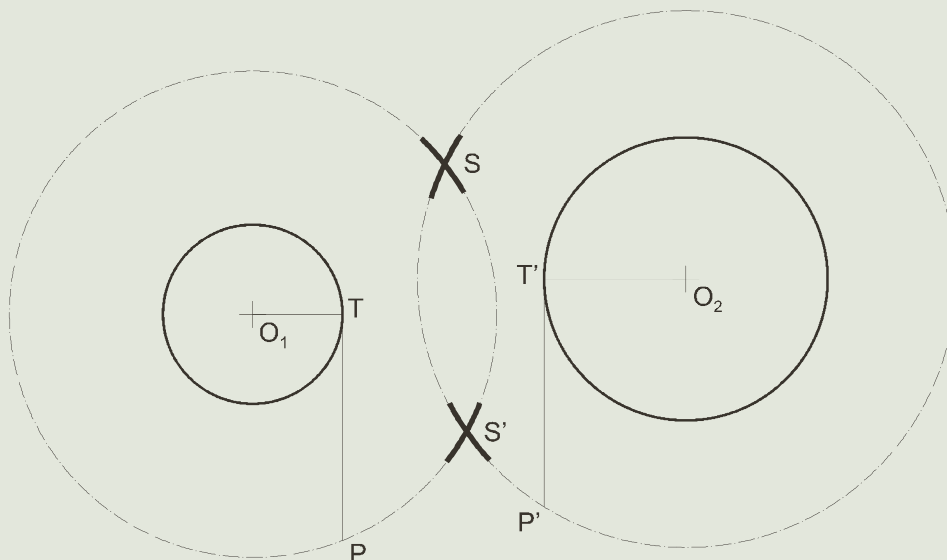


Ilustración 9

Para un punto exterior *P* [Ilustración 9, derecha] el segmento representativo es la tangente que pasa por él, ya que *Potencia* = *PT* x *PT* = PT^2. Su longitud es la raíz cuadrada de la potencia.

Para un punto interior *P* [Ilustración 9, izquierda] el segmento representativo es una de las dos mitades de la cuerda que pasa por él, que son simétricas respecto del diámetro que también pasa por *P*, ya que *Potencia* = *PT* x (–*PT'*) = $-PT^2$. Su longitud es la raíz cuadrada de la potencia cambiada de signo.

Aplicación



Se desea hallar el lugar geométrico de los puntos del plano que tienen una potencia de 9 cm^2 respecto de las circunferencias de centros O_1 y O_2.
Como la potencia es positiva, dichos puntos están en el exterior. Trazamos segmentos representativos *TP* y *T'P'*, de longitud $\sqrt{9\,cm^2} = 3\,cm$, tangentes a cada una de las circunferencias. Los puntos de las circunferencias concéntricas con éstas que pasan por *P* o *P'*, tienen potencia 9 cm^2 respecto de su circunferencia correspondiente. La intersección de ambas nos da los dos puntos solución.

2.4. Producto de un segmento por un número irracional

Sea el segmento $\bar{a}$ y $\sqrt{8}$ el número irracional [Ilustración 10].

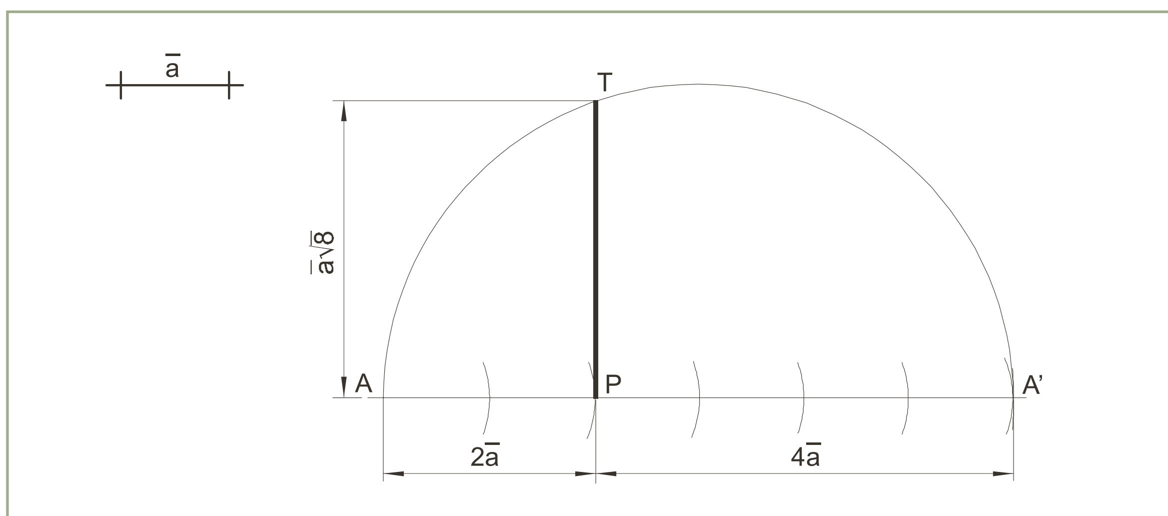


Ilustración 10

Se transporta $\bar{a}$ sobre una semirrecta de origen *A* seis veces consecutivas y se traza la semicircunferencia de diámetro $6\bar{a}$. Por el punto *P*, de división de los segmentos $2\bar{a}$ y $4\bar{a}$ creados, se levanta una perpendicular a estos, obteniéndose el segmento $\overline{PT}$ representativo de la potencia del punto *P*, cuya longitud es $\sqrt{-Potencia} = \sqrt{-[(-2a)\times 4a]} = \sqrt{8a^2} = a\sqrt{8}$.

Esta construcción podría haberse realizado igualmente creando los segmentos $\bar{a}$ y $8\bar{a}$, ya que la longitud de $\overline{PT}$ sería $\sqrt{-Potencia} = \sqrt{-[(-a)\times 8a]} = \sqrt{8a^2} = a\sqrt{8}$.

2.5. Eje radical de dos circunferencias

Eje radical de dos circunferencias es el lugar geométrico de los puntos del plano que tienen igual potencia respecto de ambas. Este es una recta perpendicular a la línea que une sus centros [Ilustración 11].

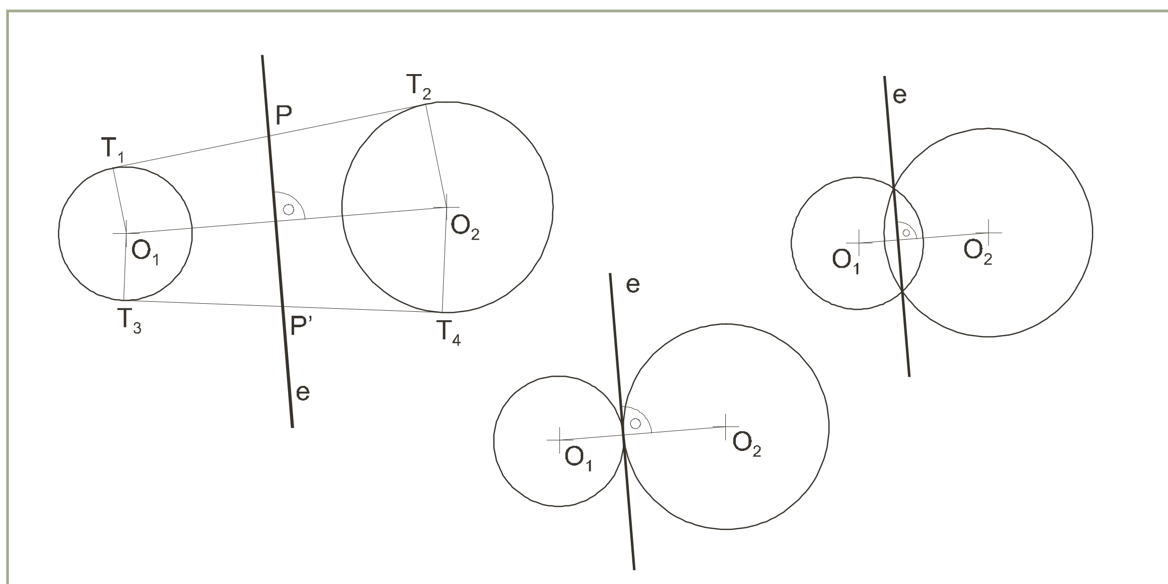


Ilustración 11

Si las circunferencias son exteriores el eje radical *e* pasa por los puntos medios *P* y *P'* de las tangentes comunes T_1T_2 y T_3T_4.

Si las circunferencias son secantes el eje radical pasa por los dos puntos de corte.

Si las circunferencias son tangentes el eje radical es la tangente común.

2.6. Centro radical

Centro radical de tres circunferencias es el punto que tiene igual potencia respecto de cada una de ellas. Es, por tanto, el punto de corte de los tres ejes radicales de dichas circunferencias tomadas de dos en dos [Ilustración 12].

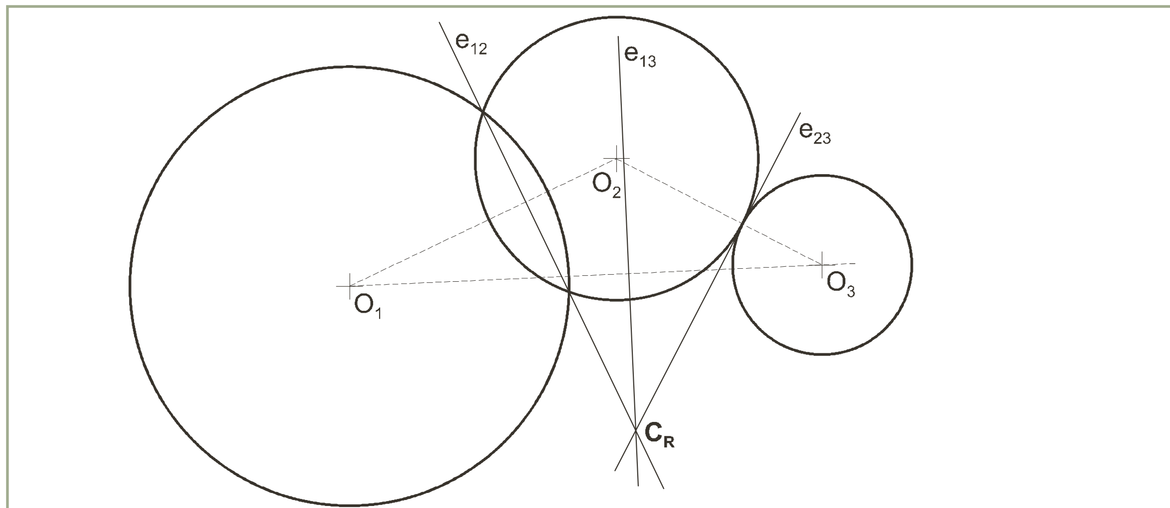


Ilustración 12

2.7. Construcción del eje radical

Sean las circunferencias de centros O_1 y O_2 [Ilustración 13].

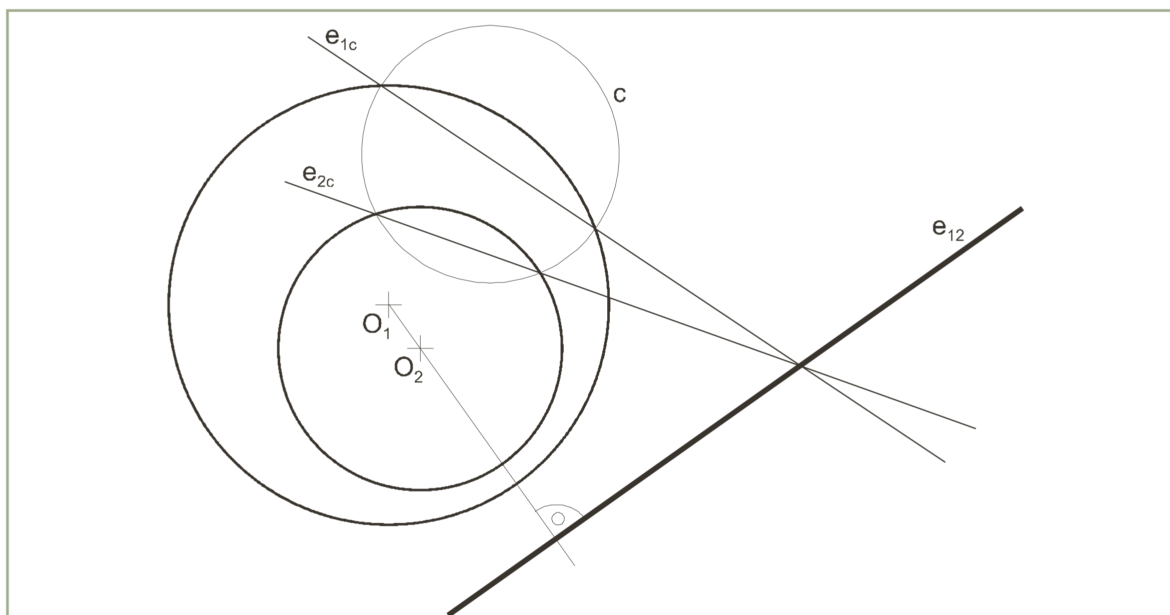


Ilustración 13

Se traza la circunferencia auxiliar *c*, secante a ambas, y se hallan los ejes radicales de ésta con cada una de ellas. El punto de corte de dichos ejes radicales es centro radical de las tres. Por tanto, pasando por él y perpendicular a la línea que une sus centros estará el **eje radical** de las de centros O_1 y O_2.

2.8. Circunferencias que comparten el eje radical

Obtenido el eje radical *e* de dos circunferencias de centros O_1 y O_2, es posible obtener otras que compartan el eje radical con ellas [Ilustración 14]. Basta trazar la circunferencia de centro en un punto cualquiera *P* del eje *e* y radio el segmento representativo $\overline{PT_1} = \overline{PT_2}$ de la potencia. Las rectas tangentes a ella contienen los radios de las **circunferencias coaxiales**, cuyos centros están en la recta que pasa por O_1 y O_2.

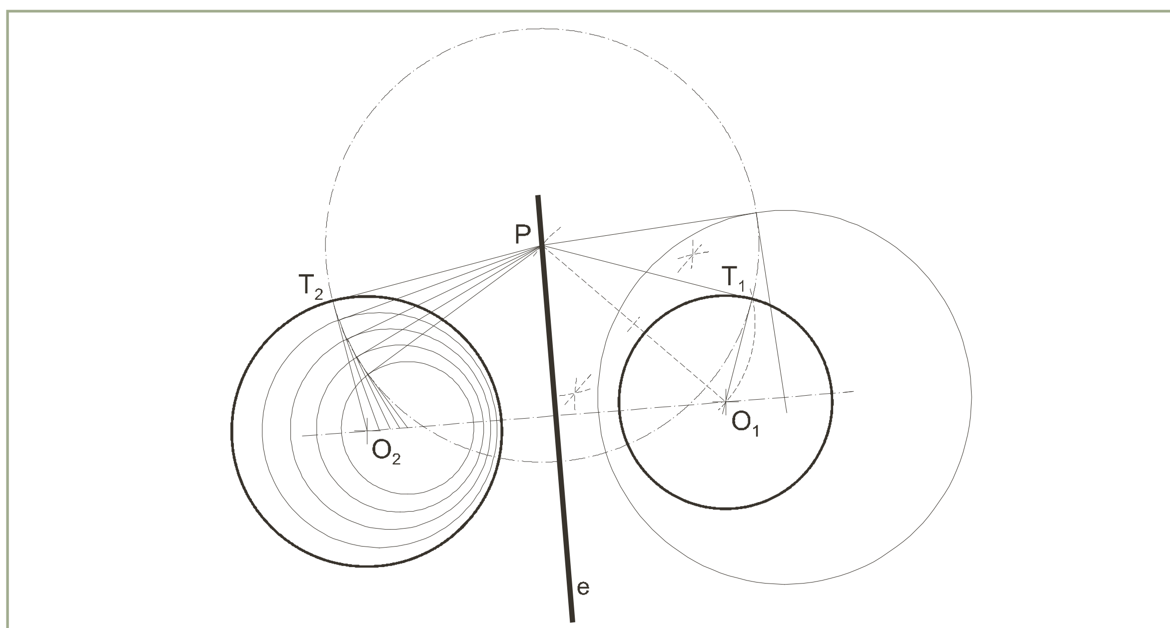


Ilustración 14

3. Aplicaciones de la potencia

3.1. Circunferencia tangente a una recta que pasa por dos puntos

Sean *A* y *B* los puntos y *r* la recta [Ilustración 15].

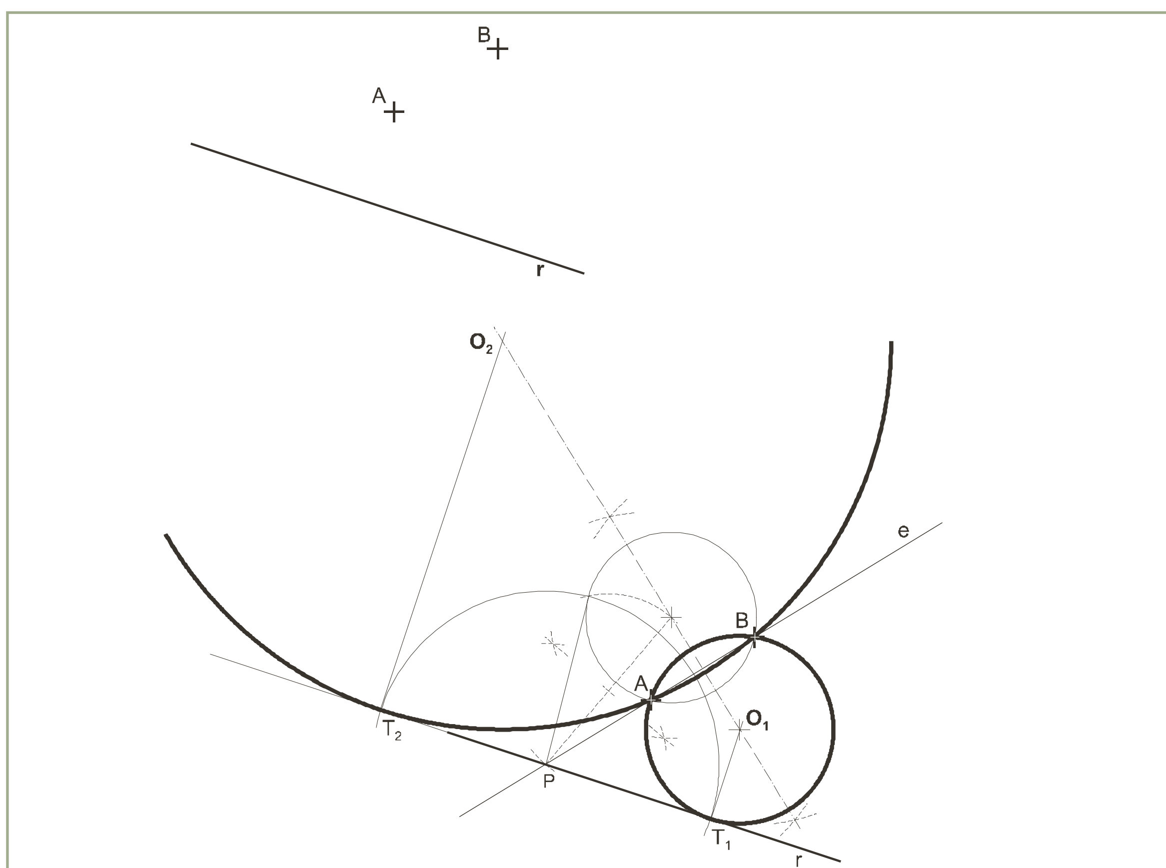


Ilustración 15

Todas las circunferencias que pasan por *A* y *B* comparten el eje radical *e*, que corta en *P* a la recta *r*. La tangente desde *P* a una cualquiera que pase por *A* y *B* es el segmento representativo de la potencia, que trasladado sobre la recta *r*, en ambos sentidos a partir de *P*, determina los puntos de tangencia T_1 y T_2 de las soluciones. Sus centros O_1 y O_2 están en las perpendiculares a *r* trazadas desde T_1 y T_2 respectivamente.

3.2. Circunferencia tangente a otra que pasa por dos puntos

Sea la circunferencia de centro *O* y los puntos *A* y *B* [Ilustración 16].

Todas las circunferencias que pasan por *A* y *B* comparten el eje radical *e*. Una cualquiera de ellas c_a, secante a la de centro *O,* comparte con ella el eje radical e_{1a}, que corta al eje del haz *e* en el centro radical C_R. Las rectas tangentes desde C_R a la circunferencia de centro *O*,

son ejes radicales que determinan los puntos de tangencia T_1 y T_2 de las soluciones. Sus centros O_1 y O_2 están en las alineaciones de O con T_1 y T_2 respectivamente.

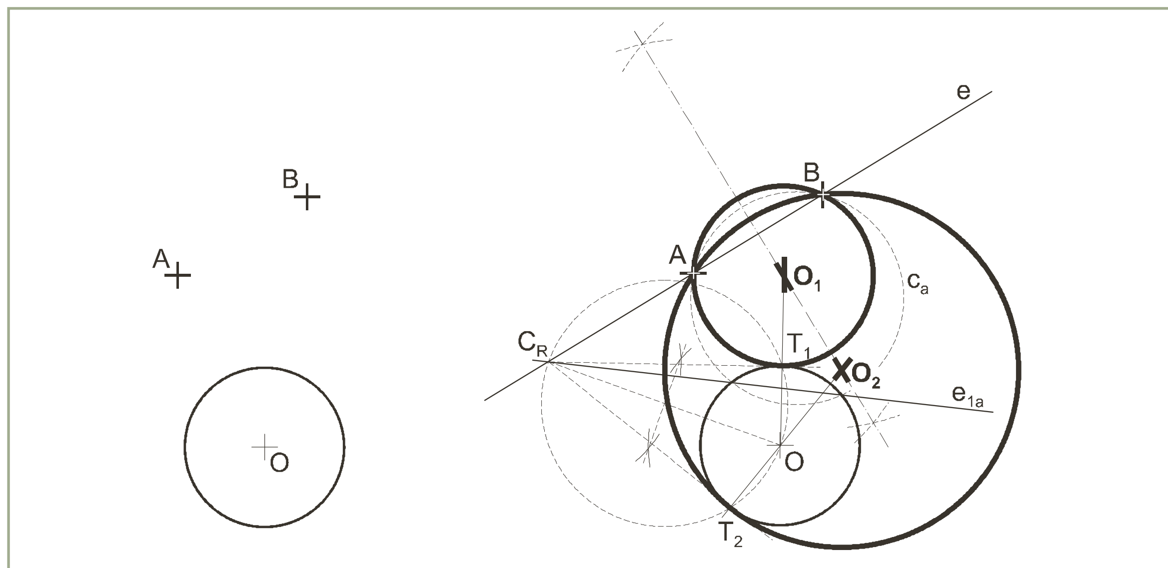


Ilustración 16

3.3. Circunferencia tangente a una recta y a otra circunferencia en un punto de ella

Sea la circunferencia de centro *O*, un punto de ella *A* y la recta *r* [Ilustración 17].

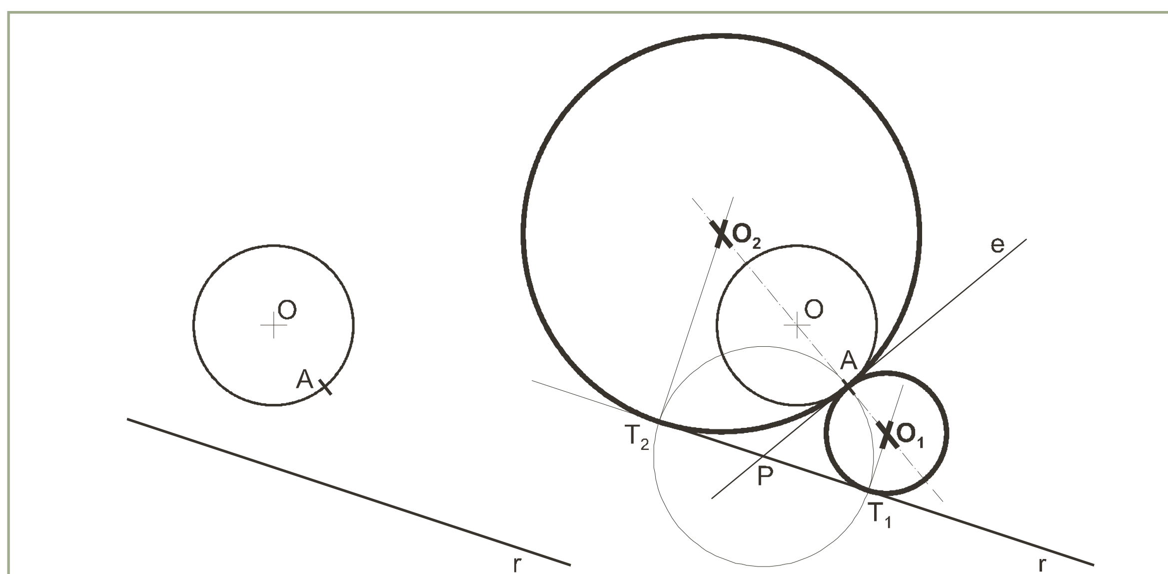


Ilustración 17

Las dos soluciones y la circunferencia de centro *O* forman parte de un haz de circunferencias tangentes en *A*, cuyo eje radical es la tangente *e*. Éste corta a la recta *r* en *P*, cuya potencia se expresa mediante el segmento $\overline{PA}$, que trasladado sobre *r* a partir de *P*, determina los puntos de tangencia T_1 y T_2 de las soluciones. Sus centros O_1 y O_2 están en las perpendiculares a *r* trazadas desde T_1 y T_2 respectivamente.

3.4. Construcción de un polígono equivalente a otro con menor número de lados

Figuras planas equivalentes son aquellas que tienen distinta forma e igual área.

Sea *ABCDEFG* un polígono de 7 lados que queremos convertir en un polígono equivalente de 5 lados [Ilustración 18].

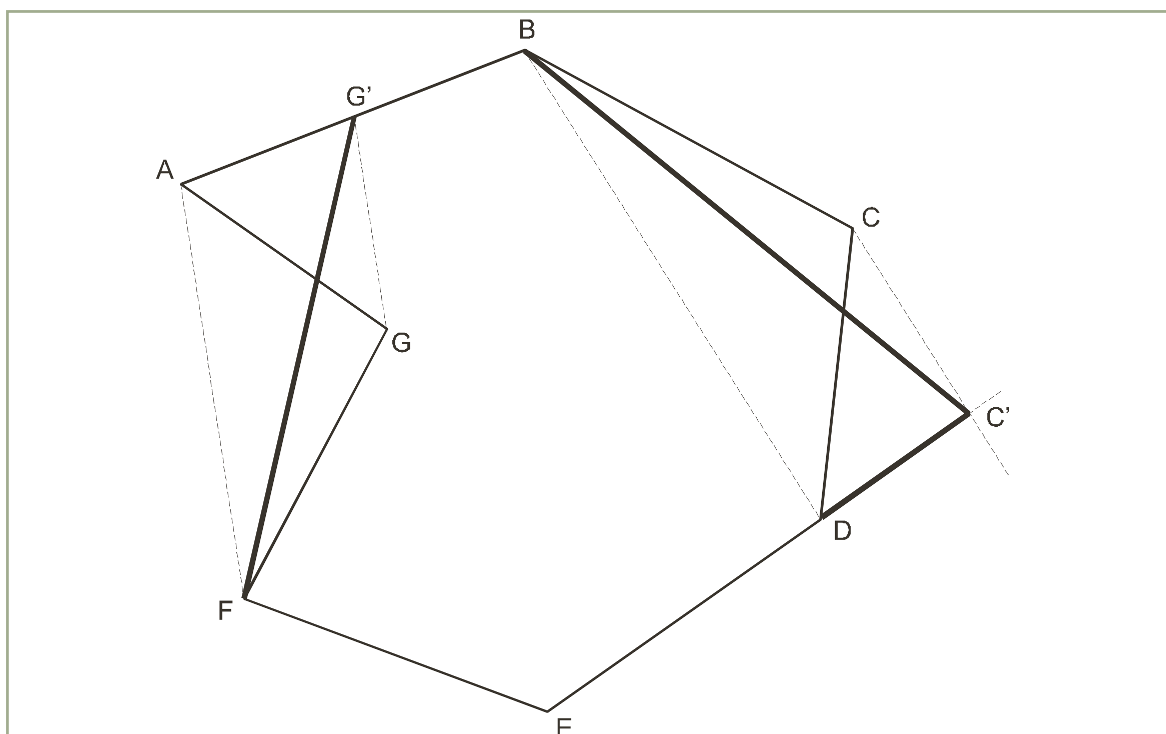


Ilustración 18 Animación

Se puede reducir el número de lados transformando el polígono para convertir dos lados en uno solo. Así, por ejemplo, al trazar la recta *BD* y su paralela por *C* para obtener *C'* en la prolongación de *ED*, el triángulo *BDC* se transforma en el *BDC'*, obteniéndose un polígono de 6 lados.

Análogamente, al trazar la recta *FA* y su paralela por *G* para obtener *G'* sobre *BA*, el triángulo *AFG* se transforma en el *AFG'*, obteniéndose un polígono de 5 lados.

Esta operación se basa en la igualdad de las áreas de cada triángulo con la de su transformado, ya que ésta depende de su base, que es común, y de su altura, que se mantiene constante por desplazarse el vértice sobre una paralela a ésta.

En el primer caso, el área del triángulo *BDC* es parte de la del polígono, mientras que en el segundo el área del triángulo *AFG* se resta a la del polígono.

3.5. Construcción del cuadrado equivalente a un triángulo

Sea *ABC* el triángulo [Ilustración 19].

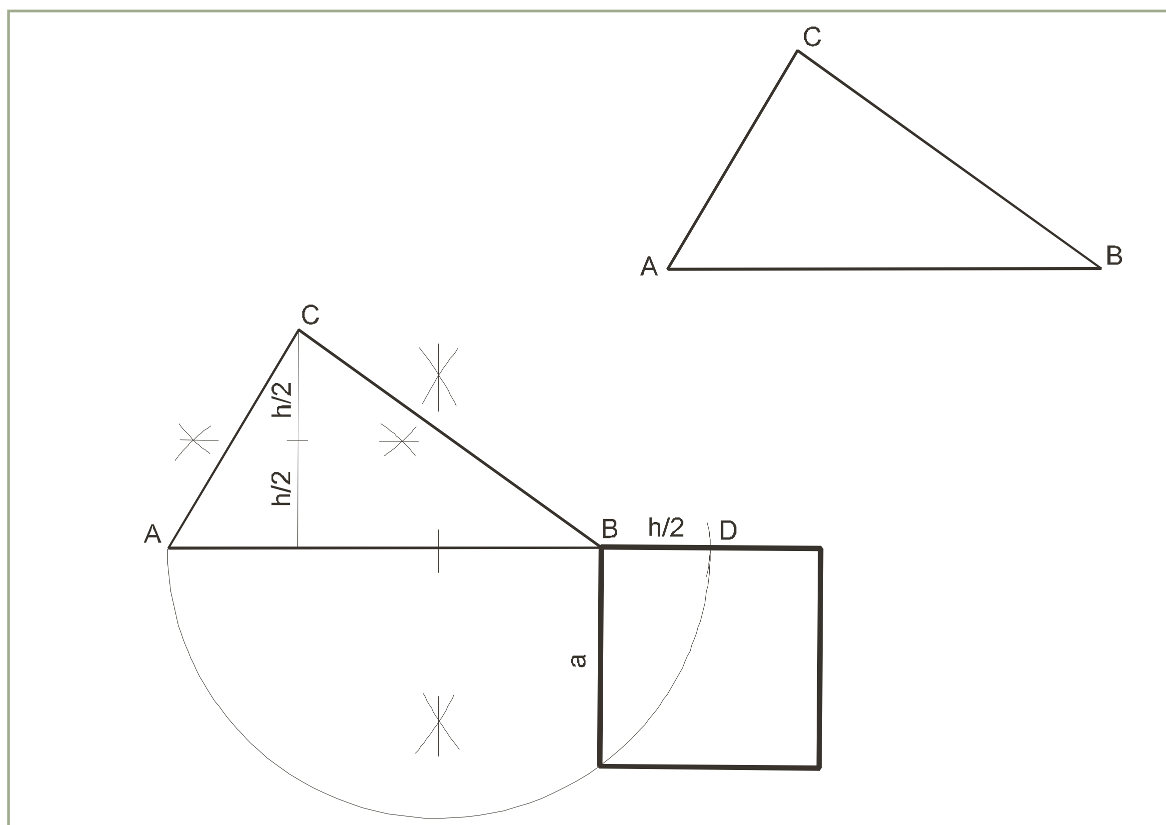


Ilustración 19 Animación

Se halla la mitad de la altura *h*/2 del vértice *C* y se transporta sobre la prolongación de *AB*, a partir de *B*. La semicircunferencia de diámetro *AD* y la perpendicular a éste por *B* permiten obtener el lado *a* del cuadrado **equivalente**, que es media proporcional entre la base *AB* y la mitad de la altura del triángulo.

3.6. Construcción del rectángulo equivalente a un cuadrado, conocido un lado

Sea *ABCD* el cuadrado y *a* el lado conocido del rectángulo [Ilustración 20].

Se transporta el lado *a* sobre la prolongación de *AB* a partir de *B*. La mediatriz de *CE* corta a *BE* en el centro *O* de la semicircunferencia que pasa por *E* y *C*, y determina el otro lado *FB* del rectángulo. Éste es tercera proporcional del lado conocido *a* del rectángulo y del lado del cuadrado.

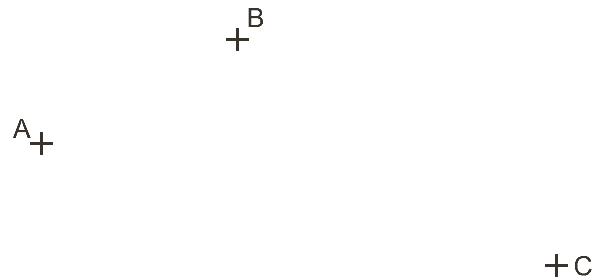
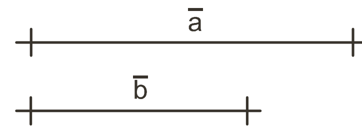
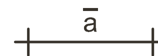
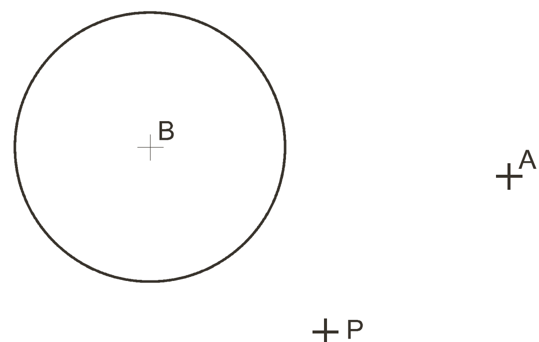


Ilustración 20

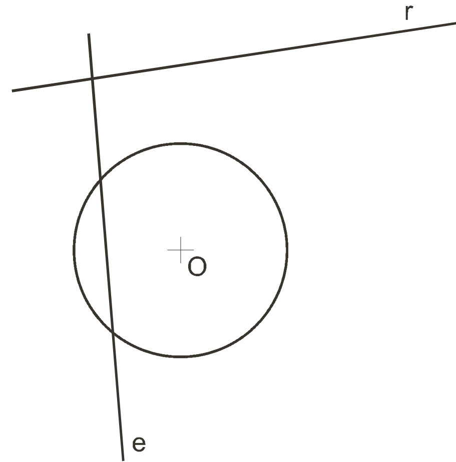
Recuerda

- Para un arco capaz de ángulo α sobre un segmento *AB*, el ángulo central que abarca dicho segmento es 2α.
- La condición para que un cuadrilátero pueda inscribirse en una circunferencia es que sus ángulos opuestos sean suplementarios.
- El cateto del triángulo rectángulo es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.
- La altura sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo es media proporcional entre las dos partes en que la divide.
- La media proporcional de dos segmentos puede obtenerse mediante los teoremas del cateto o la altura, o mediante la potencia de un punto exterior o interior.
- Potencia de un punto respecto de una circunferencia es el producto de las distancias desde dicho punto a los dos de intersección de cualquier secante que pasa por él.
- Eje radical de dos circunferencias es el lugar geométrico de los puntos del plano que tienen igual potencia respecto de ambas.
- La mayor parte de las construcciones que se resuelven utilizando la teoría de potencia, utilizan *el segmento representativo de la potencia de un punto interior o exterior*, o *haces de circunferencias que comparten el eje radical*.
- Figuras planas equivalentes son aquellas que tienen distinta forma e igual área.

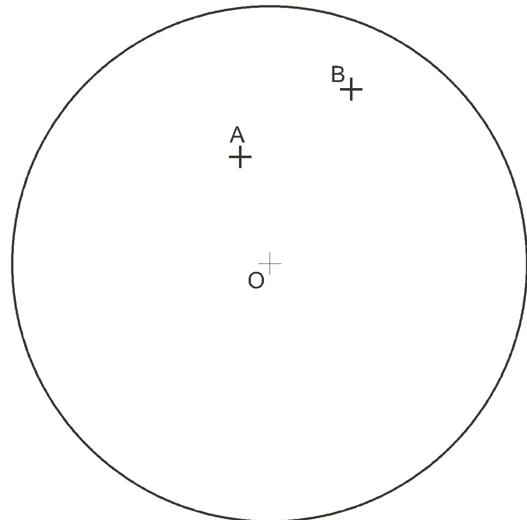

Actividades

1. Hallar un punto *P* desde el cual se vea el segmento $\overline{AB}$ bajo ángulo de 30º y el $\overline{BC}$ bajo ángulo de 105º.	
2. Hallar la media proporcional de los segmentos $\bar{a}$ y $\bar{b}$ mediante el teorema de la altura.	
3. Obtener el segmento $\sqrt{5}$ x $\bar{a}$.	
4. Trazar una circunferencia con centro en *A*, de modo que el punto *P* tenga la misma potencia respecto de ella y de la de centro *B*.	

5. Trazar la circunferencia que tiene el mismo eje radical que la de centro *O* y que es tangente a la recta *r*.



6. Trazar las circunferencias que pasan por *A* y *B* y son tangentes a la de centro *O*.



2 Construcción de formas poligonales

* *Polígonos en la cúpula gótica de la catedral de Burgos (ISFTIC. Banco de imágenes).*

En esta Unidad se presentan construcciones de triángulos a partir de datos que incluyen puntos o rectas notables y las circunferencias inscrita o circunscrita. Para su resolución se utilizan las propiedades del triángulo y otros conceptos ya conocidos como: arco capaz, homotecia, semejanza, tangencia, etc.

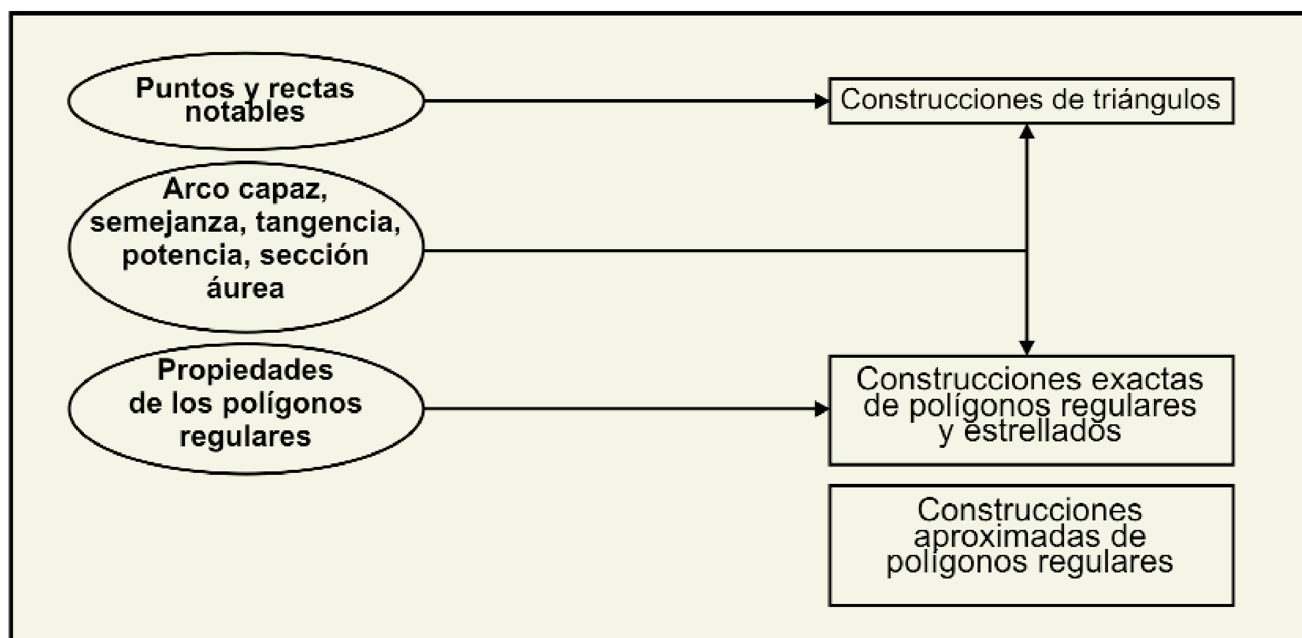
En las ilustraciones de muchas construcciones se recogen junto al trazado los datos y una figura de análisis. La realización de ésta en las actividades favorecerá su resolución. Las figuras de análisis deben recoger los datos, la solución y los trazados que los relacionen, de modo que se pueda idear la construcción a partir de ellos.

En las construcciones en que se repiten trazados de forma consecutiva, por ejemplo al dividir la circunferencia en partes iguales, se debe cuidar la precisión y utilizar procedimientos que minimicen los errores, según se indica en el texto.

Se incluyen también las construcciones de polígonos regulares y estrellados a partir del lado o el radio de su circunferencia circunscrita, que han sido muy utilizadas en la arquitectura y la decoración.

Con el estudio de esta Unidad nos proponemos alcanzar los siguientes **objetivos:**

1. Construir triángulos en los que las rectas y puntos notables formen parte de los datos.
2. Construir polígonos regulares a partir del lado o el radio.
3. Utilizar los conceptos de ángulo inscrito, arco capaz, semejanza, tangencia, potencia y sección áurea para construir formas poligonales.
4. Utilizar con destreza los instrumentos del dibujo técnico y los procedimientos de construcción que reducen errores de trazado.



ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. Triángulos. Puntos y rectas notables

1.1. Mediatrices. Circunferencia circunscrita

Las mediatrices de los lados de un triángulo se cortan en un punto ***O*** llamado **circuncentro**, que es centro de una circunferencia que pasa por sus vértices, llamada **circunscrita**.

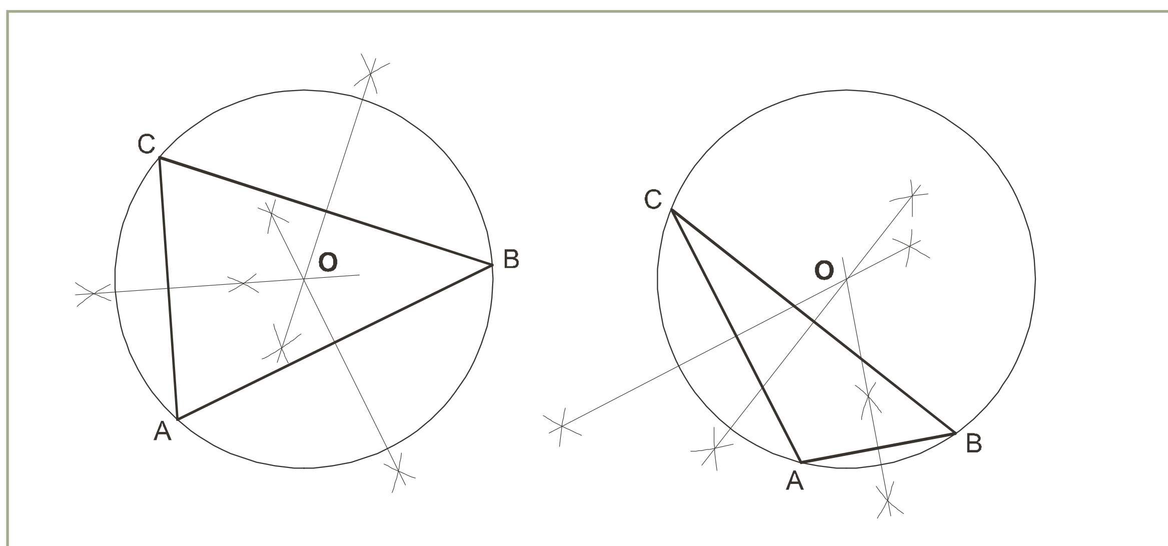


Ilustración 1   Animación

En la Ilustración 1 se han trazado las circunferencias circunscritas de un triángulo acutángulo y otro obtusángulo, obteniéndose los circuncentros en su interior y su exterior respectivamente.

1.2. Bisectrices. Circunferencia inscrita

Las bisectrices interiores de los ángulos de un triángulo se cortan en un punto ***I*** llamado **incentro**, que es centro de la circunferencia tangente a sus lados, llamada **inscrita**. **Las bisectrices exteriores** concurren con las interiores en los puntos I_a, I_b, I_c, llamados **exincentros**, que son centros de circunferencias exteriores al triángulo y tangentes a un lado y a las prolongaciones de los otros dos.

Los segmentos de bisectriz cuyos extremos son el vértice *A*, *B* o *C* y el punto de corte con el lado opuesto V_a, V_b o V_c se designan como v_a, v_b y v_c.

En la Ilustración 2 se han trazado las bisectrices interiores y exteriores de un triángulo, obteniéndose el incentro y los tres exincentros. La perpendicular desde cada uno de ellos a un lado es el radio de la circunferencia inscrita o exinscrita correspondiente.

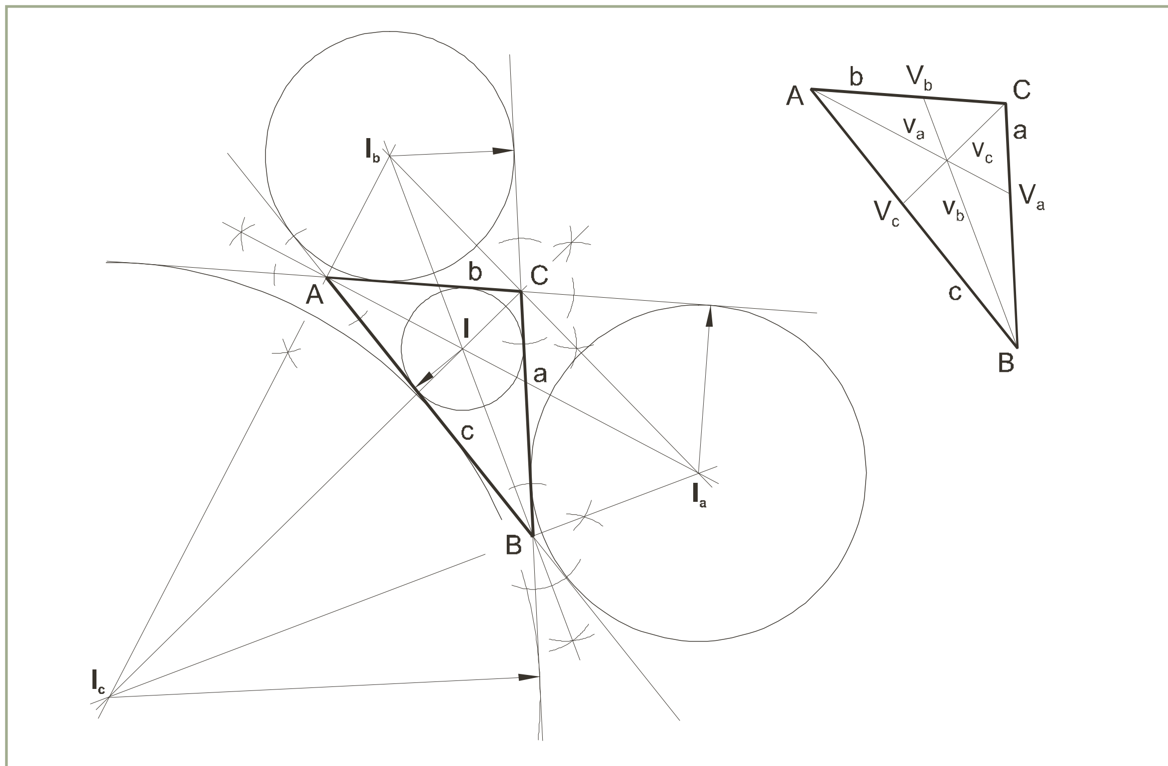


Ilustración 2 Animación

1.3. Medianas. Baricentro

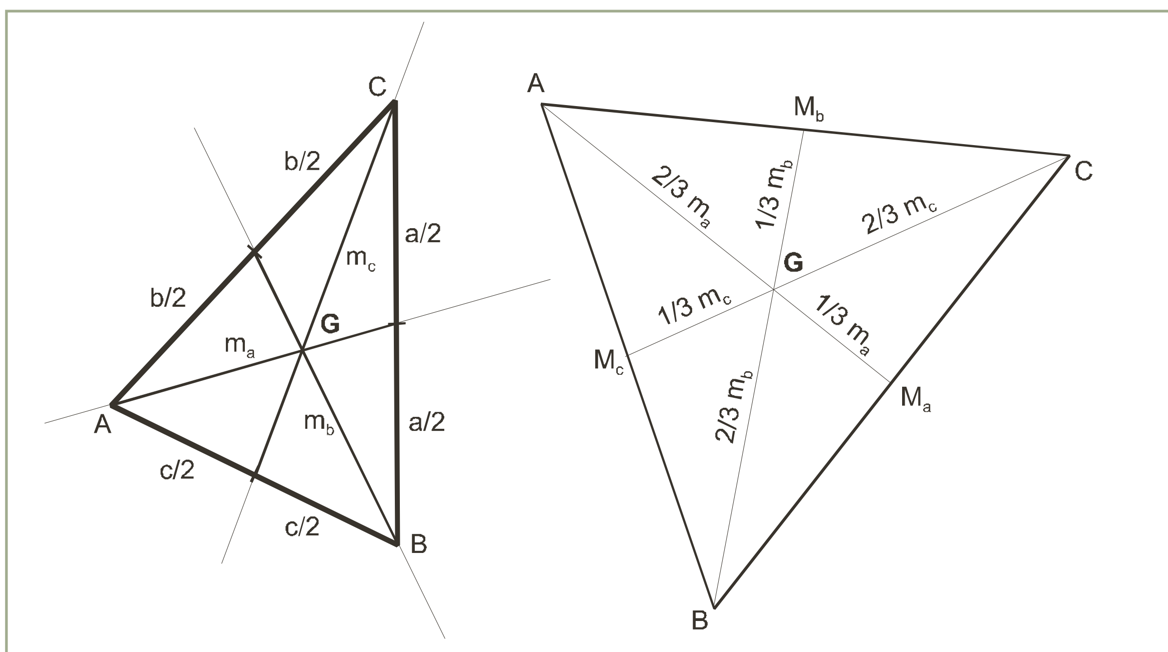


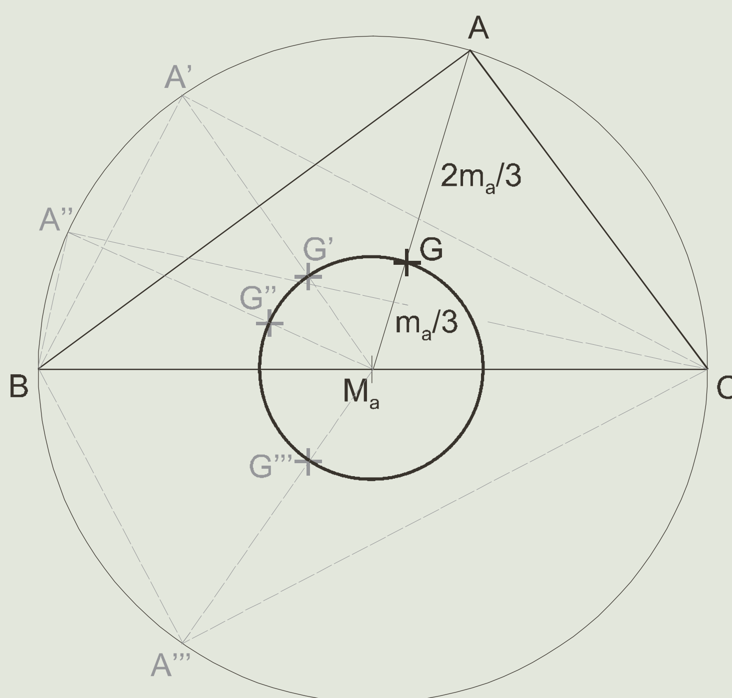
Ilustración 3 Animación

Medianas son las rectas que pasan por un vértice y el punto medio del lado opuesto. También se llama así al segmento cuyos extremos son dichos puntos, designándosele en el dibujo como m_a, m_b o m_c según corresponda [Ilustración 3 izquierda].

Las medianas de un triángulo se cortan en un punto ***G*** llamado ***baricentro***. Dividida cada mediana en tres partes, el baricentro se encuentra situado a 2/3 del vértice y a 1/3 del punto medio M_a, M_b o M_c del lado opuesto [Ilustración 3 derecha].

Aplicación



Se desea hallar el lugar geométrico del baricentro *G* de los triángulos rectángulos *ABC* que comparten la hipotenusa *BC*.

El vértice *A* del ángulo recto del triángulo está en el arco capaz de 90º sobre la hipotenusa *BC* y por tanto a la distancia de un radio m_a de su centro M_a. Como la distancia del baricentro *G* a M_a es $m_a/3$, las posiciones de éste definen la circunferencia cuyo diámetro es 1/3 de la hipotenusa *BC* y cuyo centro es su punto medio M_a.

1.4. Alturas. Triángulo órtico

Alturas de un triángulo son las rectas que pasan por un vértice y son perpendiculares al lado opuesto. También se llama así al segmento h_a, h_b o h_c cuyos extremos son el vértice y el punto de corte H_a, H_b o H_c con el lado opuesto, llamado **pie de la altura** [Ilustración 4 izquierda]. **Las alturas** se cortan en un punto ***H*** llamado **ortocentro**.

Los pies H_a, H_b, H_c de las tres alturas de un triángulo *ABC* son vértices de un triángulo llamado **órtico** del *ABC*. Las alturas del triángulo *ABC* son bisectrices de su triángulo órtico [Ilustración 4 derecha].

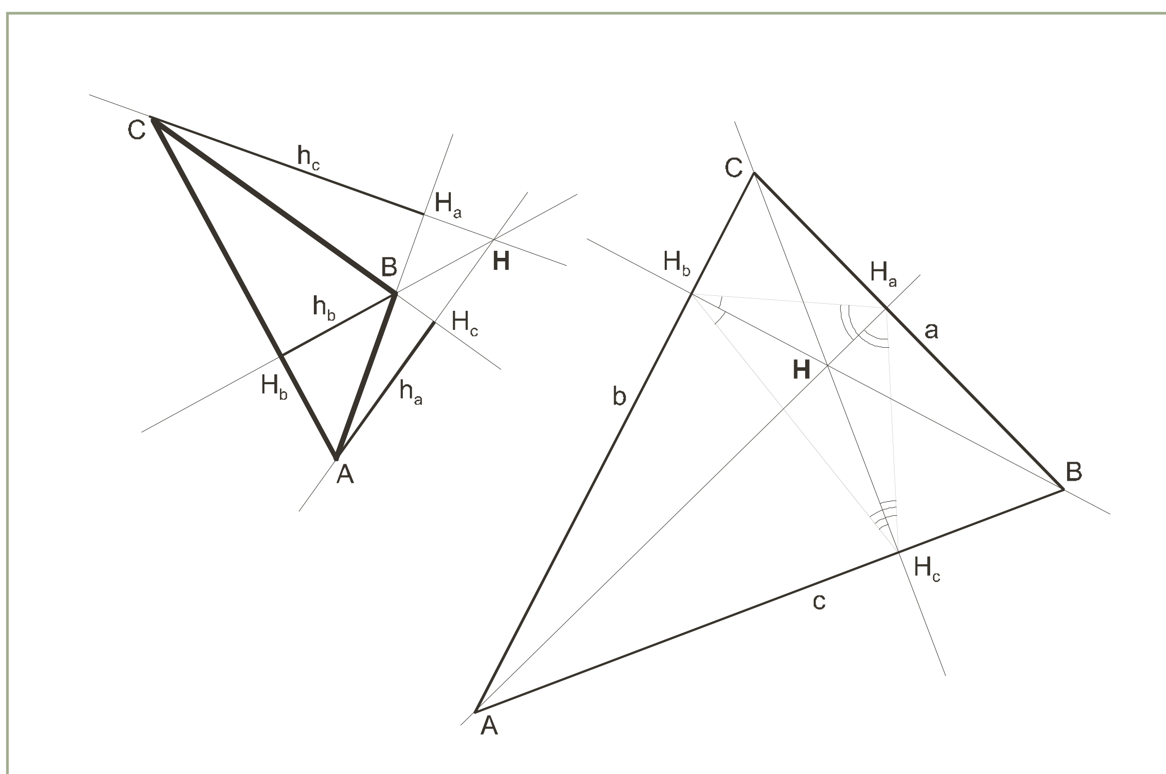


Ilustración 4  **Animación** 

2. Construcción de triángulos

2.1. Conocidos dos lados y la altura sobre el tercer lado

Sean los lados *a*, *b* y la **altura** h_c [Ilustración 5].

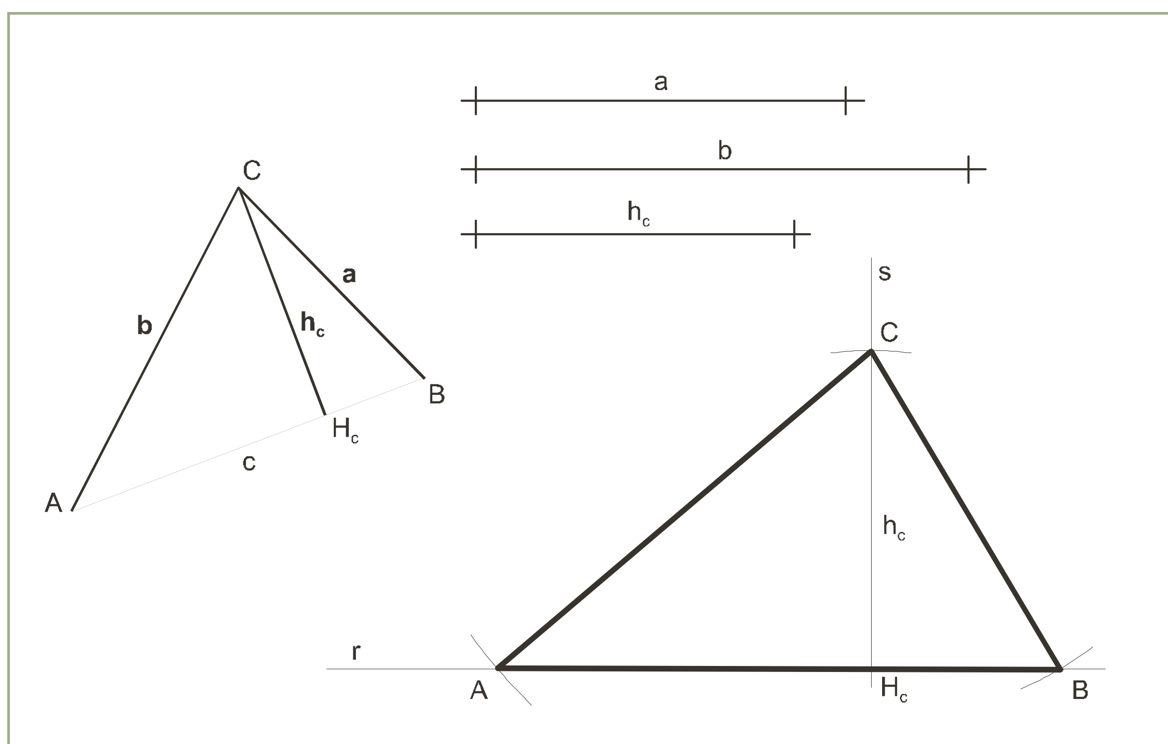


Ilustración 5

Se traza una recta *r* y la perpendicular *s*. Se toma su punto de corte como pie de la altura H_c y se transporta a partir de él, sobre *s*, la altura h_c. Con centro en *C* se trazan arcos de radios los lados *a* y *b* que cortan a *r* en los vértices *B* y *A* respectivamente.

2.2. Conocido un lado y las alturas de sus vértices

Sea el lado *c* y las alturas h_a y h_b [Ilustración 6].

Se traza una semirrecta con origen en *A* y se transporta sobre ella el lado *c* = *AB*. Con centros en *A* y *B* se trazan dos circunferencias de radios las alturas h_a, h_b respectivamente. Las tangentes a ellas desde *B* y *A* se cortan en el tercer vértice *C*.

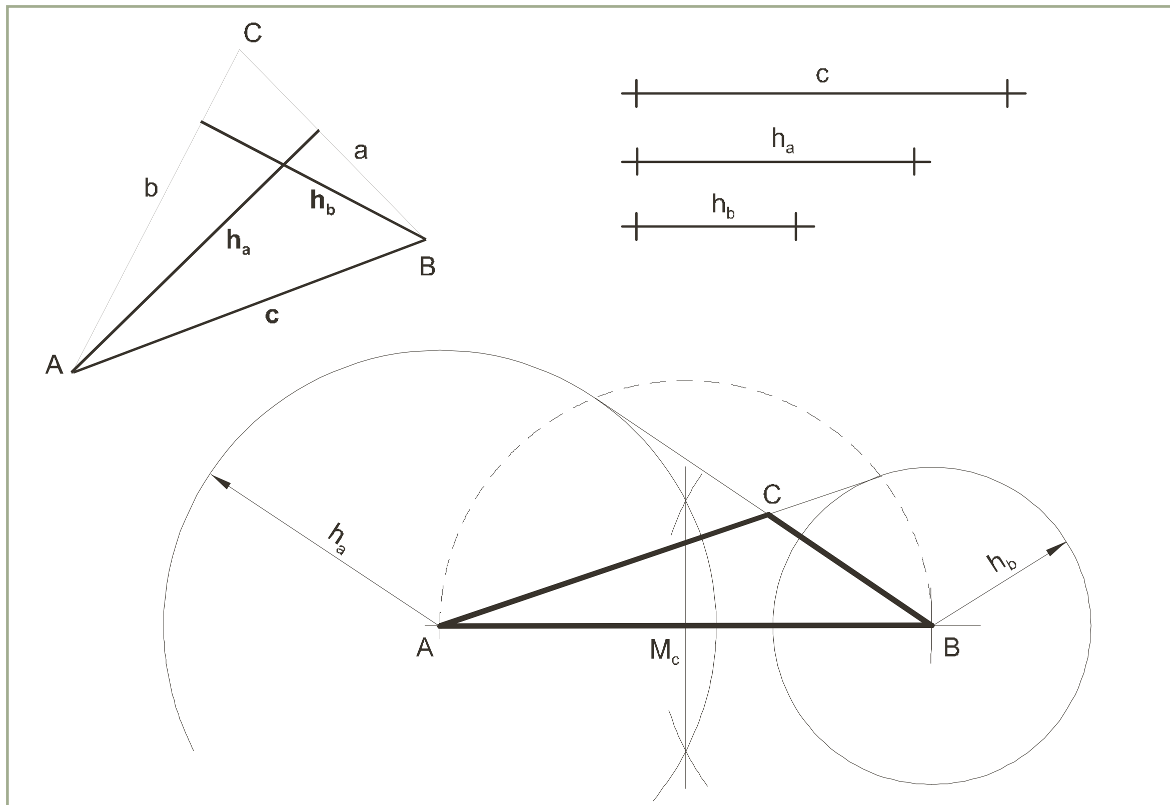


Ilustración 6

2.3. Conocido un ángulo, su bisectriz y su altura

Sea *A* el ángulo, v_a su bisectriz y h_a su altura [Ilustración 7].

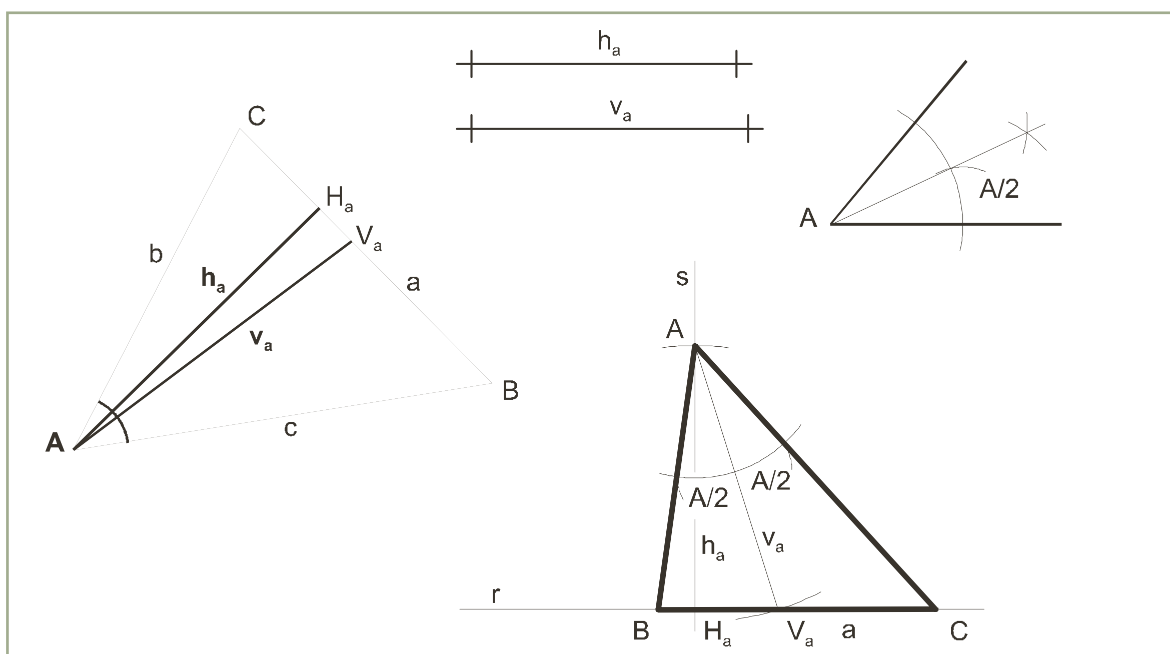


Ilustración 7

Se traza una recta *r* y la perpendicular *s*. Se toma su punto de corte como pie de la altura H_a y se transporta a partir de él, sobre *s*, la altura h_a. Un arco de centro *A* y radio v_a, que corta a *r* en V_a, permite trazar la bisectriz. Dividido el ángulo *A* en dos partes iguales, se transporta A/2 con vértice en *A* a ambos lados de la bisectriz. Los lados así trazados cortan al lado *a* en *B* y *C*.

2.4. Conocido un lado, su mediana y la altura sobre él

Sea *a* el lado, m_a su **mediana** y h_a la altura [Ilustración 8].

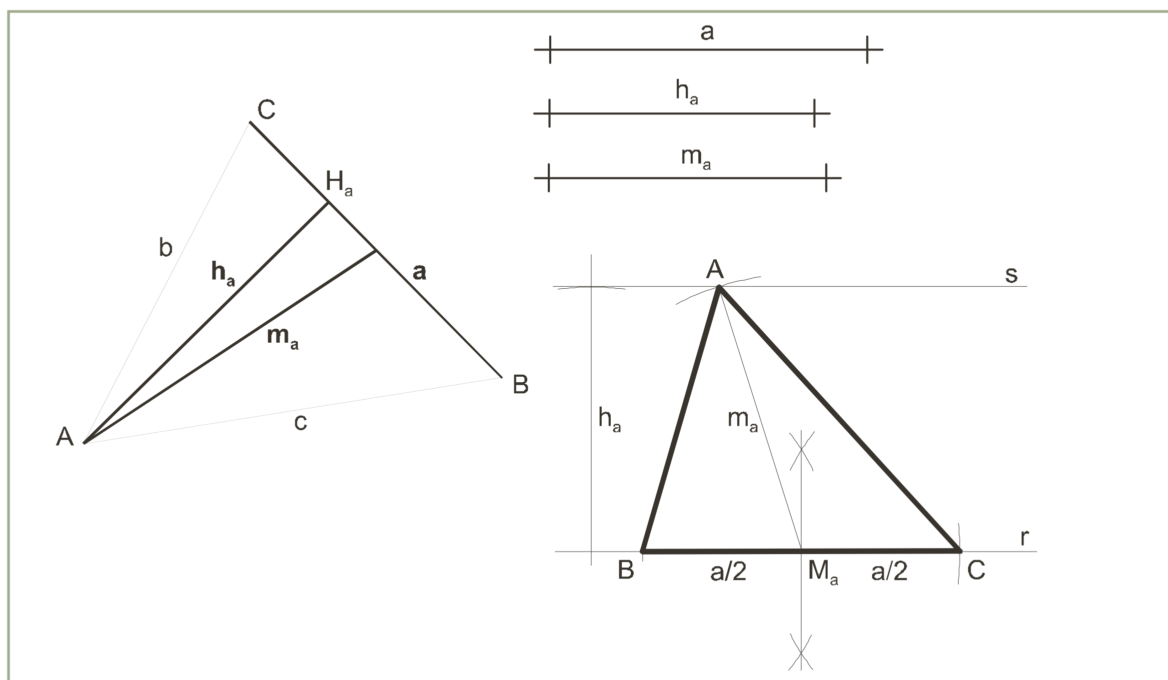


Ilustración 8

Se traza una recta *r* y su paralela *s* a una distancia igual a la altura h_a. Se transporta el lado *a* sobre *r* a partir de un punto cualquiera B y se traza su mediatriz. Con centro en el punto medio M_a del lado *a* se traza un arco de radio m_a, que corta a *s* en el tercer vértice *A*.

2.5. Conocido un lado, el ángulo opuesto y la mediana compartida

Sea *a* el lado, *A* el ángulo opuesto y m_a la mediana [Ilustración 9].

Se transporta el lado *a* sobre una semirrecta de origen *B* obteniendo el vértice *C*. Se traza el arco capaz del ángulo *A* sobre el lado *BC*. Para ello se transporta el ángulo *A* a partir del lado *BC* con vértice en B. La perpendicular por *B* al lado obtenido corta a la mediatriz de $\overline{BC}$ en el centro *O* de dicho arco capaz. Con centro en el punto medio M_a del lado *a* se traza un arco de radio m_a, que corta al arco capaz en el tercer vértice *A*.

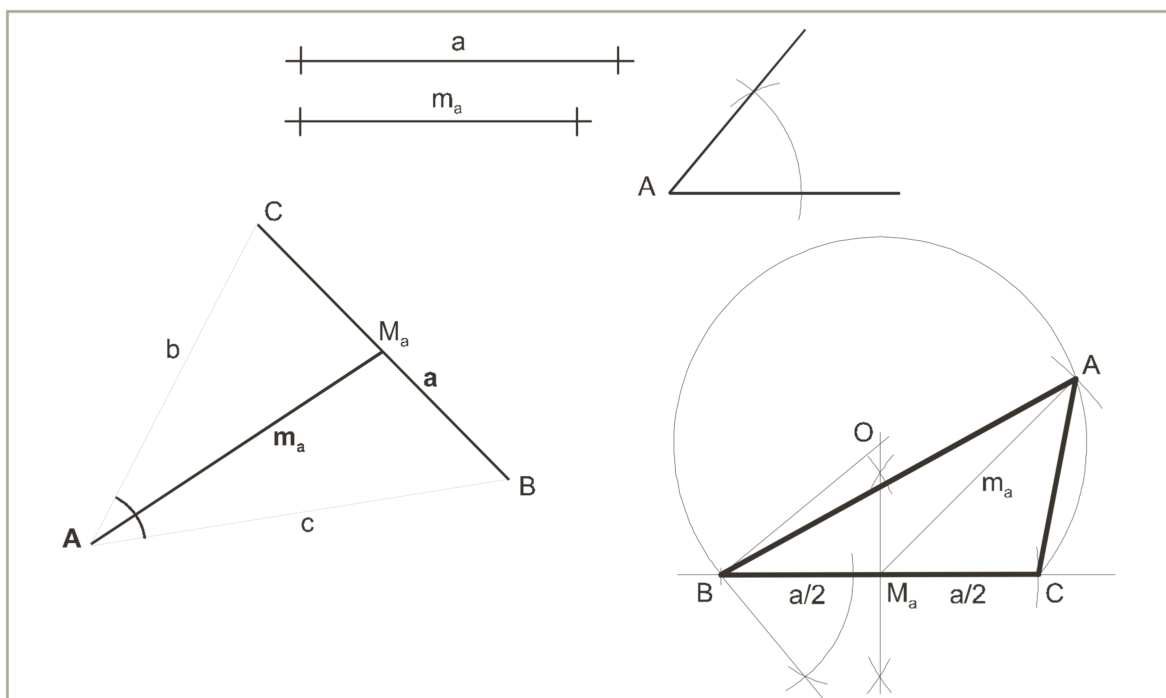


Ilustración 9

2.6. Conocido un ángulo, uno de los lados que lo forman y la altura sobre el lado opuesto

Sea *A* el ángulo, *c* el lado y h_a la altura de *A* [Ilustración 10].

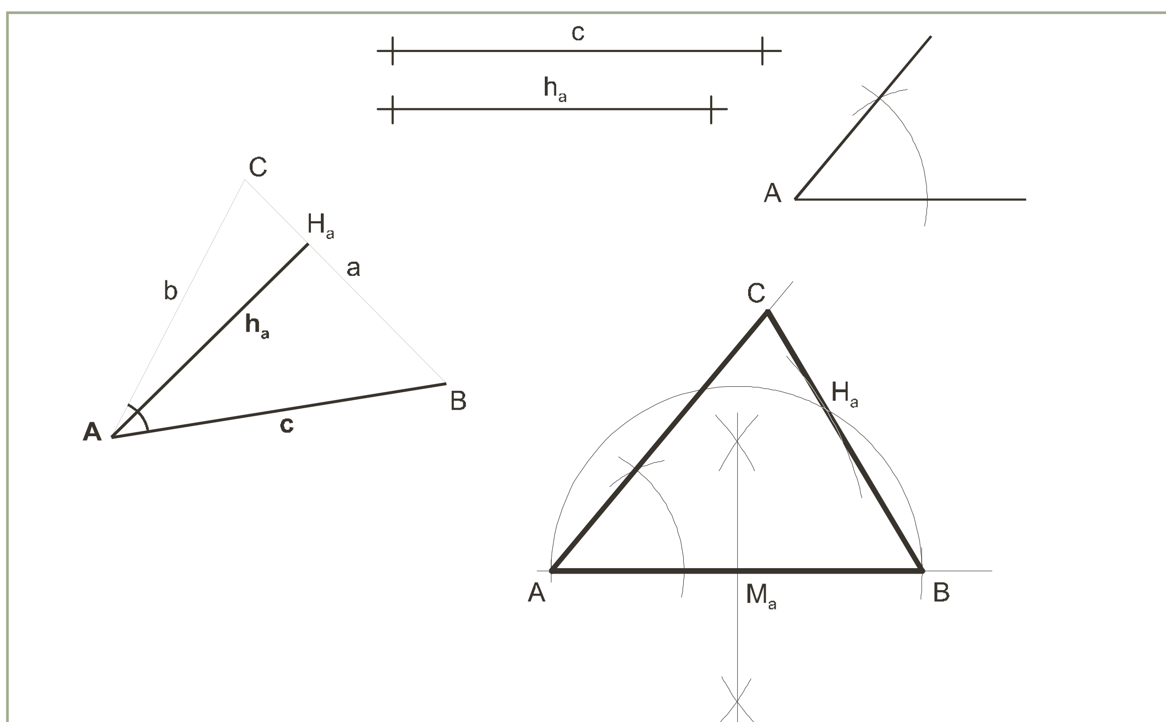


Ilustración 10

Se transporta el lado *c* sobre una semirrecta de origen *A* obteniendo el vértice *B*. Se transporta el ángulo *A* a partir de *AB* con vértice en *A*. Se traza el arco capaz del ángulo de *90º* sobre el lado *AB*. Con centro en *A* se traza un arco de radio h_a, que corta al arco capaz en el pie de la altura H_a. Pasando por *B* y H_a se traza el lado *a*.

2.7. Conocidas las tres medianas

Sean m_a, m_b y m_c las medianas [Ilustración 11].

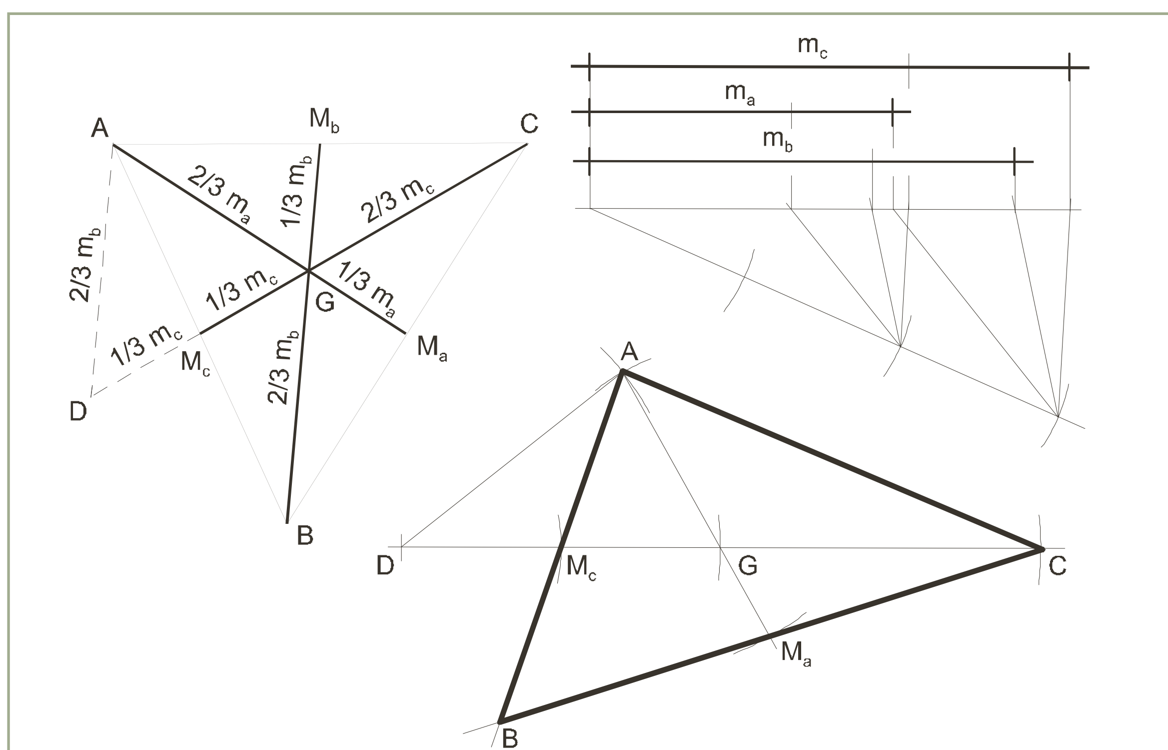


Ilustración 11

Se utiliza la *división de un segmento en tres partes iguales* para obtener dos tercios de cada mediana y construir con ellos el triángulo *DGA*. Para ello se transporta 2/3 m_c sobre una semirrecta de origen *D* obteniendo el **baricentro** *G*. Dos arcos de centros *D* y *G* y radios 2/3 m_b y 2/3 m_a determinan *A*.

Un arco de centro *D* y radio 1/3 m_c permite obtener M_c. Otro de centro G y radio 2/3 m_c permite obtener *C* y uno más de centro *A* y radio m_a permite obtener M_a. La intersección de los lados AM_c y CM_a es el tercer vértice *B*.

2.8. Conocida la razón entre dos lados, el ángulo que forman y el radio de la circunferencia circunscrita

Sea *A* el ángulo, *r* el radio y 2/3 la razón entre *b* y *c* [Ilustración 12].

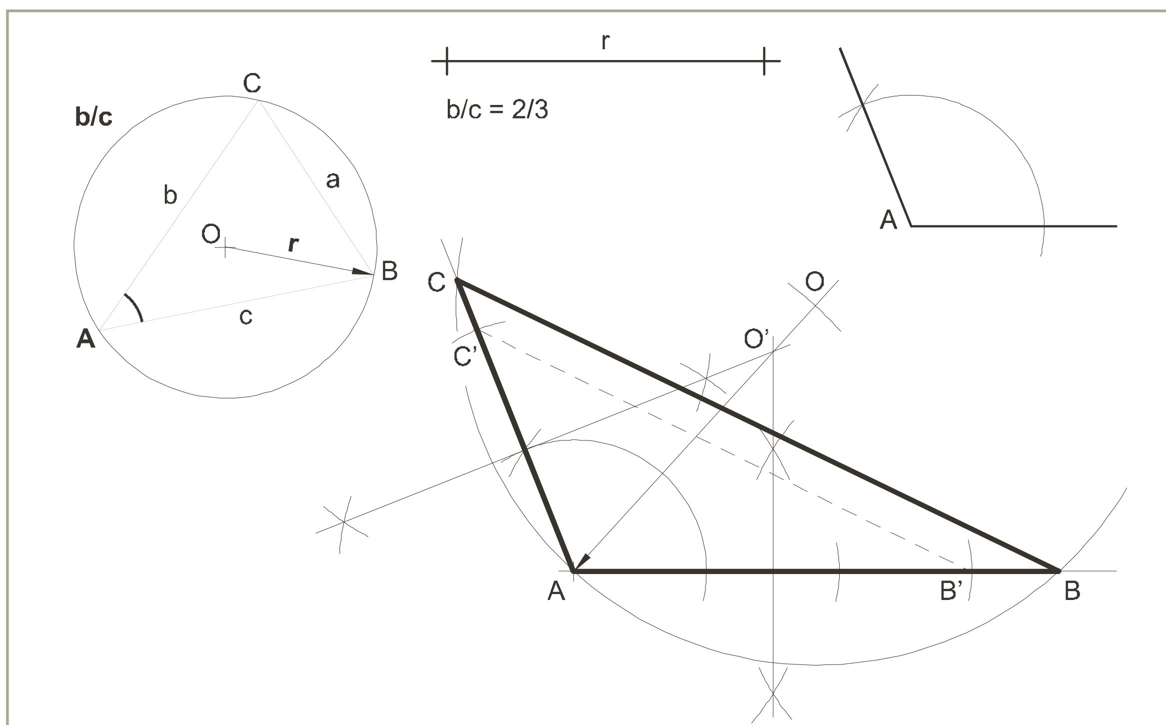


Ilustración 12

Se transporta el ángulo *A* a partir de una semirrecta de origen *A*. Se transportan tres segmentos iguales cualesquiera sobre un lado del ángulo a partir del vértice *A* y otros dos sobre el otro lado. Del triángulo *AB'C'* así obtenido se obtiene el **circuncentro** *O'* mediante las mediatrices de los lados *AB'* y *AC'*.

Considerando una homotecia de centro *A* y razón *r/r'* se obtiene el triángulo solución *ABC*, semejante al *AB'C'*, sin más que superponer al radio *O'A* el *OA* = *r* y trazar el arco de centro *O* y radio *r*.

2.9. Conocidas la mediana, la altura y la bisectriz de un vértice

Sea m_a la mediana, h_a la altura y v_a la bisectriz [Ilustración 13].

Se traza una recta *r*, la perpendicular *s* y un arco con centro en su punto de corte H_a y radio h_a que corta a *s* en *A*. Dos arcos con centro en A y radios m_a y v_a cortan a r en M_a y V_a. La perpendicular a *r* por M_a corta a la prolongación de v_a en *D*. La mediatriz de la cuerda *AD* corta a la del lado *BC* del triángulo buscado en el centro *O* de su circunferencia circunscrita, que trazada con radio *OA* determina los vértices *B* y *C*.

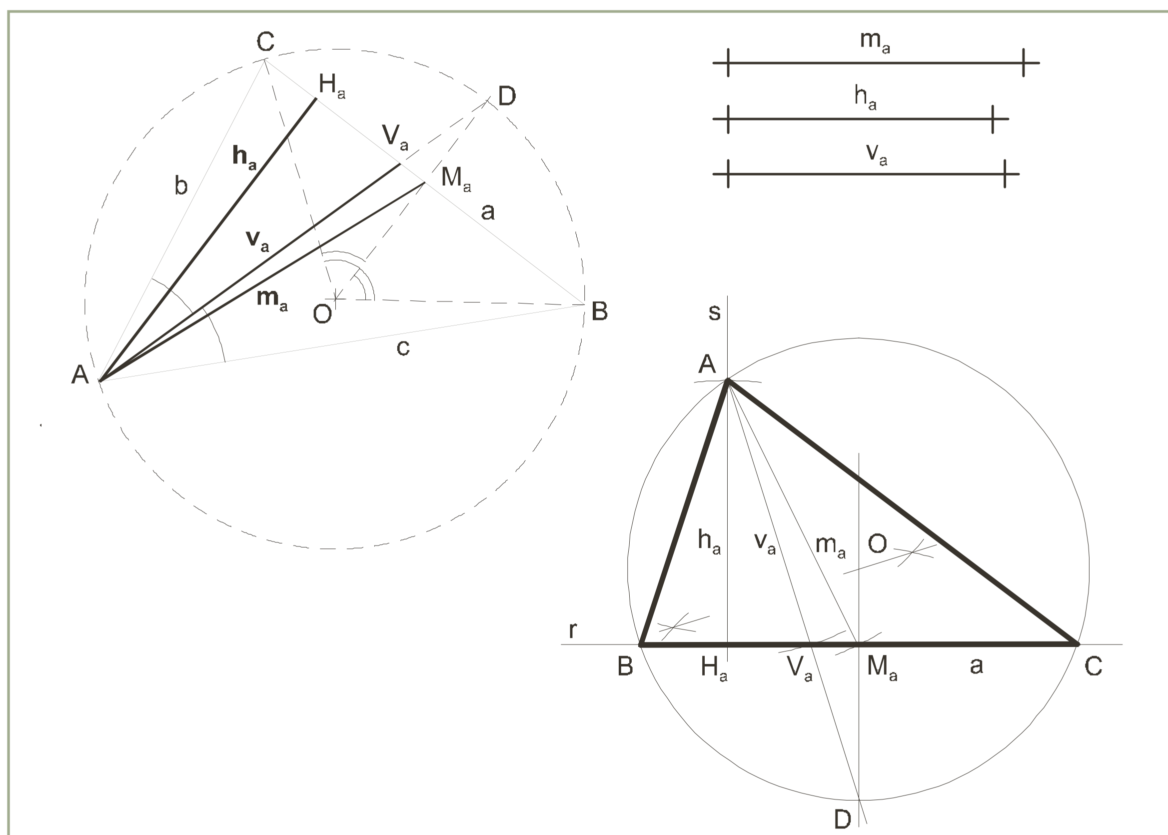


Ilustración 13

La construcción se apoya en la determinación del punto *D* de la circunferencia circunscrita, que como se ve en la ilustración 13 izquierda es el punto de corte con la bisectriz v_a. Pero también *D* es un punto de la mediatriz del lado *BC*.

Efectivamente, al ser el ángulo central *BOC* correspondiente del inscrito *BAC*, las bisectrices de ambos deben cortarse en *D* para asegurar la correspondencia de los inscritos *DAC* y *BAD* con los centrales *DOC* y *BOD*.

3. Construcción de polígonos regulares conocido el radio

3.1. Definición y elementos de los polígonos regulares

Polígonos regulares son aquellos que tienen todos sus lados iguales (equiláteros) y todos sus ángulos iguales (equiángulos) [Ilustración 14 izquierda].

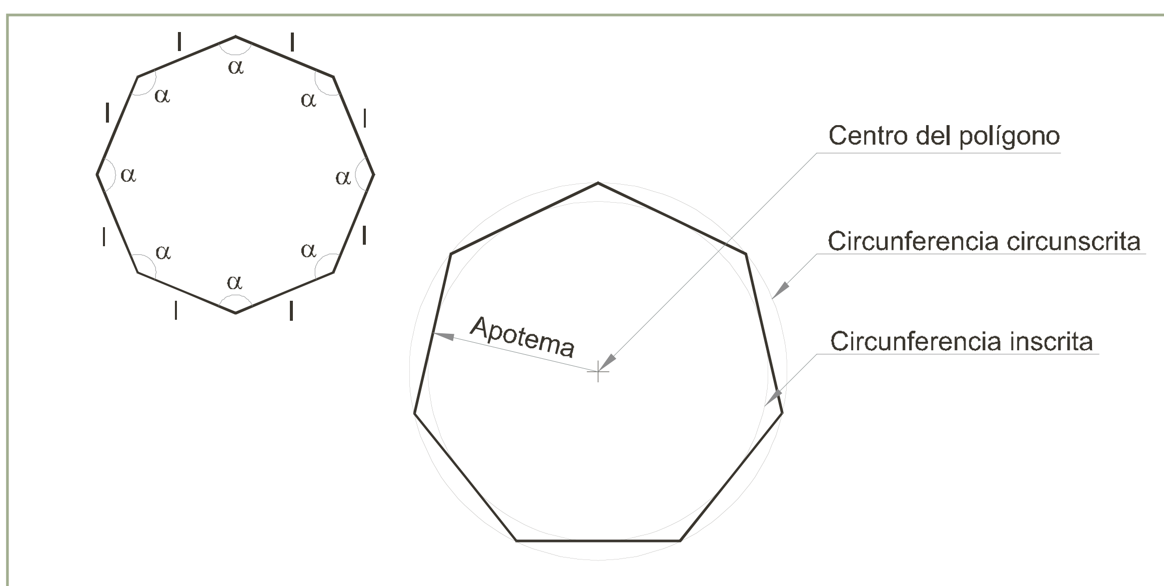


Ilustración 14 Animación

Sus elementos característicos pueden verse en la Ilustración 14 derecha y son:

- **Centro del polígono**, equidista de todos sus lados y vértices.
- **Circunferencia circunscrita**, su centro es el del polígono y contiene a todos sus vértices. Se dice también que el polígono está inscrito en la circunferencia.
- **Circunferencia inscrita**, su centro es el del polígono y es tangente a todos sus lados en su punto medio. La distancia del centro al punto medio del lado es su radio, llamado **apotema**. Se dice también que el polígono está circunscrito a la circunferencia.

Las construcciones de los polígonos regulares parten habitualmente de la longitud del lado o del radio de la circunferencia circunscrita, aunque pueden obtenerse también a partir de otros datos o condiciones.

Se construye un polígono regular inscrito de *n* lados uniendo consecutivamente los puntos de división de la circunferencia en *n* partes iguales. Es posible dividir la circunferencia con regla y compás en 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 17, 20,… partes iguales, pero no en 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21,… Por ello se debe diferenciar entre construcciones exactas como las del triángulo equilátero, cuadrado, hexágono, pentágono,… y aproximadas para el heptágono, eneágono,…

3.2. Triángulo equilátero, hexágono y dodecágono

El lado del hexágono inscrito es igual al radio de la circunferencia. Así pues, se divide la circunferencia en seis partes iguales sin más que trazar arcos consecutivos de radio igual al de la circunferencia [Ilustración 15 izquierda].

Sea *r* el radio de la circunferencia en la que se desea inscribir un triángulo equilátero, un hexágono y un dodecágono [Ilustración 15 derecha].

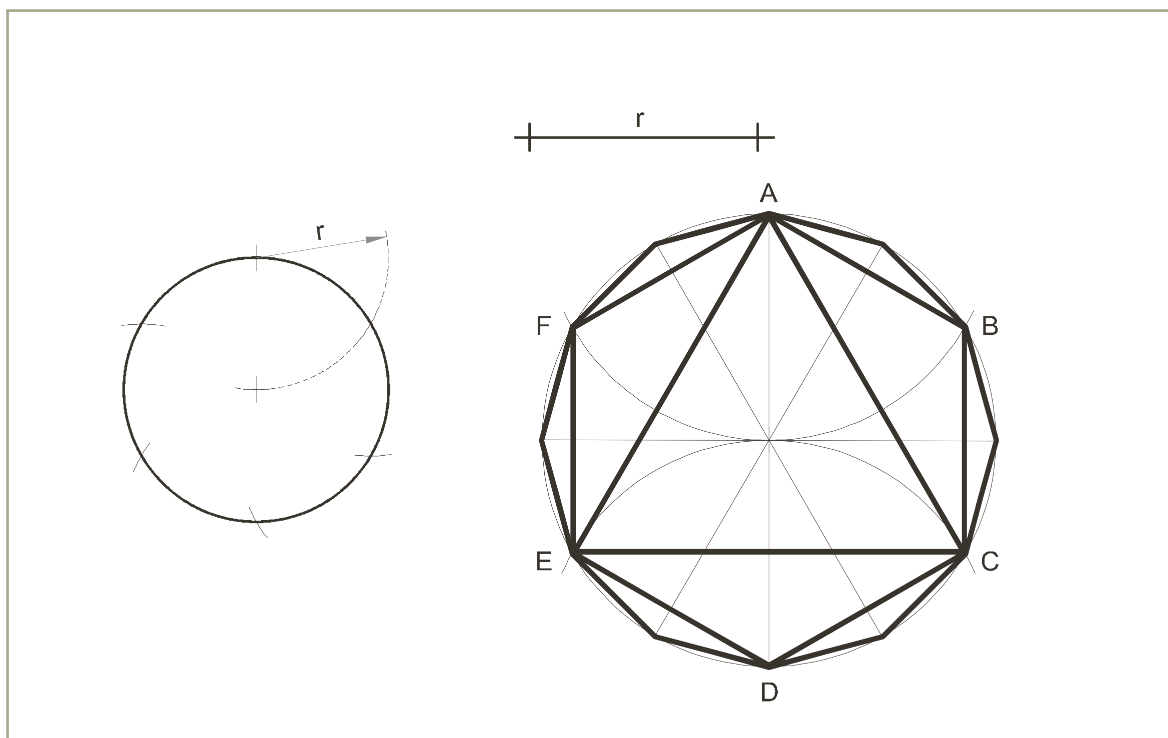


Ilustración 15 Animación

Se traza la circunferencia con radio *r*, un diámetro *AD* y arcos de radio *r* y centros *A* y *D* que la dividen en 6 partes con el mínimo error posible.

Los extremos de los diámetros paralelos a las cuerdas *AC*, *CE* y *EA*, que coinciden con las mediatrices de los lados del hexágono, son los otros seis puntos necesarios para dividir la circunferencia en 12 partes iguales.

Uniendo los puntos de división consecutivamente se obtiene el dodecágono, de dos en dos el hexágono y de tres en tres el triángulo equilátero.

3.3. Cuadrado y octógono

Dos diámetros perpendiculares y sus bisectrices dividen la circunferencia en ocho partes iguales.

Sea *r* el radio de la circunferencia en la que se desea inscribir un cuadrado [Ilustración 16].

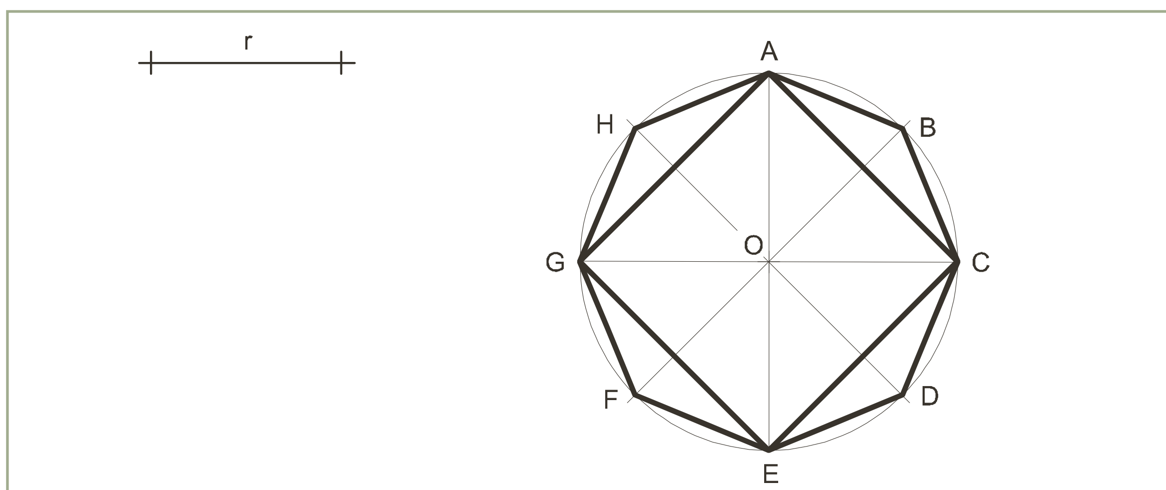


Ilustración 16  Animación 

Se traza la circunferencia con radio *r*, dos diámetros perpendiculares *AE*, *CG* y las paralelas a *AC* y *CE* por *O*, que son sus bisectrices *HD* y *BF*. Uniendo los puntos de división consecutivamente se obtiene el octógono y de dos en dos el cuadrado.

3.4. Pentágono y decágono

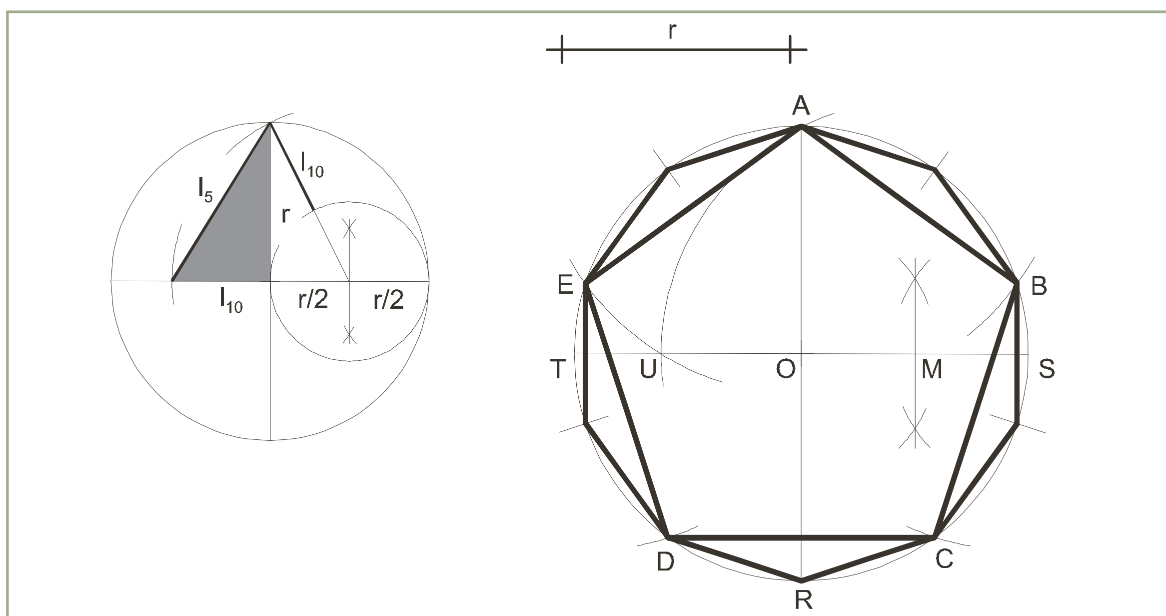


Ilustración 17  Animación 

El lado del decágono regular inscrito es segmento áureo del radio [Ilustración 17 izquierda].

El lado del pentágono regular inscrito es la hipotenusa de un triángulo rectángulo en el que los catetos son el lado del decágono regular inscrito y el radio [Ilustración 17 izquierda].

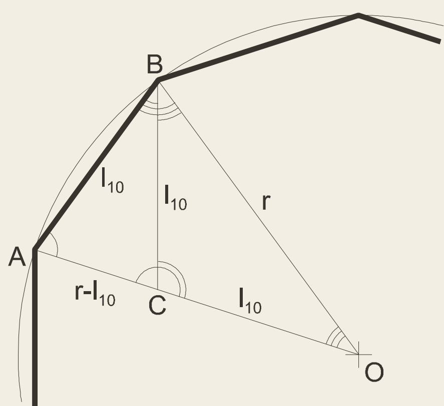
Sea *r* el radio de la circunferencia en la que se desean inscribir el pentágono y decágono regulares [Ilustración 17 derecha].

Se traza la circunferencia con radio *r*, dos diámetros perpendiculares *AR*, *ST* y el centro *M* de *OS* mediante la mediatriz. El arco de centro *M* y radio *MA* corta a *ST* en *U* determinando los lados *OU* y *AU* del decágono y pentágono.

Los puntos de división *E*, *B* del pentágono se obtienen trazando un arco de radio *AU* y centro *A*. Otros dos arcos de centros *E*, *B* dan *D*, *C*.

Los puntos de división del decágono son los diametralmente opuestos a *los A, B, C, D, E*.

Uniendo los puntos de división consecutivamente se obtiene el decágono y de dos en dos el pentágono.



El decágono inscrito puede descomponerse en 10 triángulos isósceles como el *BOA* que se muestra en la ilustración. El ángulo en *O* de dicho triángulo mide $360^o/10 = 36^o$ y los ángulos de la base $180^o - 36^o/2 = 72^o$.

Si se traza la bisectriz del ángulo *ABO* se obtiene un triángulo *ABC* semejante al *BOA*, ya que ésta divide a aquel en dos ángulos de 36º y el ángulo en *A* es común. Así pues, se pueden igualar las razones entre el lado y la base de los dos triángulos isósceles para formar la proporción $\frac{r}{l_{10}} = \frac{l_{10}}{r - l_{10}}$ que coincide con la expresión de la sección áurea del radio *r*, del cual el lado l_{10} del decágono es su parte mayor.

3.5. Heptágono

Este **polígono regular** no se puede construir con regla y compás, pero se facilita la construcción aproximada ideada por Durero.

Sea *r* el radio de la circunferencia en la que se desea inscribir el heptágono regular [Ilustración 18].

Se traza la circunferencia, un radio *r* = *OH* y la cuerda *AI* que coincide con su mediatriz. La mitad *AM* de dicha cuerda es una aproximación del lado del heptágono. Sus vértices son los puntos de corte con la circunferencia de arcos consecutivos de radio *AM* trazados a partir de *A*.

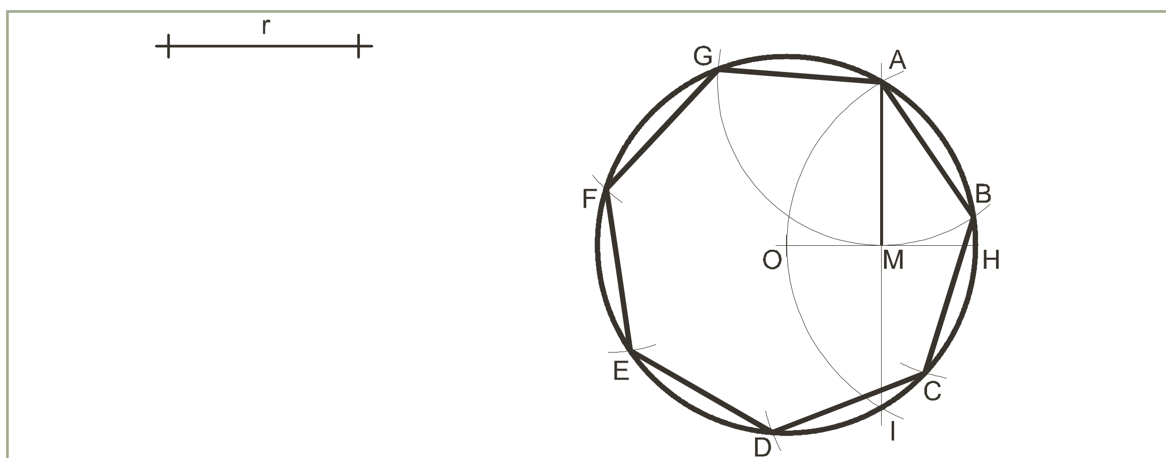


Ilustración 18 Animación

3.6. Polígonos estrellados

En las construcciones de polígonos presentadas se ha dividido la circunferencia en un número entero *n* de partes iguales, se han unido los puntos de división de uno en uno, dando una sola vuelta para volver al punto de partida y se han obtenido polígonos regulares convexos.

Uniéndolos de 1 en 1, de 2 en 2, o en general de *p* en *p* partes, puede ser necesario dar más de una vuelta para volver al punto de partida, en cuyo caso se obtendrán **polígonos estrellados**. Se llama **especie** del polígono al número de vueltas necesario para cerrarlo.

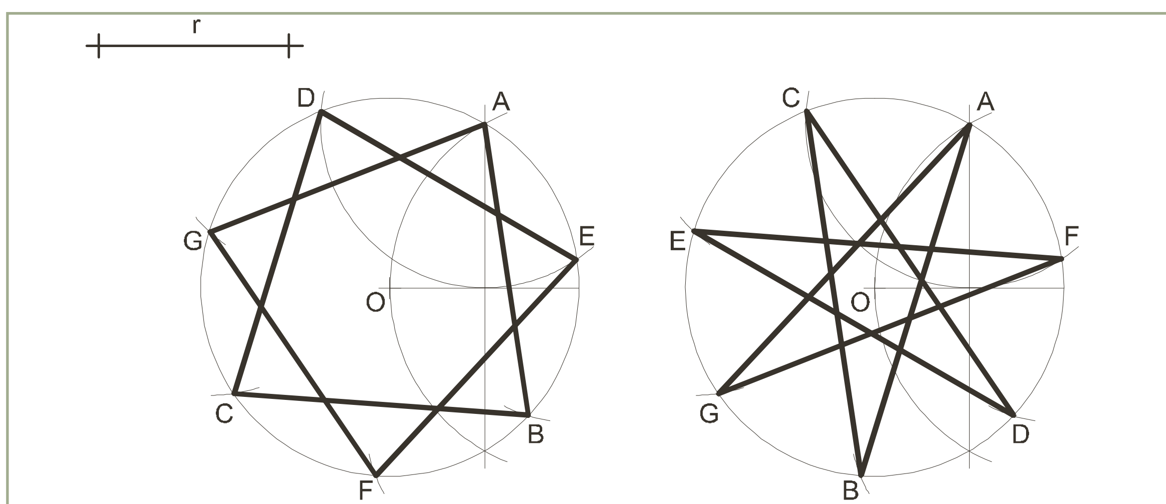


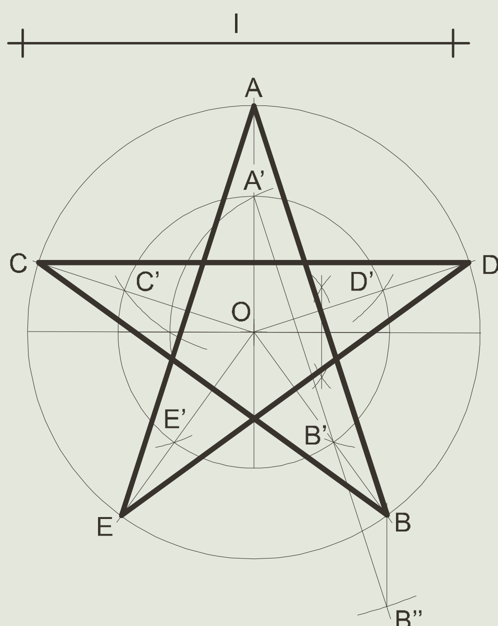
Ilustración 19 Animación

Sea *r* el radio de la circunferencia en la que se desea inscribir el heptágono estrellado [Ilustración 19 izquierda].

Se traza la circunferencia con radio *r* y se divide en 7 partes iguales mediante la aproximación de Durero. Se traza una poligonal uniendo los puntos de división de 2 en 2 a partir de *A*, necesitándose 2 vueltas para cerrarla y obtener el heptágono estrellado de segunda especie.

Si se unen los puntos de división de 3 en 3 a partir de *A*, se necesitarán 3 vueltas para cerrar el heptágono estrellado de tercera especie [Ilustración 19 derecha].

Aplicación



Para construir el pentágono estrellado conocido el lado, se puede dividir una circunferencia cualquiera en 5 partes iguales y aplicar una homotecia. En la figura se ha dividido la de radio *OA'* y se ha trazado el lado *A'B'*.

Se ha tomado como centro de homotecia *O* y se han trazado las alineaciones de los puntos de división *A'* y *B'*. Al superponer el lado pedido *A'B''* = *l* sobre *A'B'* y trasladarlo según el vector *A'A*, se sitúa en su posición definitiva *AB* y permite trazar la circunferencia circunscrita de radio *OA*. Una vez obtenidos los demás puntos de división *C, D, E* mediante sus alineaciones con *B', C', D'* y *O* se construye el polígono estrellado que resulta ser de segunda especie.

4. Construcción de polígonos regulares conocido el lado

4.1. Pentágono

El lado del pentágono regular es segmento áureo de su diagonal.

Sea *l* el lado del pentágono regular [Ilustración 20 derecha].

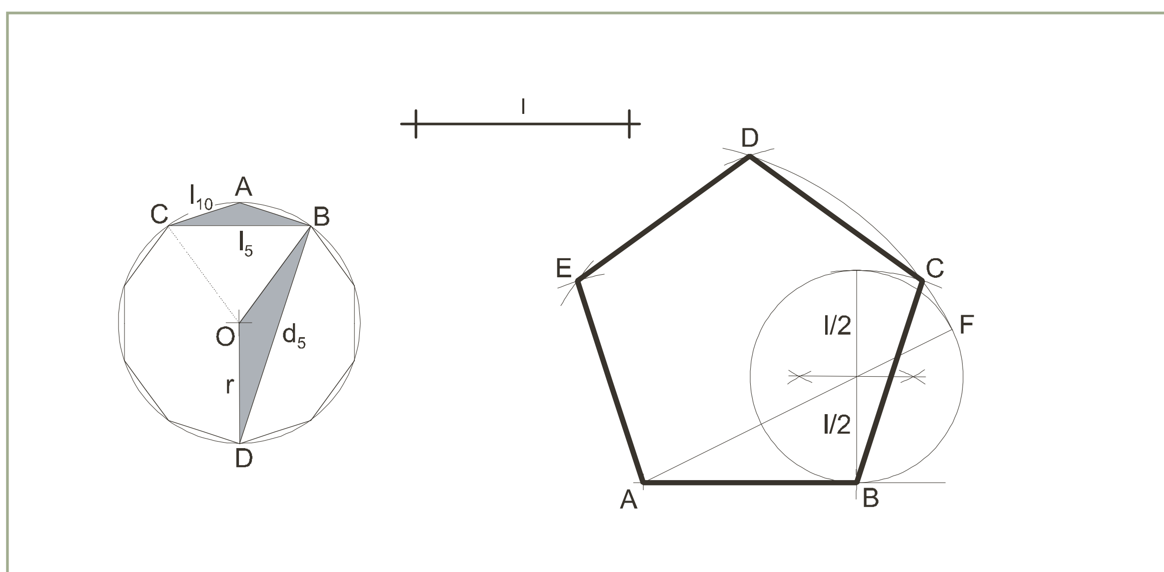


Ilustración 20 Animación

Se transporta el lado *l* sobre una semirrecta a partir de su origen *A*. Se halla el segmento áureo del lado *l* = *AB* que será la medida *AF* de la diagonal del pentágono.

El vértice superior *D* es el punto de corte de dos arcos de centros *A*, *B* y radio la diagonal *AF*. El vértice *C* se obtiene mediante dos arcos de centros *A*, *B* y radio la diagonal *AF* y el lado *l*. Análogamente se obtiene *E*.

En la Ilustración 21 izquierda aparece el decágono inscrito y dos triángulos *ABC* y *OBD*. Ambos son isósceles y semejantes ya que el ángulo *DOB* es la mitad del central *COB*, correspondiente al inscrito *CAB* y por tanto igual a él.

Así pues, se puede igualar la razón entre los lados a la de las bases para formar la proporción

$\frac{r}{l_{10}} = \frac{d_5}{l_5}$ y como l_{10} es segmento áureo de r, también lo será l_5 de d_5.

4.2. Octógono

Sea *l* el lado del octógono regular [Ilustración 21].

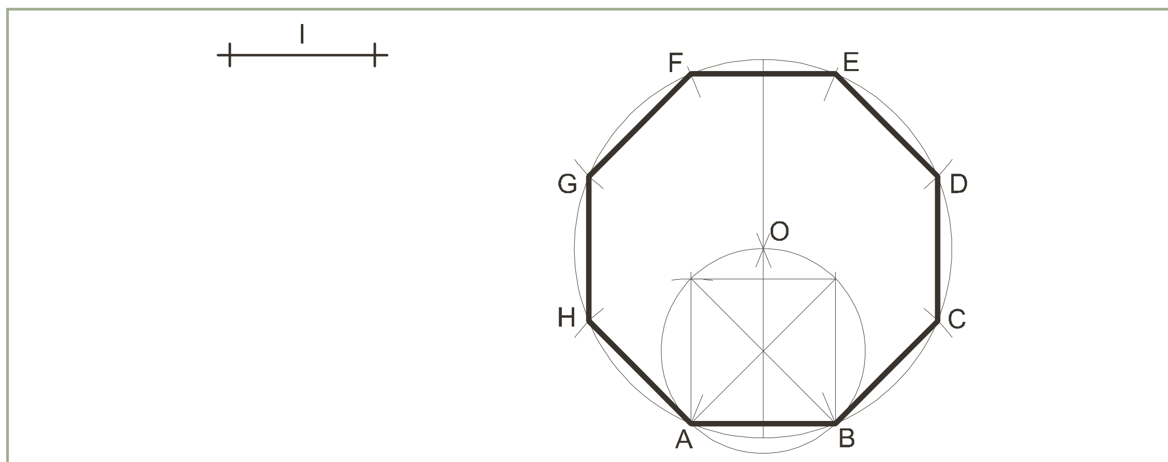


Ilustración 21 Animación

Se transporta el lado *l* sobre una semirrecta a partir de su origen *A*. Se construye el cuadrado de lado *l* = *AB* y su circunferencia circunscrita, cuyo centro es el punto de corte de las diagonales. La mediatriz de *AB* la corta en el centro *O* de la circunferencia circunscrita al octógono.

Los vértices *E*, *F* son los puntos diametralmente opuestos a *A*, *B*. Arcos de centros *A, B, E, F* y radio *l* determinan los demás vértices.

4.3. Decágono

Sea *l* el lado del decágono regular [Ilustración 22].

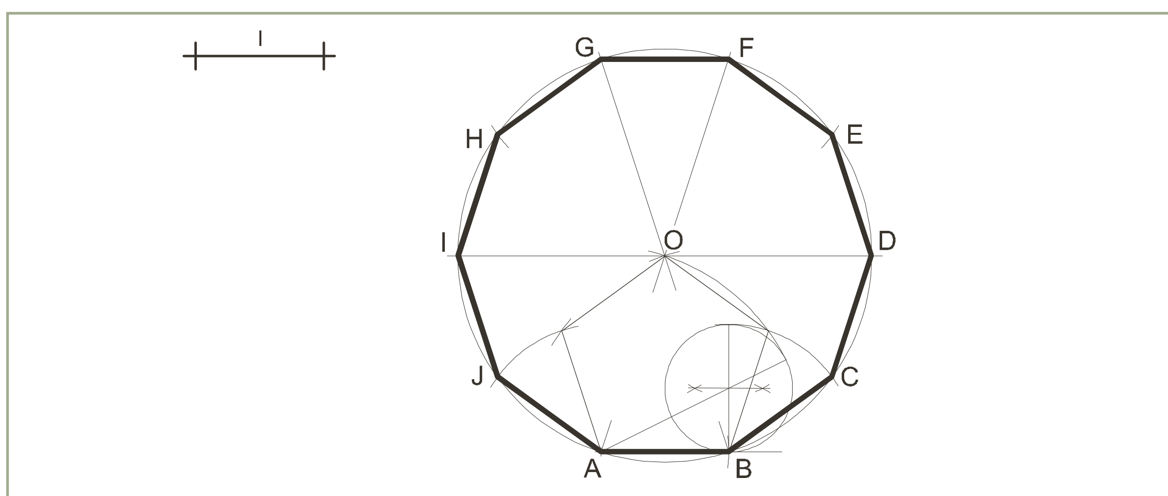
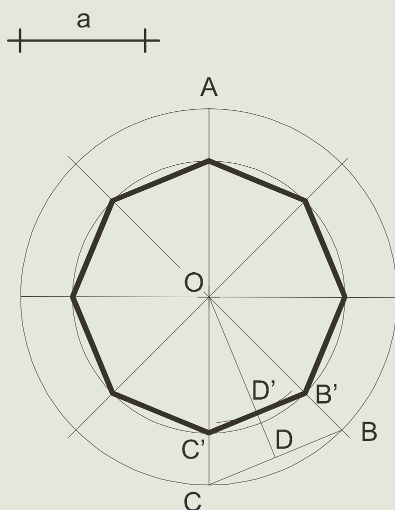


Ilustración 22 Animación

Se transporta el lado *l* sobre una semirrecta a partir de su origen *A*. Se construye el pentágono de lado *l* = *AB* cuyo vértice superior *O* es el centro de la circunferencia circunscrita al decágono.



Los vértices *F*, *G* son los puntos diametralmente opuestos a *A*, *B*. La paralela a *AB* por *O* corta a la circunferencia en los vértices *I*, *D*. Arcos de centros *A, B, F, G* y radio *l* determinan los demás vértices.



Aplicación

Para construir el octógono regular conocida la **apotema** *a*, se elige una circunferencia auxiliar de radio cualquiera *OA* y se divide en ocho partes iguales mediante dos diámetros perpendiculares y sus bisectrices. El lado *CB* del octógono regular inscrito en ella y homotético de la solución, tiene como apotema al segmento *OD* de la paralela a su diagonal *AB*. Un arco de centro *O* y radio *a* sitúa la apotema *OD'* sobre su homotética *OD*. Los puntos de división de la solución se obtienen mediante dicha homotecia de centro *O* y par de homólogos *D* y *D'*.

 **Recuerda**

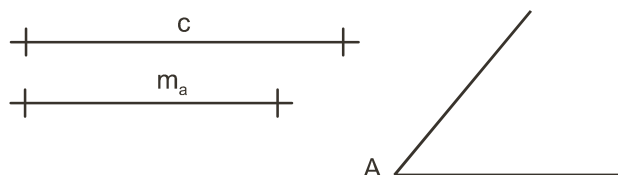
- ✓ La circunferencia circunscrita a un triángulo contiene a sus vértices y su centro es el punto de corte de las mediatrices.
- ✓ La circunferencia inscrita en un triángulo es tangente a sus lados, su centro es el punto de corte de las bisectrices y su radio es la distancia de éste a cualquier lado.
- ✓ El ortocentro es el punto de corte de las tres alturas de un triángulo.
- ✓ Las medianas de un triángulo, que son las rectas que unen un vértice con el punto medio del lado opuesto, se cortan en el baricentro. Dividida cada mediana en tres partes, el baricentro se encuentra situado a 2/3 del vértice y a 1/3 del punto medio del lado opuesto
- ✓ Apotema de un polígono regular es la distancia del centro al punto medio del lado y es el radio de la circunferencia inscrita.
- ✓ Los polígonos regulares pueden construirse a partir del lado, del radio de la circunferencia circunscrita, de la apotema, de una diagonal,…
- ✓ Sólo admiten construcción exacta los polígonos de cierto número de lados, por ejemplo, los de 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 17, 20,…
- ✓ El lado del hexágono inscrito es igual al radio de la circunferencia.
- ✓ El lado del decágono regular inscrito es segmento áureo del radio.
- ✓ El lado del pentágono regular inscrito es la hipotenusa de un triángulo rectángulo en el que los catetos son el lado del decágono regular inscrito y el radio.
- ✓ El lado del pentágono regular es segmento áureo de su diagonal.



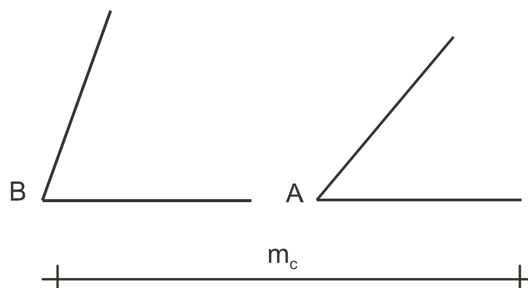


Actividades

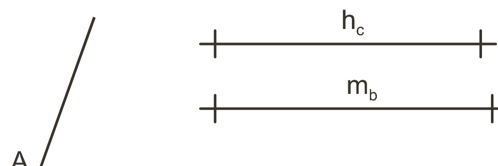
1. Construir el triángulo *ABC* conocido un ángulo *A*, uno de los lados que lo forman *c* y su mediana m_a.

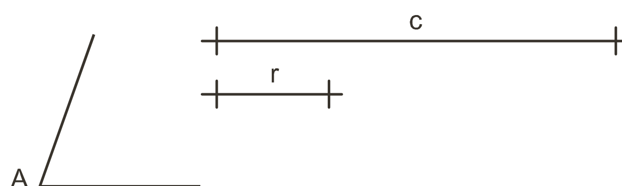


2. Construir el triángulo *ABC* conocidos dos ángulos *A*, *B* y la mediana del lado compartido m_c.



3. Construir el triángulo *ABC* conocido el ángulo *A*, la mediana m_b y la altura h_c.



4. Construir el triángulo *ABC* conocido un ángulo *A*, uno de los lados que lo forman *c* y el radio de la circunferencia inscrita *r*.	
5. Construir el pentágono regular conocida la diagonal *d*.	
6. Construir el heptágono regular estrellado de 2ª especie conocido el lado *l*.	

3 Transformaciones geométricas

En esta Unidad se presentan dos transformaciones que producen cambios en la forma de las figuras: la inversión, objeto de estudio de la geometría métrica al igual que los movimientos y la homotecia; la homología, de tipo proyectivo. Se presenta también la aplicación de la inversión en la construcción de una circunferencia con tres condiciones del tipo: ser tangente a una recta, ser tangente a una circunferencia, pasar por un punto; que completan otros casos ya resueltos mediante lugares geométricos, homotecia y potencia.

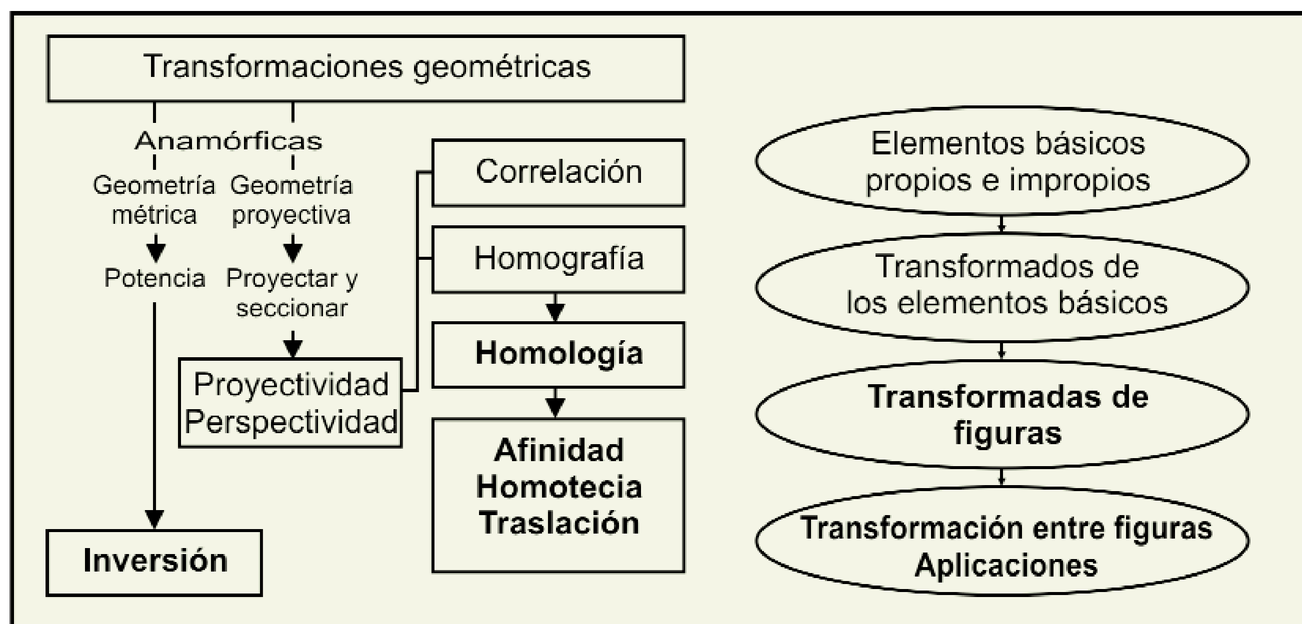
Entre la sombra del suelo y su reflejo en la pared existe una homología cuyo eje es la esquina. (Modificación de la fotografía titulada Sombras en el Centro Gallego de Arte Contemporáneo, Santiago de Compostela, La Coruña, del Banco de imágenes del ISFTIC).

La homología tiene en este mismo curso aplicaciones en la construcción de curvas cónicas y en la realización de proyecciones, abatimientos o secciones de cuerpos por planos en los sistemas de representación, que se presentan en las unidades correspondientes.

En las ilustraciones de las construcciones que constan de varias fases, se introducen colores distintos para las líneas y nomenclatura de cada una de ellas, al efecto de facilitar su lectura. Cuando los trazados necesarios para completarlas son numerosos, se simplifican mediante el empleo de la escuadra y el cartabón. Por ello se dibujan las tangentes comunes a dos circunferencias colocando el borde de la escuadra tangente a ellas, y girándola después 90º sobre su apoyo en el cartabón para trazar radios perpendiculares que determinen los puntos de tangencia.

Con el estudio de esta Unidad nos proponemos alcanzar los siguientes **objetivos**:

1. Obtener las transformadas de figuras formadas por arcos de circunferencia y segmentos mediante homología o inversión.
2. Trazar circunferencias con tres condiciones del tipo: ser tangentes a rectas o circunferencias o pasar por puntos, mediante inversión.
3. Estructurar una construcción en fases.
4. Utilizar con destreza las plantillas para simplificar el trazado de tangentes y mediatrices, como modo de abordar la progresiva complejidad de las construcciones.



ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. Inversión

1.1. Inversión en el plano

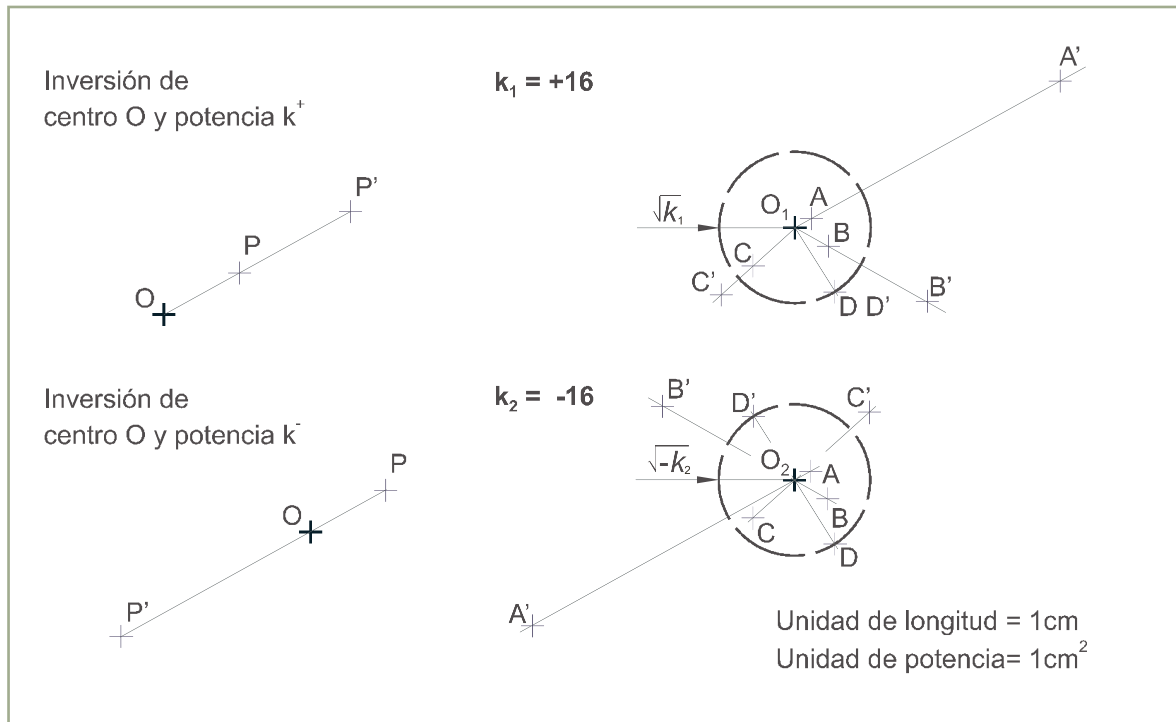


Ilustración 1

La inversión transforma cada punto *P* de un plano en un punto *P'* mediante un segmento $\overline{OP'}$ alineado con $\overline{OP}$, donde ***O*** es un punto fijo llamado **centro de inversión** y el producto $\overline{OP} \times \overline{OP'} = k$, siendo ***k*** un número real distinto de cero llamado **potencia de la inversión**.

La **inversión** queda definida dando su centro *O* y su potencia *k*. Si *k* es positiva *P* y *P'* quedan del mismo lado de *O*, y si *k* es negativa el centro *O* estará situado entre ellos [Ilustración 1 izquierda].

En la ilustración 1 derecha se han definido dos inversiones de centros O_1, O_2 y potencias k_1 = +16, k_2 = -16 y se han obtenido los inversos *A', B', C', D'* de los puntos *A, B, C, D* situados a 1, 2, 3, 4 unidades del centro de inversión. Para la primera inversión será +16 = 1×16 = 2 × 8 = 3 × 5,33 = 4 × 4 , y para la segunda –16 = 1 x (–16) = 2 x (–8) = 3 x (–5,33) = 4 x (–4) ya que las distancias se toman en sentidos contrarios respecto de O_2.

Se observa que el punto *D* situado a distancia $\sqrt{k_1} = \sqrt{16} = 4$ o $\sqrt{-k_2} = \sqrt{16} = 4$ es doble o simétrico de su homólogo respectivamente. Además, a puntos situados dentro de la circunferencia de radio $\sqrt{k_1}$ o $\sqrt{-k_2}$ corresponden otros situados fuera de ella.

1.2. Elementos dobles

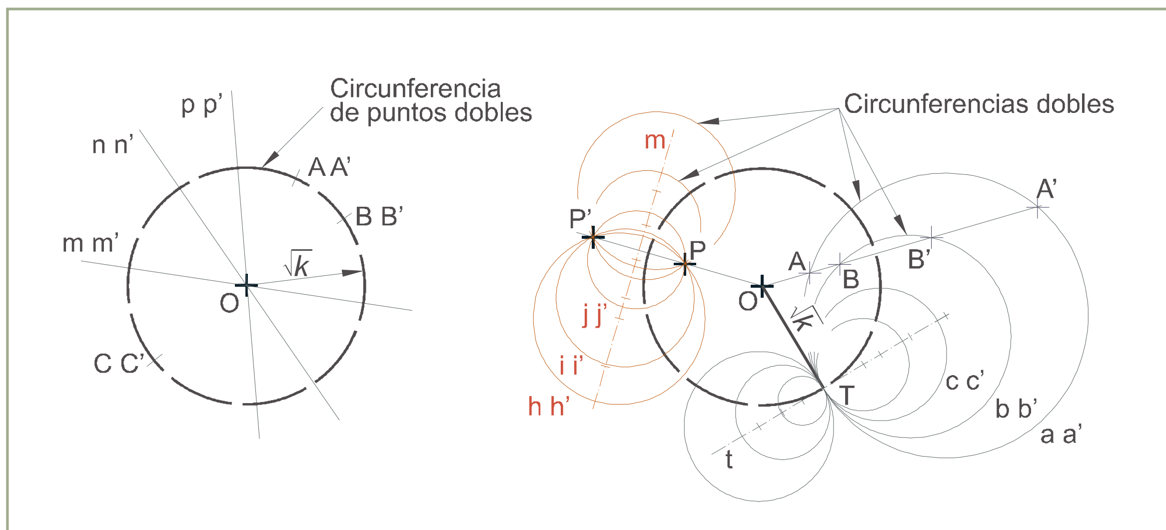


Ilustración 2

Cuando la potencia es positiva, son elementos dobles los puntos situados a una distancia del centro igual a $\sqrt{k}$, que definen la llamada **circunferencia de puntos dobles** [Ilustración 2 izquierda]. También son figuras dobles, sin serlo sus puntos, las rectas que pasan por *O* y las circunferencias respecto de las cuales el centro *O* es un punto exterior que tiene una potencia igual a la de la inversión *k* [Ilustración 2 derecha]. Éstas son **circunferencias ortogonales** a la de puntos dobles, es decir, sus radios en el punto de corte son perpendiculares a los de ésta.

Las circunferencias dobles pueden trazarse:

- Tangentes a cualquiera de los radios $\sqrt{k}$ de la circunferencia de puntos dobles en su extremo. Dichos radios son segmentos representativos de la potencia del centro de inversión *O* respecto de las circunferencias dobles. Elegido un radio *OT,* sus centros están en la tangente *t*.

- Pasando por dos puntos homólogos. Por ejemplo, para los inversos *P* y *P'* los centros están en la mediatriz *m*.

Cuando la potencia es negativa no existen puntos dobles, pero los puntos diametralmente opuestos en la circunferencia de radio $\sqrt{-k}$ son inversos, por lo que dicha figura es doble [Ilustración 3 izquierda]. También son figuras dobles, sin serlo sus puntos, las rectas que pasan por *O* y las circunferencias respecto de las cuales el centro *O* es un punto interior que tiene una potencia igual a la de la inversión *k* [Ilustración 3 derecha].

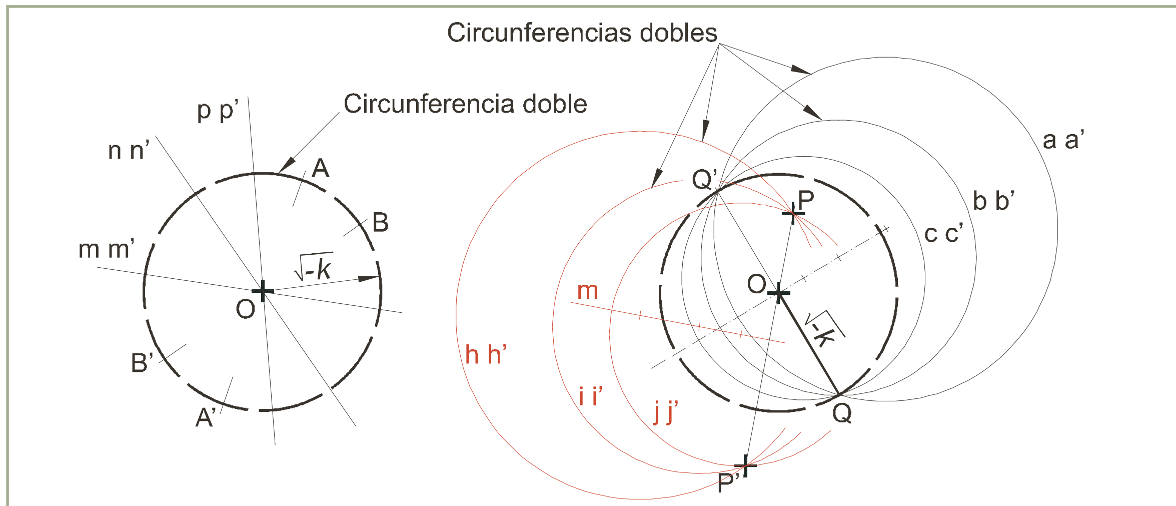


Ilustración 3

Las circunferencias dobles pueden trazarse pasando por dos puntos homólogos cualquiera como *P, P'* o como *Q, Q'*, que al estar diametralmente opuestos en la circunferencia de radio $\sqrt{-k}$, son extremos de los segmentos representativos *OQ, OQ'* de la potencia *k* del centro de inversión *O*.

1.3. Inverso de un punto, conocido el centro y la raíz cuadrada de la potencia

Sea *A* el punto cuyo inverso deseamos construir definida la inversión mediante el centro *O* y la raíz cuadrada de la potencia positiva *k* [Ilustración 4].

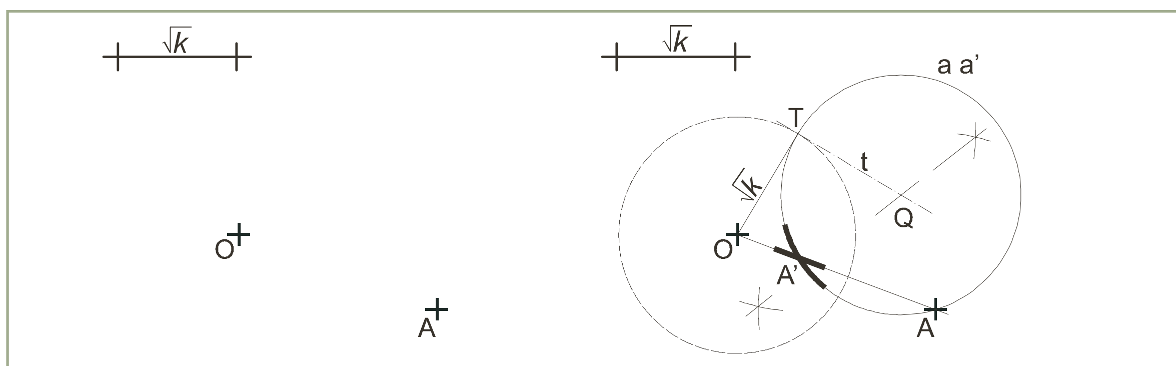


Ilustración 4

Se traza la circunferencia de puntos dobles con radio $\sqrt{k}$ y centro *O*, y su tangente *t* en un punto cualquiera *T*. La mediatriz del segmento $\overline{AT}$ corta a *t* en el centro *Q* de la circunferencia doble *a*. La secante *OA* determina sobre ella el inverso *A'*.

Si la potencia es negativa [lustración 5] vendrá definida por el segmento $\sqrt{-k}$, cuyo cuadrado será la potencia de la inversión *k* y se procederá así:

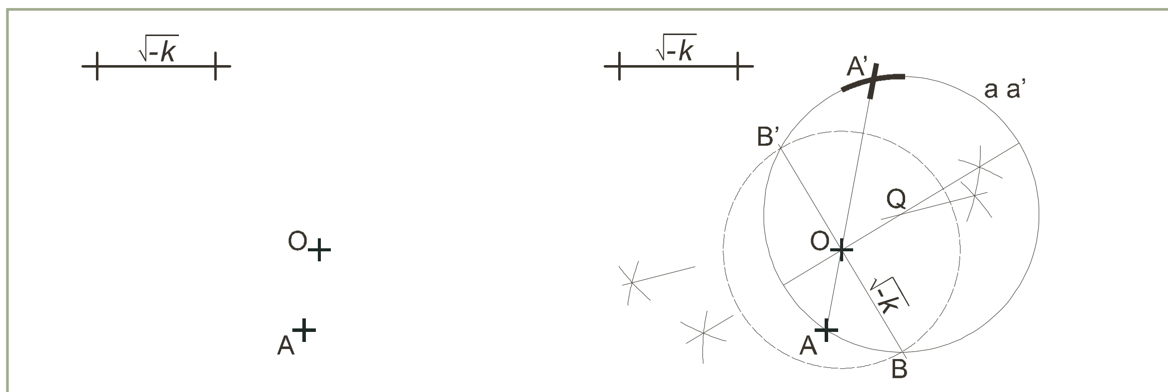


Ilustración 5

Se traza la circunferencia de radio $\sqrt{-k}$ y centro *O*. Se eligen dos puntos diametralmente opuestos y por tanto inversos *B*, *B'*. La circunferencia *a* que pasa por *B*, *B'* y *A* es doble. La secante *AO* determina sobre ella el inverso *A'*.

1.4. Inverso de un punto, conocido el centro y un par de puntos inversos

Sea *B* el punto cuyo inverso deseamos construir, definida la inversión mediante el centro *O* y un par de puntos inversos *A*, *A'* [Ilustración 6].

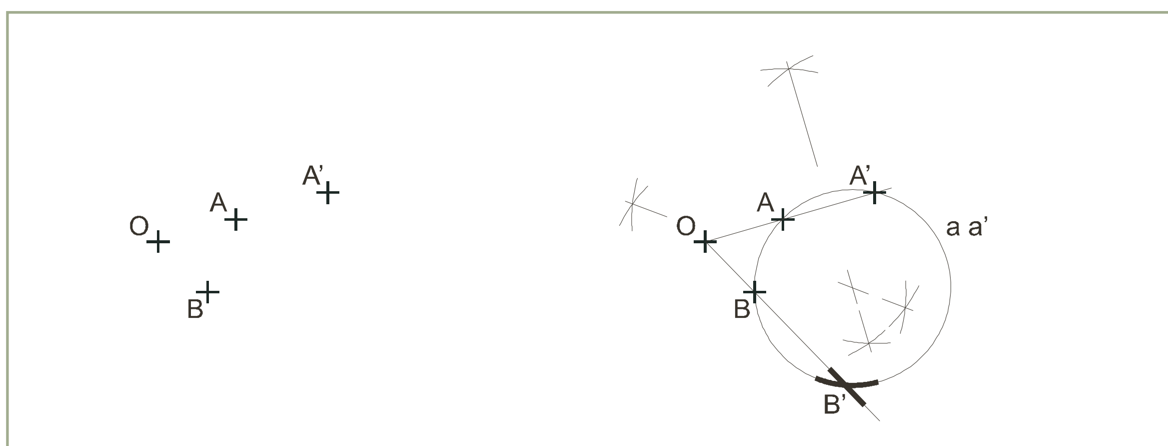


Ilustración 6

Se traza la circunferencia *a* que pasa por *A*, *A'* y *B* que es doble. La secante *OB* determina sobre ella el inverso *B'*.

Si la potencia es negativa se procede análogamente [Ilustración 7].

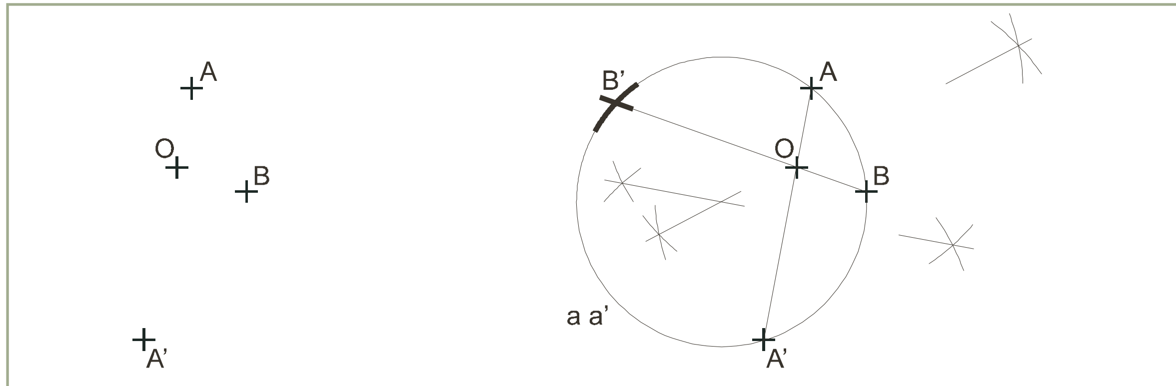


Ilustración 7

1.5. Figura inversa de una recta que no pasa por el centro de inversión

La figura inversa de una recta que no pasa por el centro de inversión es una circunferencia que sí pasa por él.

Sea *r* la recta cuya figura inversa se desea construir, definida la inversión mediante el centro *O* y la raíz cuadrada de la potencia positiva *k* [Ilustración 8].

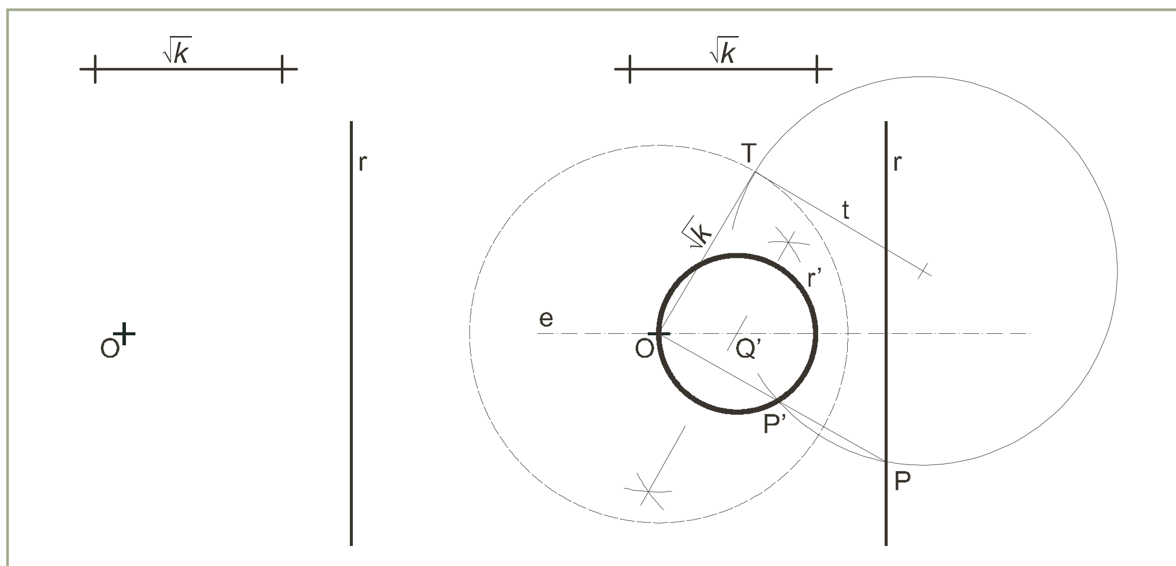


Ilustración 8

Se traza la circunferencia de puntos dobles con radio $\sqrt{k}$ y centro *O*, y su tangente *t* en un punto cualquiera *T*. Una circunferencia doble cualquiera, de las que tienen su centro en *t* y pasan por *T,* corta a la recta *r* en *P*. La secante *OP* determina sobre ella el inverso *P'*. La mediatriz de *OP'* corta al eje de simetría *e* en el centro *Q'* de la circunferencia inversa de la recta *r*.

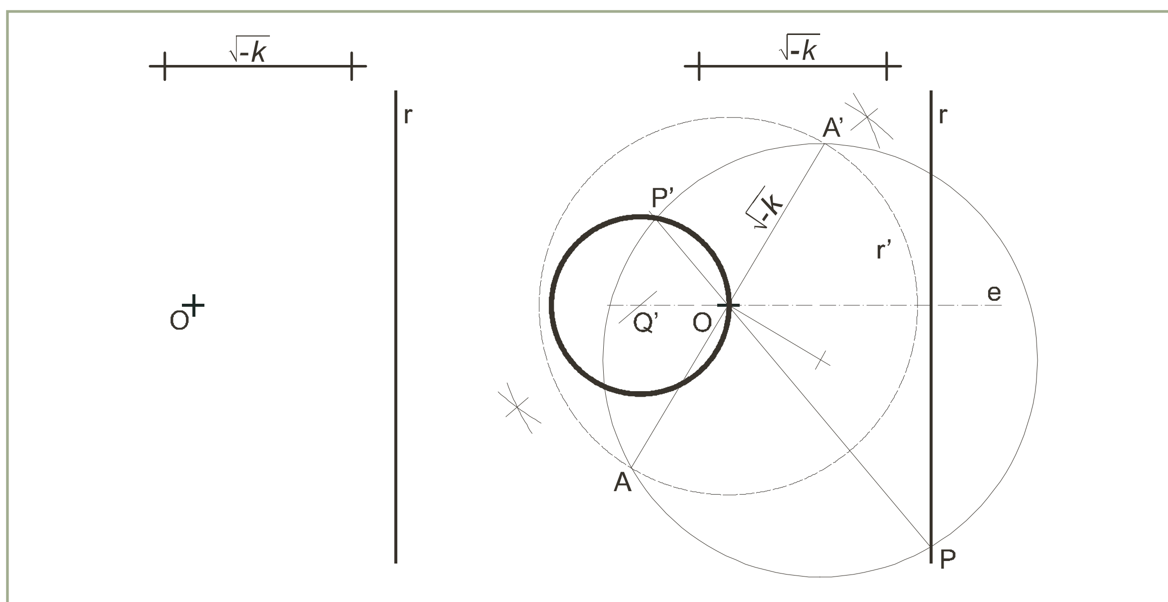
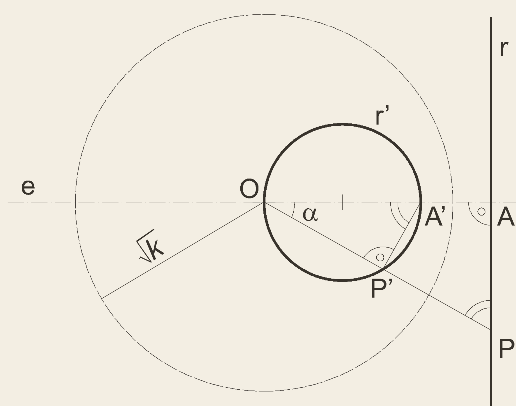


Ilustración 9

Si la potencia es negativa [Ilustración 9] se traza la circunferencia de radio $\sqrt{-k}$, se elige un punto cualquiera *A*, se obtiene su inverso *A'* y se traza una de las circunferencias dobles que pasan por ellos. Ésta corta a la recta *r* en *P,* y la secante *OP* determina sobre ella su inverso *P'*. La mediatriz de *OP'* corta al eje de simetría *e* en el centro *Q'* de la circunferencia inversa de la recta *r*.



Para justificar que la figura inversa de la recta *r* es la circunferencia *r'* se toma como referencia la pareja de puntos inversos *A, A'* situada en el eje de simetría *e*, perpendicular a *r*.

Sea *P* un punto genérico de la recta *r* y *P'* su inverso, la potencia de la inversión será

$k = OA \times OA' = OP \times OP'$, de donde $\dfrac{OA}{OP'} = \dfrac{OP}{OA'}$,

que es una proporción entre los lados de los triángulos *OAP* y *OP'A'*, que comprenden el ángulo común α. Dichos triángulos serán así proporcionales y su ángulo en *P'* igual al de *A* y por tanto recto.

Siendo *P'* el inverso del genérico *P*, su lugar geométrico será el arco capaz de 90º sobre el segmento *OA'*, describiendo así la circunferencia de diámetro *OA'*.

1.6. Figura inversa de una circunferencia que pasa por el centro de inversión

La figura inversa de una circunferencia que pasa por el centro de inversión es una recta que no pasa por él.

Sea *c* la circunferencia cuya figura inversa se desea construir, definida la inversión mediante el centro *O* y la raíz cuadrada de la potencia positiva *k* [Ilustración 10].

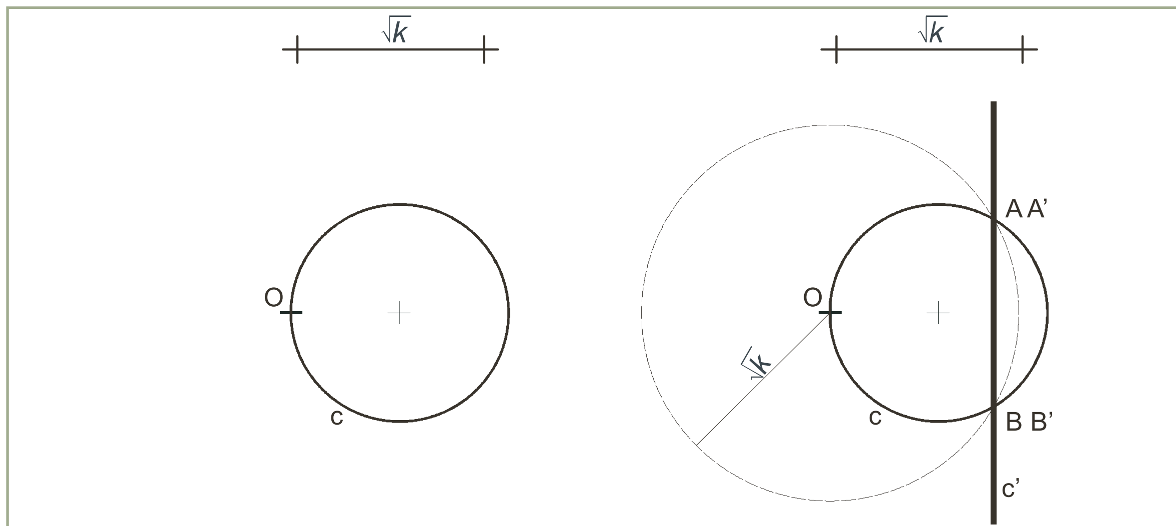


Ilustración 10

Se traza la circunferencia de puntos dobles con radio $\sqrt{k}$ y centro *O*. Los puntos de corte *A*, *B* de ésta con la circunferencia *c* son dobles. La recta *c'* inversa de la circunferencia *c* pasa por *A* y *B*.

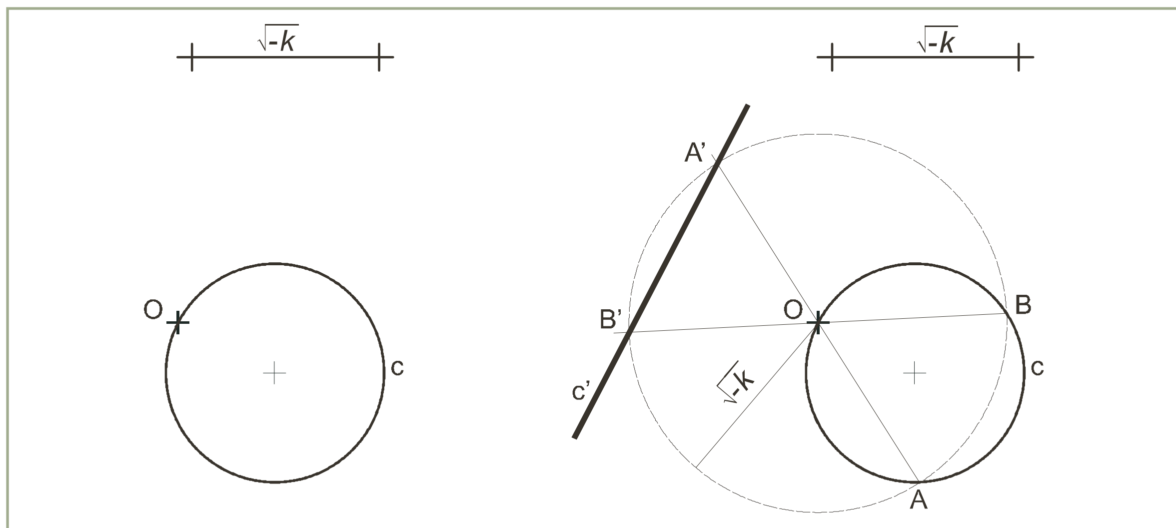


Ilustración 11

Si la potencia es negativa [Ilustración 11] se traza la circunferencia de radio $\sqrt{-k}$ y se obtienen los inversos *A'*, *B'* de los puntos de corte *A*, *B* de ésta con *c*. La recta *c'* inversa de la circunferencia *c* pasa por *A'* y *B'*.

1.7. Figura inversa de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión

La figura inversa de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión es otra circunferencia que tampoco pasa por él. El centro de la homotecia que se puede definir entre ellas coincide con el de inversión.

Sea *c* la circunferencia cuya figura inversa se desea construir, definida la inversión mediante el centro *O* y la raíz cuadrada de la potencia positiva *k* [Ilustración 12].

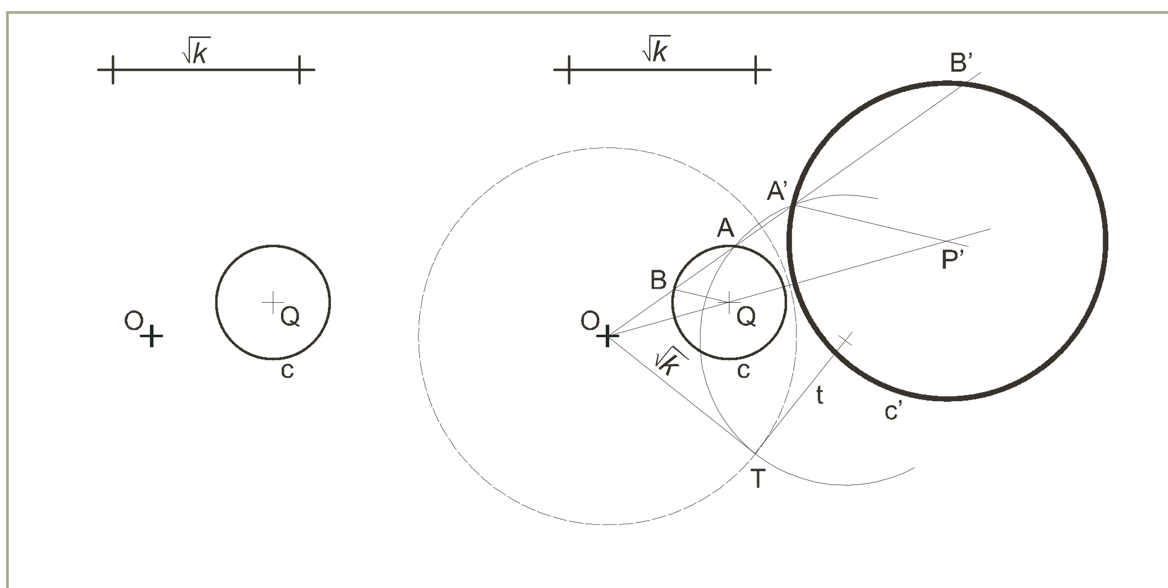


Ilustración 12

Se traza la circunferencia de puntos dobles con radio $\sqrt{k}$ y centro *O*, y su tangente *t* en un punto cualquiera *T*. Una circunferencia doble cualquiera, de las que tienen su centro en *t* y pasan por *T,* corta a la circunferencia *c* en *A*. La secante *OA* determina sobre ella el inverso *A'* y corta a *c* en *B*. Los puntos *B* y *A'* de dicha secante son homotéticos, como también lo es el radio *BQ* respecto de *A'P',* que se traza paralelo a él. La circunferencia de radio *A'P'* y centro *P'* es la figura inversa de *c*.

Si la potencia es negativa [Ilustración 13], se traza la circunferencia de radio $\sqrt{-k}$, se elige un punto cualquiera *D*, se obtiene su inverso *D'* y se traza una de las circunferencias dobles que pasan por ellos y que corta a la circunferencia *c* en *A*. La secante *OA* determina sobre ella el inverso *A'* y corta a *c* en *B*. Los puntos *B* y *A'* de dicha secante son homotéticos, como también lo es el radio *BQ* respecto de *A'P',* que se traza paralelo a él pero en sentido contrario. La circunferencia de radio *A'P'* y centro *P'* es la figura inversa de *c*.

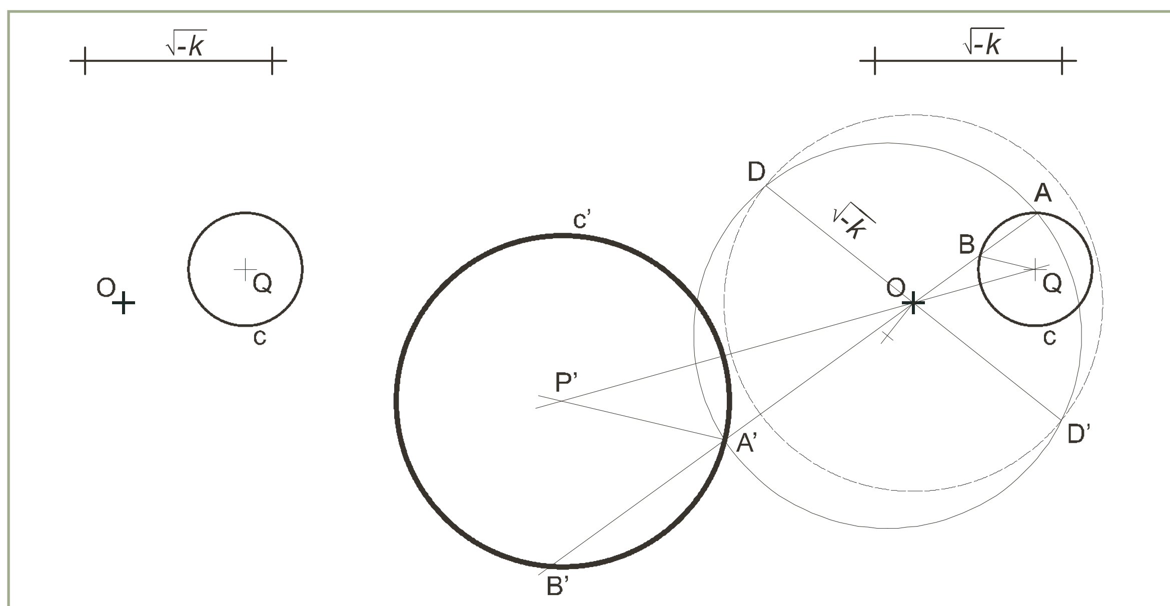
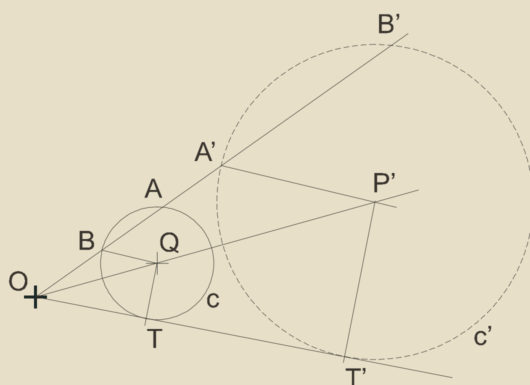


Ilustración 13



Para justificar la construcción, se toma de la Ilustración 12 la circunferencia *c* y la secante trazada desde *O*, que la corta en *A* y *B*. Sean sus inversos *A'* y *B'*; de la definición de inversión se deduce:

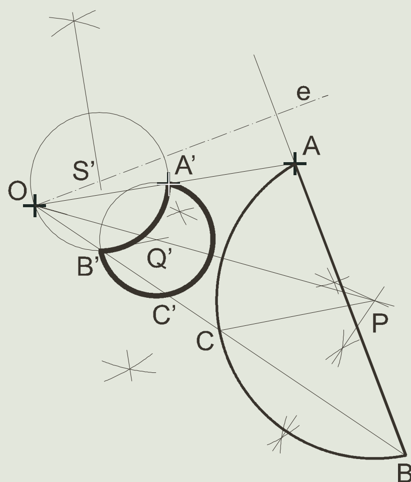
$k = OA \times OA' = OB \times OB'$, de donde $\frac{OA'}{OB} = \frac{OB'}{OA}$, que

nos indica que *B'* es homólogo de *A* y *A'* homólogo de *B* en la homotecia de centro *O*. Pero siendo *A* y *B* puntos de la circunferencia *c*, sus homólogos *B'* y *A'* estarán en la circunferencia *c'*, homotética de *c*.

Es decir, la figura inversa de la circunferencia *c* que no pasa por el centro de inversión *O*, es la circunferencia *c'*, homóloga de ella en la homotecia del mismo centro. Sin embargo, dos puntos inversos como *A*, *A'* no son homotéticos, con la excepción de los puntos *T*, *T'* determinados por cada una de las tangentes trazadas desde *O*.

Los centros *Q* y *P'* no son inversos, pero sí homotéticos.

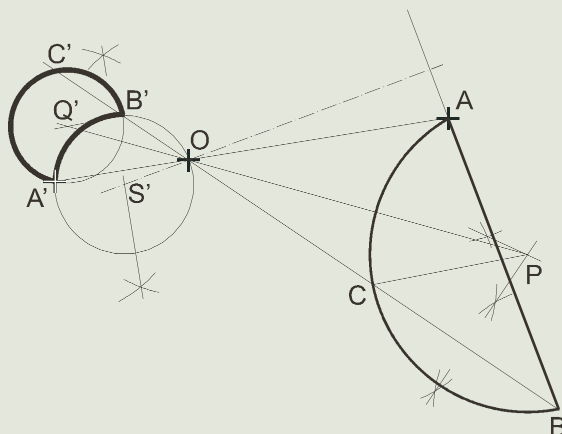
Aplicación



Se desea construir la figura homóloga de la formada por el segmento $\overline{AB}$ y el arco *BCA* en la inversión de centro *O*, conocidos dos puntos inversos *A*, *A'*.

La figura inversa de la recta *AB*, que no pasa por *O* es la circunferencia que pasa por *O* y por *A'*, cuyo centro *S'* está situado en el eje de simetría *e*, que es la perpendicular a dicha recta por *O*. La mediatriz de *OA'* corta a *e* en dicho centro *S'*.

El homólogo *B'* de *B* es el punto de corte de la recta *OB* con la circunferencia de centro *S'*. De los dos arcos *A'B'* posibles, el inverso del segmento $\overline{AB}$ es el que no contiene al centro *O*, por ser éste el homólogo del punto del infinito de la recta *AB*.



Mediante las mediatrices de los arcos *AC*, *CB,* se obtiene el centro *P* del arco *AB*. La figura inversa de la circunferencia que contiene al arco *AB* es otra circunferencia cuyo centro está en la recta *OP* y que pasa por el punto *B'*, que es homotético de *C* al ser *BB'* inversos. El radio *B'Q'* paralelo al *CP* determina su centro *Q'*. El arco *A'C'B'* es el inverso del *ACB*.

Si la potencia de la inversión fuera negativa, manteniéndose igual el resto de los datos, el inverso *A'* estaría situado en posición simétrica respecto a *O* de la que antes ocupaba.

La construcción es similar y la solución es la figura simétrica respecto a *O* de la correspondiente al caso de potencia positiva.

1.8. Circunferencias tangentes a otra y a una recta, que pasan por un punto

Las figuras tangentes dan lugar, al ser transformadas mediante inversión, a otras figuras también tangentes, y los puntos de tangencia entre ellas son inversos. Esta propiedad facilita el uso de la inversión en la construcción de una circunferencia con tres condiciones: tangente a rectas o circunferencias, o pasando por puntos, en aquellos casos que no admiten otros métodos.

Sea *c* la circunferencia, *a* la recta y *A* el punto [Ilustración 14].

Ilustración 14

Uno de los procedimientos posibles para realizar esta construcción consiste en definir una inversión que transforme la recta *a* en la circunferencia *c* = *a'*, ya que así la solución será una circunferencia doble *s* = *s'*, al ser inversos los puntos de tangencia *E, E'*.

El centro *O* será uno de los puntos de corte del eje de simetría *e* con la circunferencia, dependiendo de su elección la obtención de una u otra solución. Se obtiene el inverso *A'* de *A* en el punto de corte de la circunferencia doble *m* = *m'* que pasa por *B*, *B'* y *A* con la secante *OA*.

Cualquier circunferencia que pase por *A*, *A'* será doble y si además es tangente a la recta *a* (o a la circunferencia *c*) será una solución. Se halla [Ilustración 14 en rojo] mediante potencia trazando el eje radical *AA'*, que corta a la recta *a* en *C*. La tangente *CD* a la circunferencia *m* es el segmento representativo de la potencia del punto *C* respecto del haz que pasa por *A*, *A'*. Llevada sobre la recta *a*, a partir de *C*, mediante el arco *DE* determina el punto de tangencia *E* con la circunferencia *s* del haz, que es solución. Su centro *Q* es el punto de corte de las mediatrices de las cuerdas *EA* y *AA*'

Las demás soluciones se obtienen llevando *E* en sentido contrario respecto a *C*, o eligiendo *B'* como centro de inversión.

1.9. Circunferencias tangentes a otras dos que pasan por un punto

Sean *a, b* las circunferencias y *A* el punto [Ilustración 15].

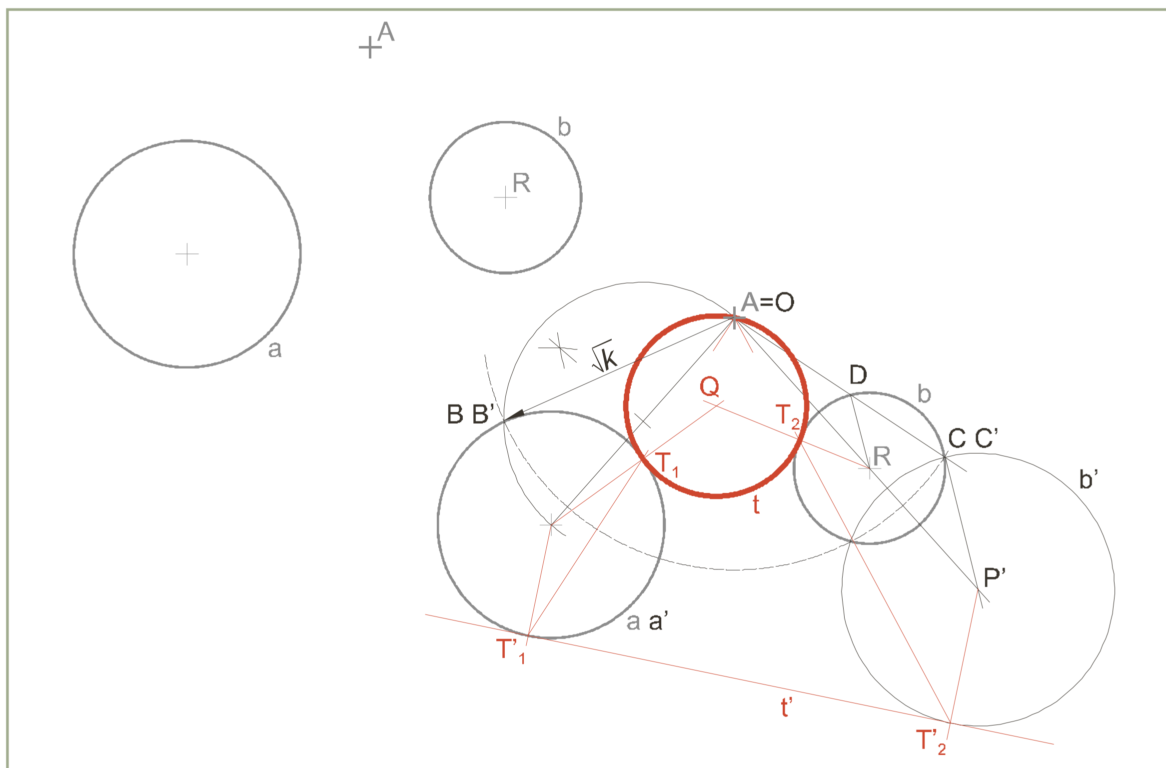


Ilustración 15

Uno de los procedimientos posibles para realizar esta construcción consiste en definir una inversión de centro *O* = *A* que transforme la circunferencia *a* = *a'* en sí misma y a *b* en otra circunferencia *b'*. La circunferencia inversa de una recta tangente común a *b'* y *a'* será tangente a *b* y *a*, además de pasar por *O* = *A,* y por tanto solución.

La tangente a la circunferencia doble *a* = *a'* desde *O* es el radio $\sqrt{k} = \overline{OB} = \overline{OB}'$ de la circunferencia de puntos dobles (de trazos). Ésta corta a la circunferencia *b* en el punto doble *C* = *C'*. En la secante *ODCC', C'* es homotético de *D* y el radio *C'P'* paralelo a *DR* determina sobre la recta *AR* el centro *P'* de la inversa *b'* de *b*.

Se traza [Ilustración 15 en rojo] una recta *t'* tangente común a las circunferencias *a'*, *b'* y se determinan los puntos de tangencia T'_1, T'_2.

Se hallan los inversos T_1, T_2 de T'_1, T'_2 mediante las secantes OT'_1, OT'_2. La circunferencia *t* que pasa por T_1, T_2 y *O* es solución. Las otras tres soluciones posibles son las circunferencias inversas de las demás rectas tangentes comunes a *b'* y *a'*.

1.10. Circunferencias tangentes a otras dos y a una recta mediante reducción

Mediante una modificación de las condiciones esta construcción se reduce a la del “trazado de las circunferencias tangentes a otra *e* y a una recta *d* que pasan por un punto *C*, ya que los centros de las soluciones coinciden [Ilustración 16 arriba].

Sean *b, c* las circunferencias, *r* el radio de la menor de ellas *c*, y *a* la recta [Ilustración 16].

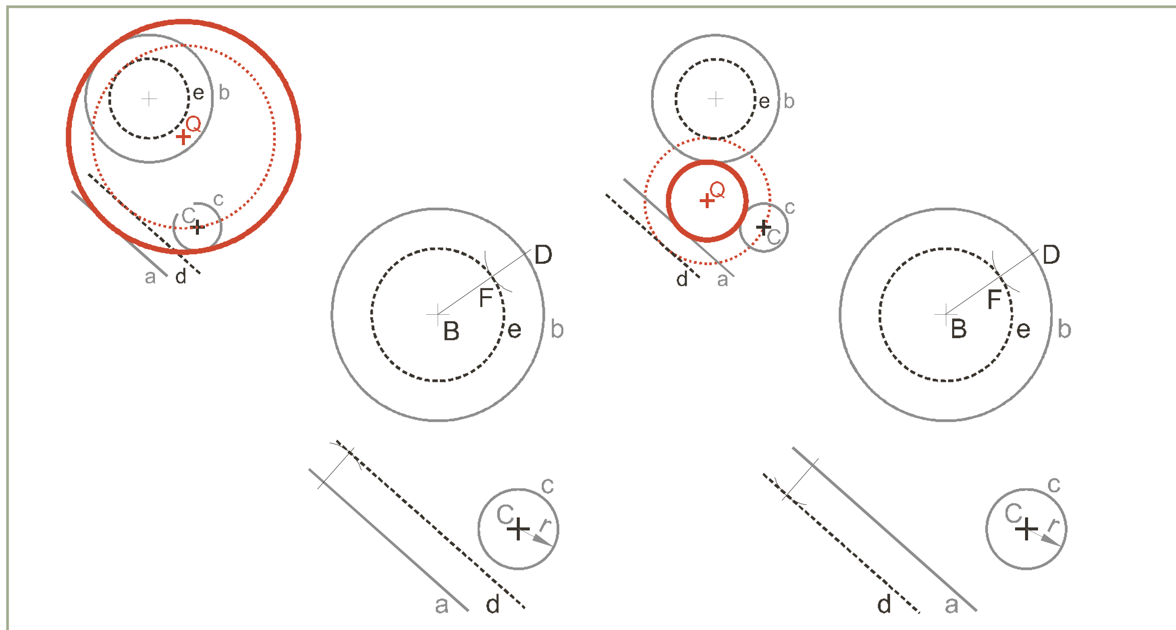


Ilustración 16

Se resta el radio $r = \overline{DF}$ al radio *BD* de la circunferencia *b* sustituyéndola por *e*. La circunferencia *c* se sustituye por su centro *C* y la recta *a* por una de sus paralelas *d* a la distancia *r*. Según la paralela elegida se obtendrán las condiciones para obtener el centro *Q* de la circunferencia tangente interior [Ilustración 16 izquierda] o exterior [Ilustración 16 derecha].

Podrían obtenerse otras dos circunferencias solución, que serían tangentes interiores a una y exteriores a la otra, sumando, en lugar de restar, el radio *r* al de la circunferencia *b,* y manteniendo las demás condiciones.

1.11. Circunferencias tangentes a otras tres mediante reducción

Mediante una modificación de las condiciones, esta construcción (problema de Apolonio) se reduce a la del “trazado de las circunferencias tangentes a otras dos *d, e* y que pasan por un punto *C*”, ya que los centros de las soluciones coinciden [Ilustración 17 arriba].

Sean *a, b, c* las circunferencias y *r* el radio de la menor de ellas *c* [Ilustración 17].

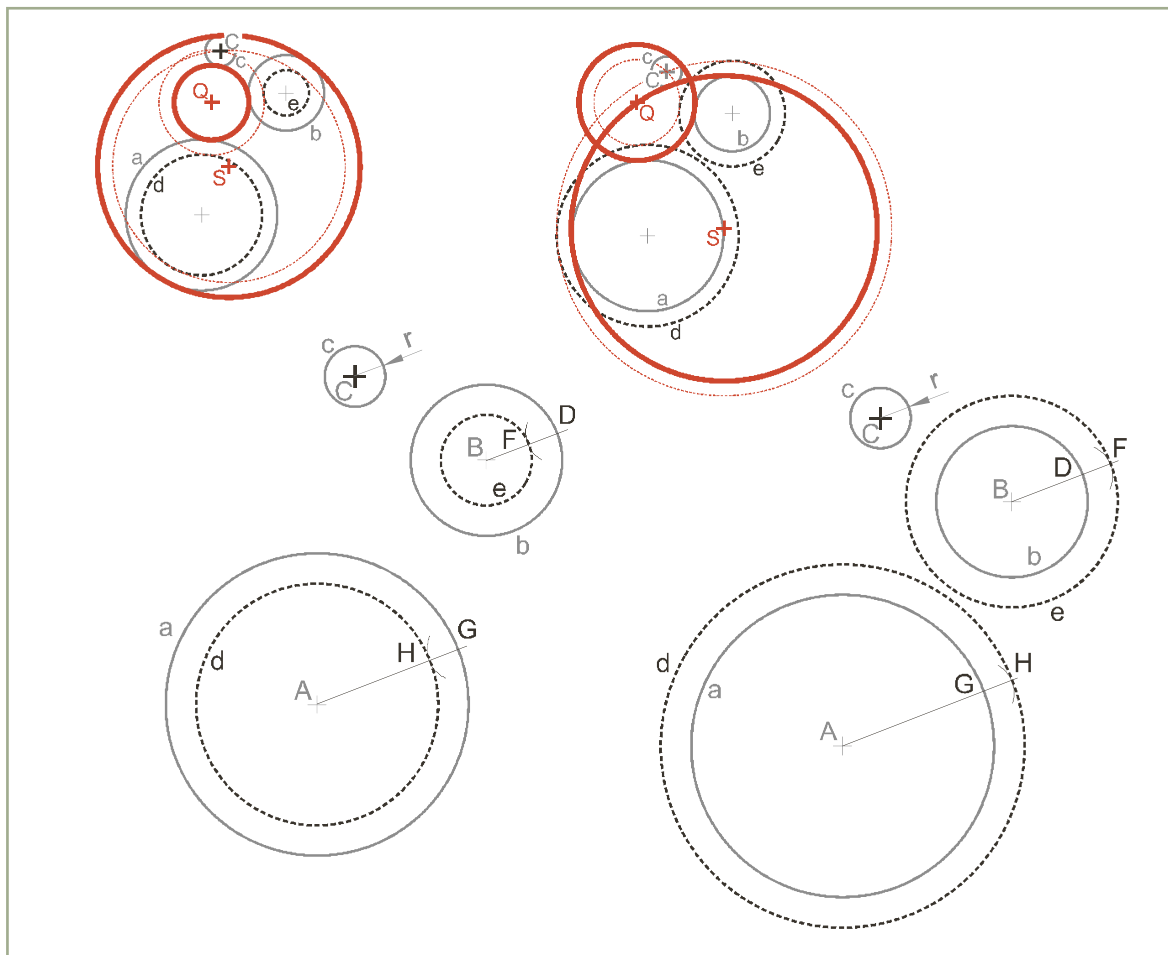


Ilustración 17

Se resta el radio $r = \overline{DF} = \overline{GH}$ al radio *BD* y *AG* de las circunferencias *a* y *b* sustituyéndolas por *d* y *e* [Ilustración 17 izquierda]. La circunferencia *c* se sustituye por su centro *C*. Se obtienen así las condiciones para obtener los centros *Q, S* de las circunferencias que son tangentes exteriores o interiores a las tres.

Si se suma el radio $r = \overline{DF} = \overline{GH}$ al radio *BD* y *AG* de las circunferencias *a* y *b* sustituyéndolas por *d* y *e,* se obtendrán las condiciones para obtener el centro *Q* de la circunferencia tangente exterior a *a y b* pero interior a *c*, o de la interior a *a y b,* pero exterior a *c* [Ilustración 17 derecha].

Las condiciones que permitirían obtener el centro de las demás circunferencias tangentes se obtendrían sumando el radio *r* de la menor *c* a una de las mayores *a* ó *b* y restándoselo a la otra.

2. Homografías especiales

2.1. Proyección y sección. Elementos impropios

La representación de las figuras geométricas y los objetos del diseño arquitectónico e industrial se realiza mediante su proyección en el plano. **Proyectar y seccionar son las operaciones fundamentales de la geometría proyectiva** que estudia las relaciones entre las figuras geométricas, sus proyecciones y secciones y las características de las figuras que permanecen invariables en los distintos tipos de proyección.

En la Ilustración 18 se presenta la proyección de un cubo desde un punto *V*:

- Proyectar un vértice *D*, es trazar la recta *VD*.
- Proyectar la recta que contiene una arista *DH*, es trazar el plano *VDH*.

La figura así obtenida está compuesta por planos y rectas proyectantes trazados desde *V* y se llama **radiada**. Al obtener su sección por el plano π' o π'' se obtienen **figuras planas**:

- Cortar la recta proyectante *VD* por un plano π' o π'' es hallar el punto común *D'* o *D"*.
- Cortar el plano proyectante *VDH* por un plano π' o π'' es hallar la recta común *H'D'* o *H"D"*.

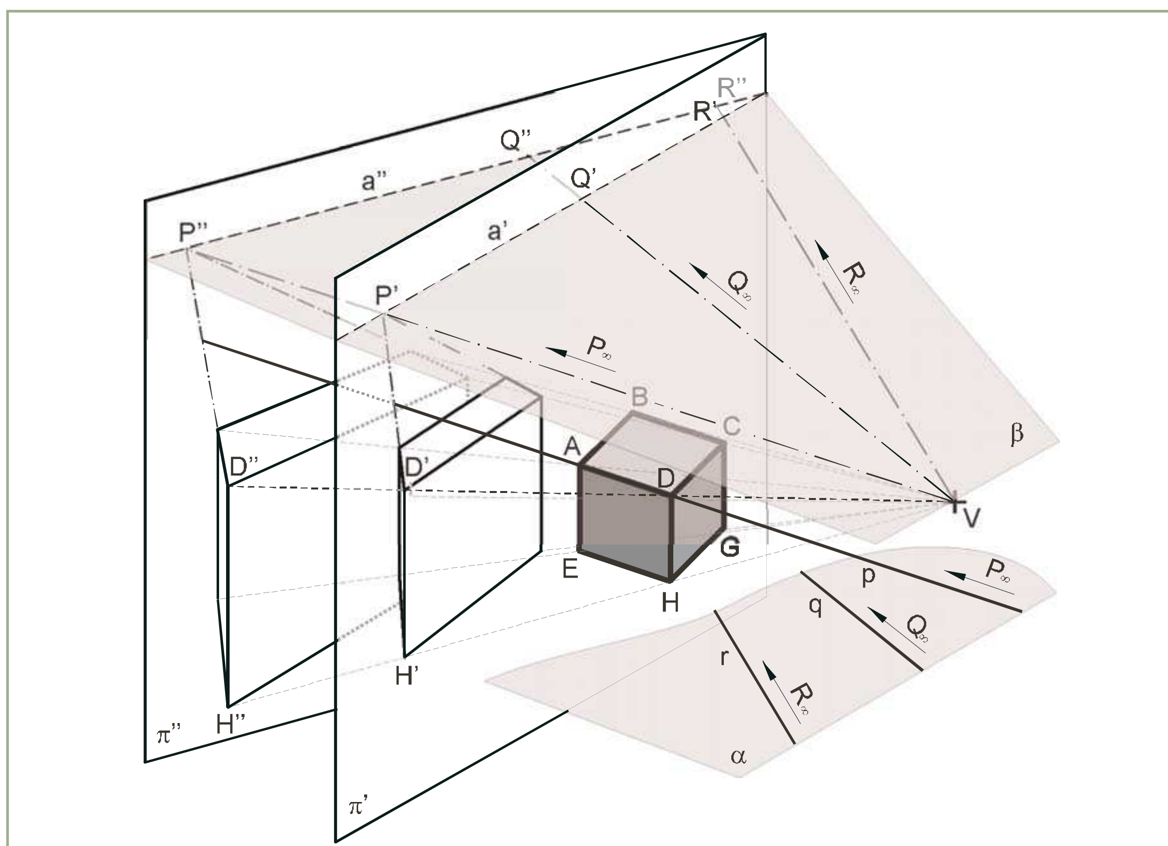


Ilustración 18 Animación

Las operaciones de proyectar y seccionar precisan de la ampliación del concepto de punto, recta y plano cuando dichos elementos ocupan posiciones situadas en el infinito:

- De todos los puntos de la recta *AD* sólo uno está en el infinito, sea cual sea el sentido en que ésta se recorre. Se dice que es un **punto impropio**, se designa mediante su dirección P_∞ y es común para las paralelas *AD, BC, EH,…* Para proyectarlo se traza el rayo proyectante paralelo a *AD* que pasa por *V*, que es cortado por π' o π'' en *P'* o *P''*. Cuando se necesita expresar que un punto de la recta AD no es impropio se dice que es un **punto propio**.
- Los puntos impropios P_∞, Q_∞, R_∞,..., de las rectas *p, q, r,…* del plano α que contiene a la cara *ABCD* forman su **recta impropia** a_∞, que es común para los planos paralelos a él. Se proyecta trazando por *V* el plano proyectante β paralelo a α, que es cortado por π' o π'' en *a'* o *a''*.

2.2. Figuras geométricas. Perspectividad y proyectividad

Los **elementos fundamentales** de la geometría son el punto, la recta y el plano. Éstos componen las **figuras geométricas** [Ilustración 19] que se clasifican en:

Figuras de primera categoría, formadas por elementos de una sola clase**:**

- **Serie de puntos** es un conjunto de puntos de una recta que se llama **base**.
- **Haz de rectas** es un conjunto de rectas de un plano que pasan por un punto llamado **vértice**.
- **Haz de planos** es un conjunto de planos que pasan por una recta llamada **arista**.

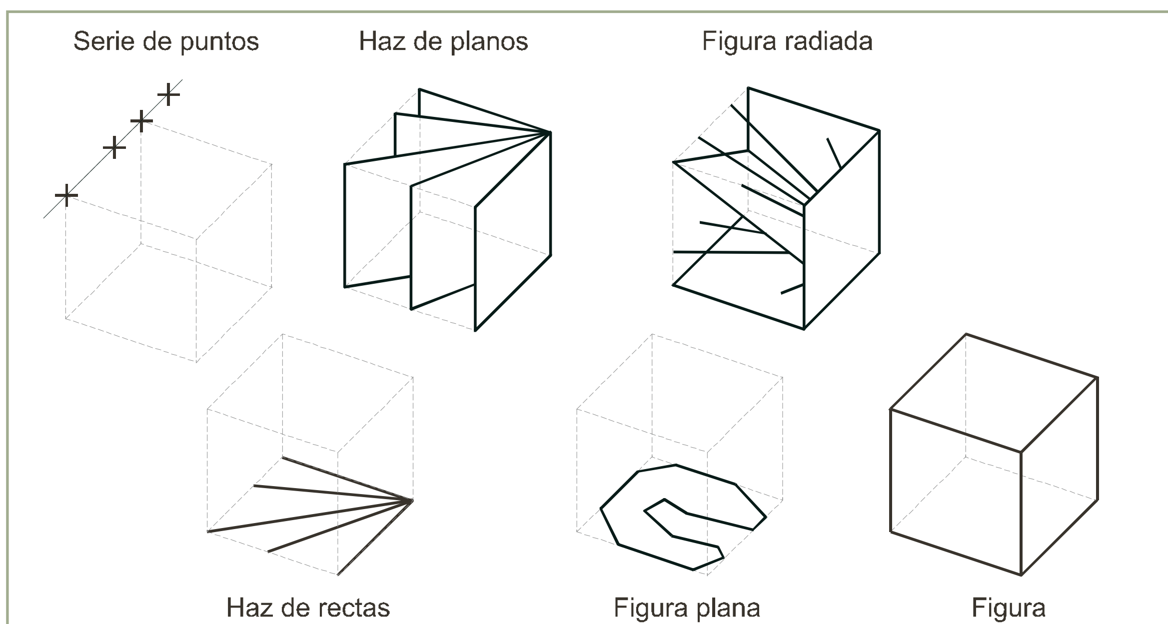


Ilustración 19

Figuras de segunda categoría, formadas por elementos de dos clases:

- **Figura plana** es un conjunto de puntos y rectas de un plano.
- **Figura radiada** es un conjunto de rectas y planos que pasan por un punto.

Figuras de tercera categoría, formadas por elementos de las tres clases:

- **Figura** es un conjunto de puntos, rectas y planos del espacio.

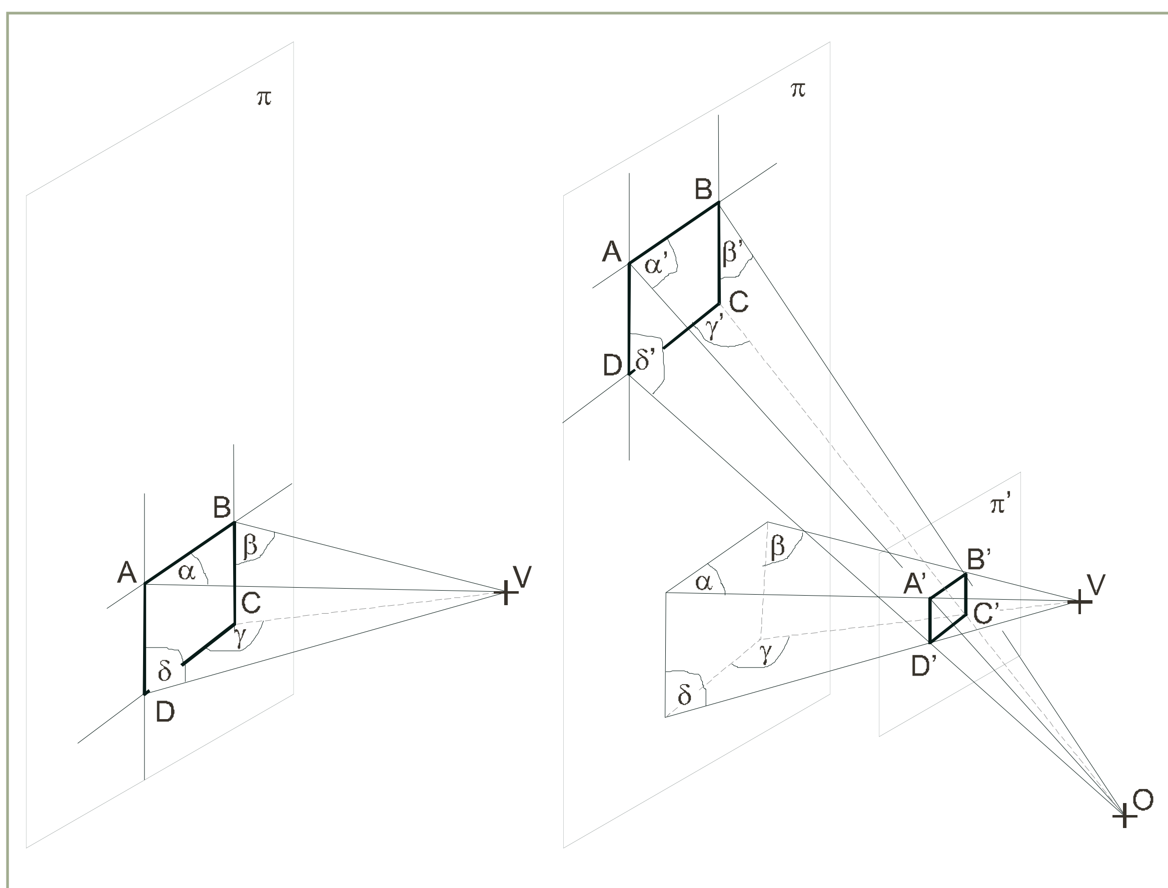


Ilustración 20

Las operaciones de proyectar y seccionar producen figuras de primera y segunda categoría, entre las que se define una correspondencia llamada **perspectividad**.

Son perspectivas entre sí: dos secciones de una figura, dos proyecciones de una figura, una figura y su proyección, una figura y su sección.

Así por ejemplo, en la Ilustración 20 izquierda, son perspectivas la figura plana *ABCD* y la radiada $\alpha\beta\gamma\delta$, en la que a los planos $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ le corresponden las rectas *AB, BC, CD, DA*. Si cambiamos la posición en el plano π de la figura plana *ABCD* [Ilustración 20 derecha], manteniendo fija la radiada $\alpha\beta\gamma\delta$, dejarán de ser perspectivas, pero se pueden buscar secciones como la del plano π' y proyecciones como $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ de centro *O* que transformen la una en la otra.

Dos figuras de primera o segunda categoría se llaman proyectivas entre sí cuando puede obtenerse una a partir de la otra mediante una sucesión de proyecciones o secciones. La transformación que permite pasar de una a otra se llama proyectiva.

Es decir, cualquier pareja de figuras elegidas entre las planas *ABCD*, *A'B'C'D'* y las radiadas $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ **son proyectivas**, pero sólo algunas de ellas están en **posición perspectiva**.

2.3. Transformaciones proyectivas entre figuras planas

Dentro de las transformaciones proyectivas, distinguiremos entre **homografía** cuando a los elementos fundamentales corresponden otros del mismo tipo y **correlación** en caso contrario.

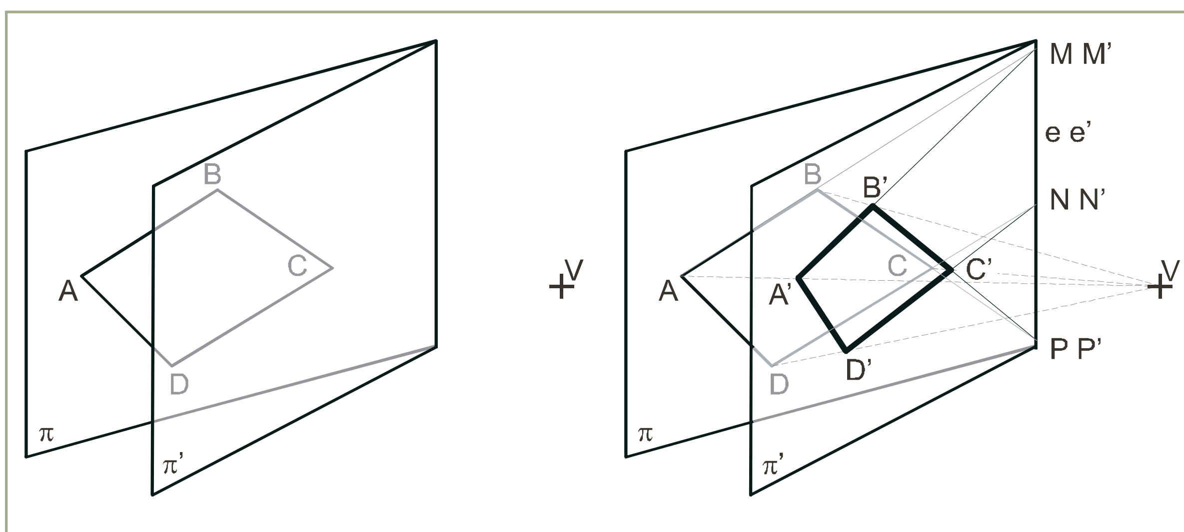


Ilustración 21

La homografía transforma cada punto y cada recta de una figura plana, situada en un plano π, en otro punto y otra recta de una figura plana proyectiva con ella y situada en un plano π'.

En la Ilustración 21 se ha obtenido, mediante una proyección desde *V* y una sección por el plano π', la figura perspectiva y por tanto proyectiva de la *ABCD*... situada en π. Este es el caso más simple de transformación homográfica, cuando las figuras planas correspondientes son secciones de una misma radiación. Se les llama también **homológicas** y en ellas se cumple:

- Los puntos homólogos están alineados con el vértice de la radiación *V* llamado **centro de homología**. Por ejemplo, el rayo *VA'A* determina el homólogo *A'* de *A*, por lo que ambos quedan alineados con *V*.

- Las rectas homólogas se cortan en la recta de intersección *e* de los dos planos de las secciones, llamada **eje de la homología**. Por ejemplo, la recta *AB* y su homóloga *A'B'* tienen en común el punto doble *M, M'* de la serie doble *e, e'* común a π y π'.

2.4. Teorema de las tres homologías

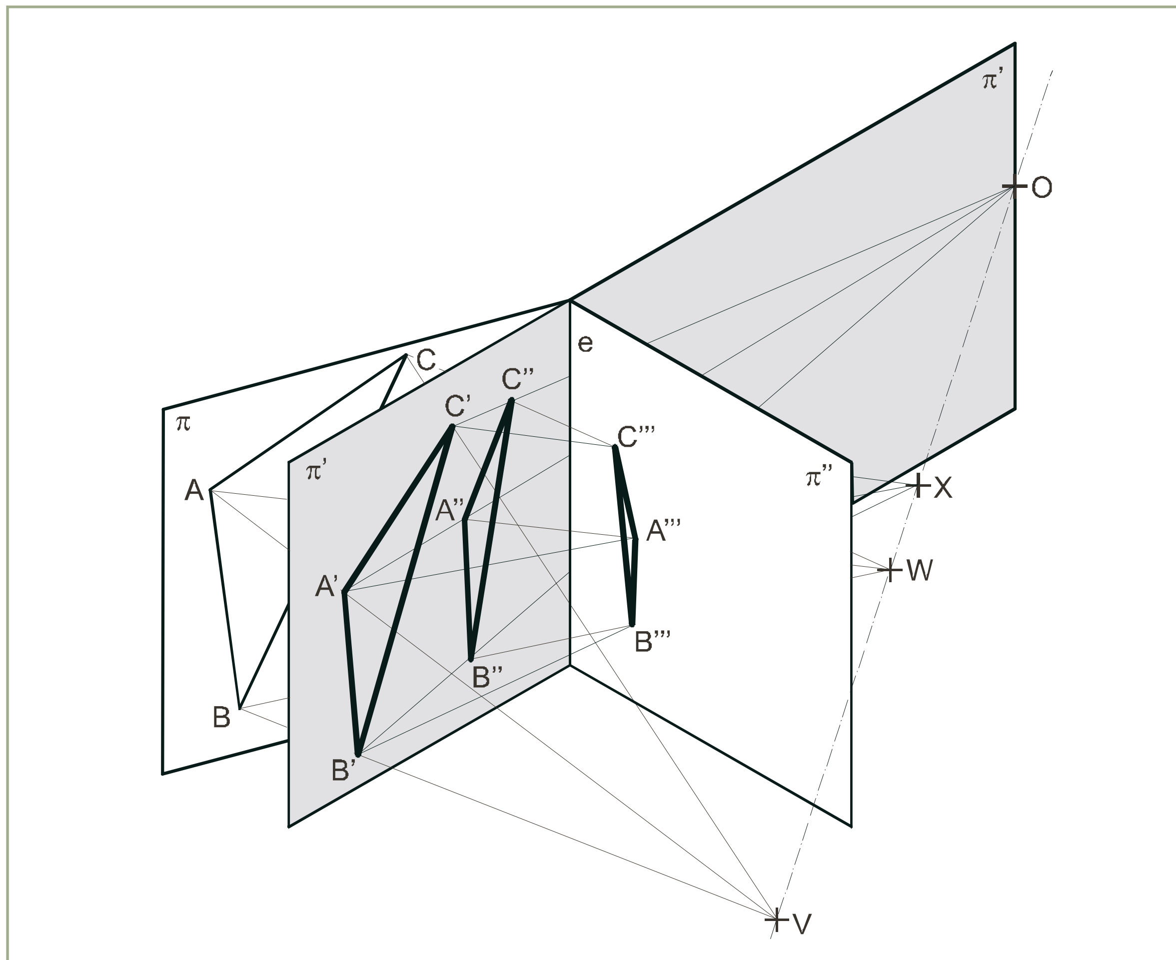


Ilustración 22

Dos figuras planas homológicas de una tercera respecto de un mismo eje de homología y distintos centros de homología, lo son también entre sí respecto del mismo eje y de otro centro de homología alineado con los de ellas.

En la ilustración 22 se muestra cómo el triángulo *ABC* situado en el plano π se proyecta desde *V* y *W*. Al seccionar las figuras radiadas resultantes por los planos π' y π'' se obtienen los triángulos *A'B'C'*, *A''B''C''* y *A'''B'''C'''*, homológicos del *ABC* respecto del eje *e*. El teorema de las tres homologías, arriba enunciado, permite afirmar:

Los triángulos *A'B'C'* y *A'''B'''C'''* son homológicos respecto del eje *e*, determinándose su centro *X* en el punto de corte de *A'A''', B'B''', C'C'''*. Éste está alineado con *V* y *W*.

Los triángulos *A'B'C'* y *A"B"C"* son homológicos respecto del eje *e*, determinándose su centro *O* en el punto de corte de *A'A", B'B", C'C"*. Las dos figuras homológicas, el eje *e* y el centro *O* están en el mismo plano π', definiéndose así una **homología entre figuras coplanarias**.

2.5. Homología entre figuras coplanarias. Homólogos del punto y la recta

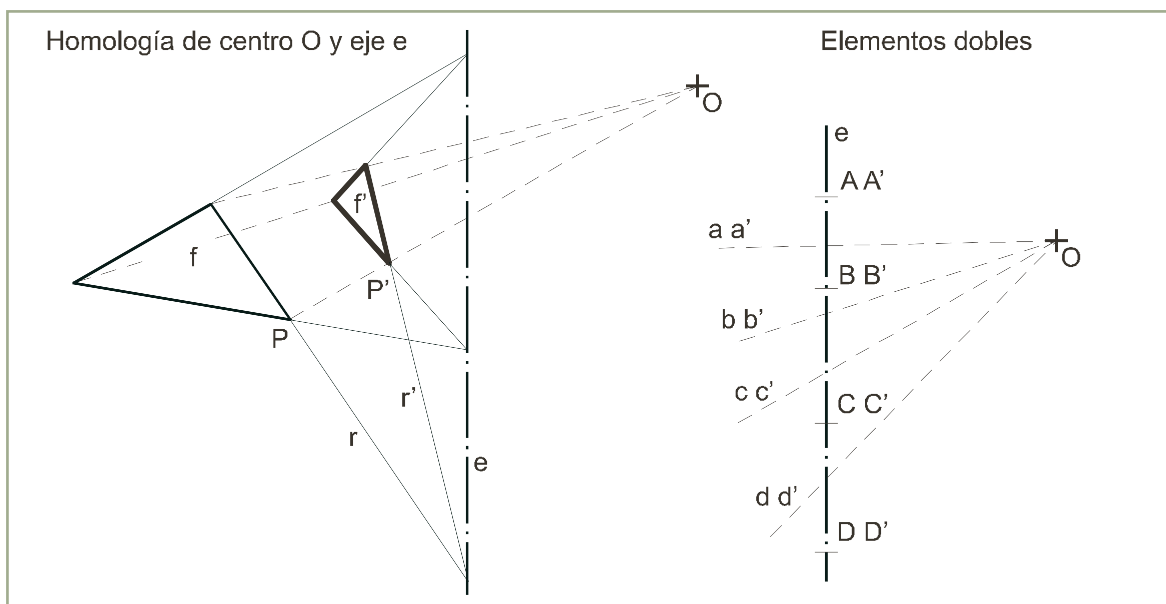


Ilustración 23

La homología entre figuras coplanarias transforma cada punto *P* y cada recta *r* de una figura *f* en un punto *P'* y una recta *r'* de otra *f'*, de modo que:

- **Los puntos homólogos *P, P'* están alineados con un punto fijo *O* llamado centro de homología.**
- **Las rectas homólogas *r, r'* se cortan en una recta fija *e* llamada eje de homología.**

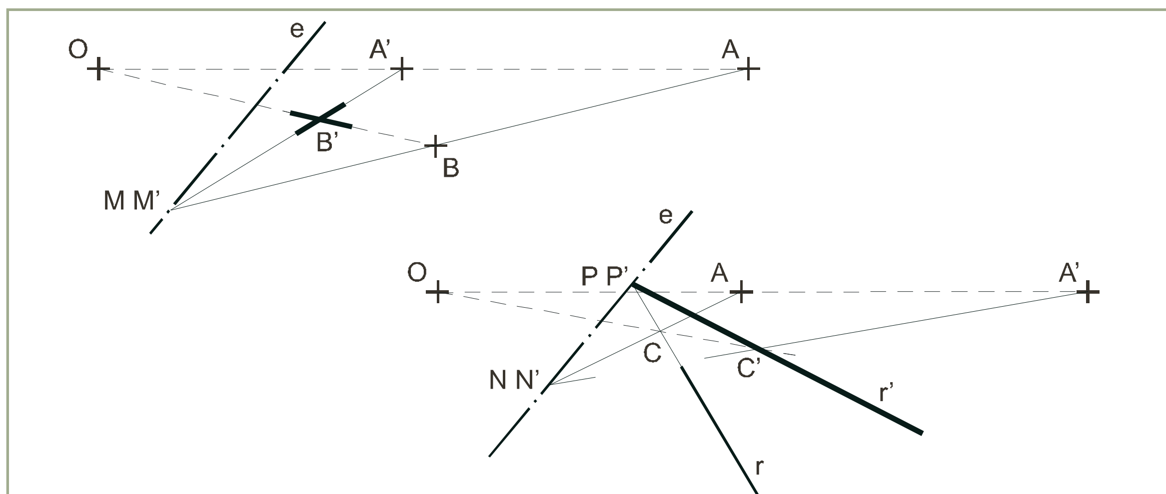
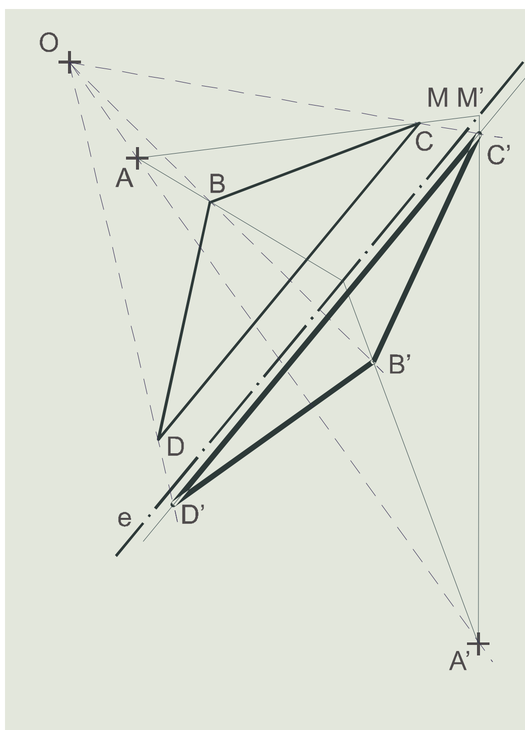


Ilustración 24

Son elementos dobles el haz de rectas cuyo vértice es el centro de homología *O*, y la serie de puntos cuya base es el eje de homología *e* [Ilustración 23].

En la ilustración 24 se obtienen los transformados del punto *B* y la recta *r* mediante la **homología** de centro *O*, eje *e* y par de homólogos *A, A'*.

- Para obtener el homólogo *B'* de *B* se traza la recta *AB* que tiene un punto doble *M, M'* en el eje *e*, por el que pasa su homóloga *M'A'*. Ésta corta a la alineación *OB* en *B'*.
- La homóloga *r'* de *r* pasa por el punto doble *P, P'* y por el homólogo *C'* de un punto cualquiera *C* de *r*, que se obtiene previamente.



Aplicación

Se desea obtener la figura transformada de un triángulo *BCD* mediante la homología de centro *O*, eje *e* y par de homólogos *A, A'*.

Se obtiene el homólogo *C'* de *C* en el punto de corte de la recta doble *OC* con la transformada *A'M'* de *AM*. Análogamente se obtiene *B'*.

Al ser *CD* paralela al eje, también lo será *C'D'*, ya que el punto doble compartido es impropio. La recta *OD* corta a la paralela al eje por *C'* en *D'*.

2.6. Rectas límites

Se llaman rectas límites de una homología entre figuras coplanarias a las homólogas *l* y *k'* de la recta impropia de cada una de las figuras *f'* y *f*.

Sea la homología de centro *O* y eje *e* entre dos triángulos *f* y *f'* coplanarios cuyos vértices *A, A'* son homólogos [Ilustración 25].

Se traza por *A* una recta cualquiera *a* que corta al eje *e* en *M*. Se obtiene su homóloga *a'* uniendo *M* con *A'*.

El homólogo *L* del punto impropio L'_∞ de *a'* es el punto de corte de su paralela trazada por *O* con *a*. Por *L* se traza la recta límite *l* paralela al eje *e*, ya que ha de concurrir en él con la recta impropia de la figura *f'* que es su homóloga.

El homólogo *K'* del punto impropio K_∞ de *a* es el punto de corte de su paralela trazada por *O* con *a'*. Por *K'* se traza la recta límite *k'* paralela al eje *e*, ya que ha de concurrir en él con la recta impropia de la figura *f* que es su homóloga.

La distancia de una recta límite al centro de homología es igual a la distancia de la otra al eje, ya que la figura *OK'ML* es un romboide.

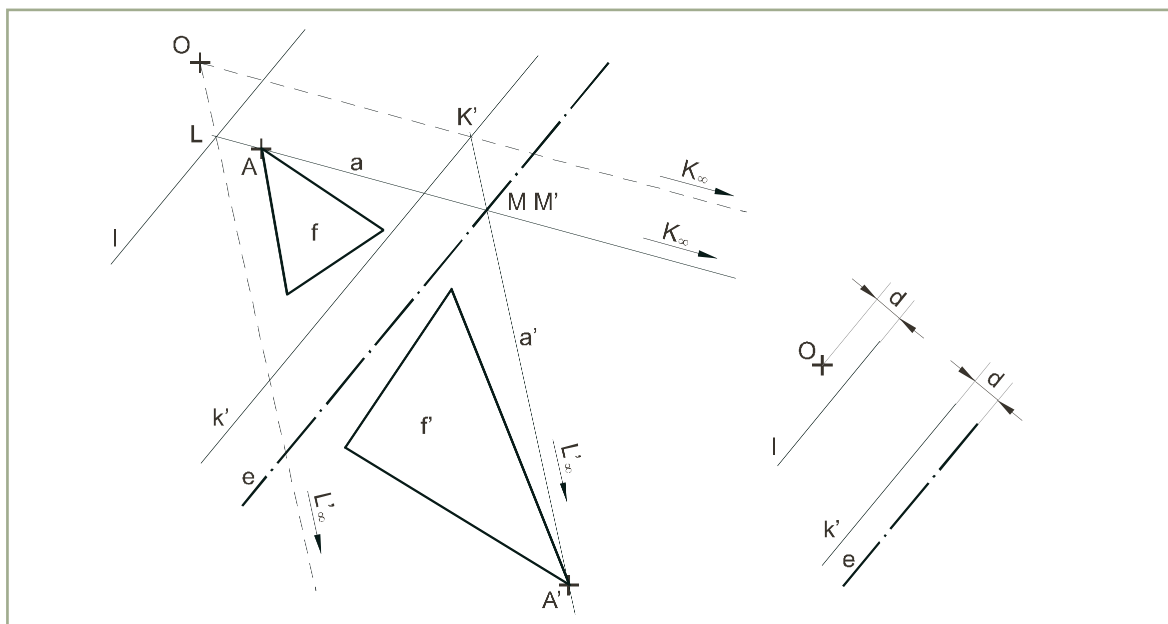
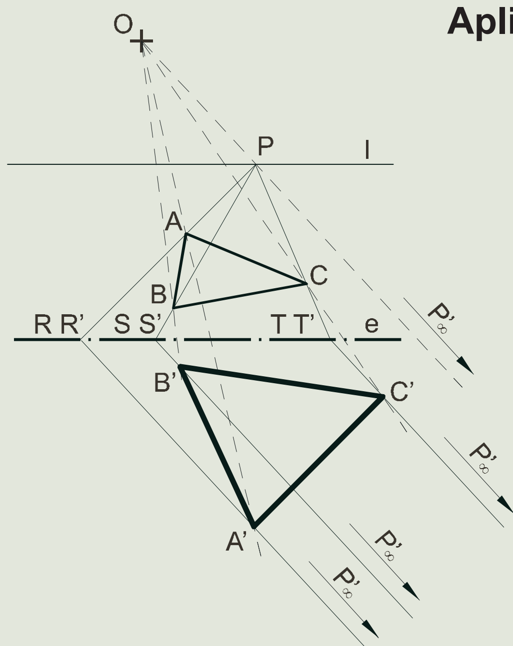


Ilustración 25

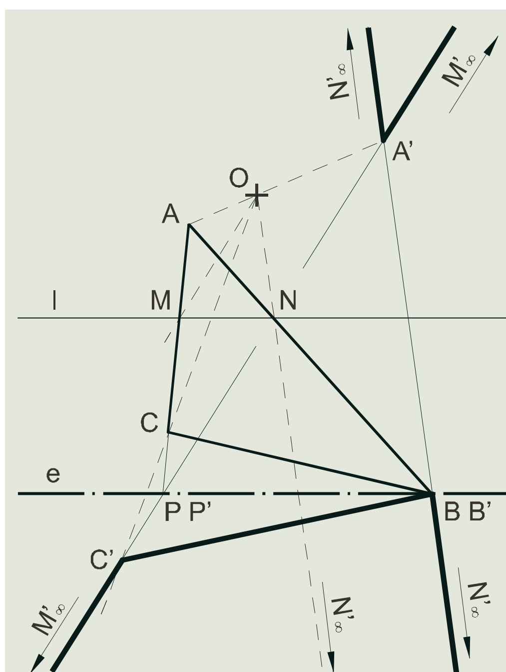
Aplicación



Se desea obtener la figura homóloga de un triángulo *ABC* definida la homología mediante la recta límite *l*, el centro de homología *O* y el eje *e*.

Se elige un punto cualquiera *P* de la recta límite *l* y se trazan las rectas *PA, PB, PC* que cortan al eje *e* en *R*, *S*, *T*. Sus homólogas pasan por los puntos dobles *R'*, *S'*, *T'* y son paralelas a la recta *OP* con la que concurren en el punto impropio P'_∞.

Las rectas *OA, OB, OC* cortan a $R'P'_\infty$, $S'P'_\infty$, $T'P'_\infty$ en los homólogos *A'* , *B'*, *C'* de los vértices.



Aplicación

Se desea obtener la figura homóloga de un triángulo *ABC* que corta a la recta límite *l* en los puntos *M, N* siendo *O* el centro de homología y *e* el eje.

El punto *N* tiene como homólogo al impropio N'_∞ y divide al segmento $\overline{AB}$ en dos segmentos $\overline{BN}$ y $\overline{AN}$ cuyos homólogos $\overline{B'N'_\infty}$ y $\overline{A'N'_\infty}$ tienen en común dicho punto impropio.

La homóloga *A'B'* de *AB* pasa por el punto doble *B* y es paralela a la recta *ON* con la que concurre en el punto impropio N'_∞. Su punto de corte con *OA* es *A'*, homólogo de *A*. Análogamente se obtiene la homóloga *A'P'* de *AP* y el transformado *C'* de *C*, que es su punto de corte con *OC*. Los segmentos $\overline{C'M'_\infty}$ y $\overline{A'M'_\infty}$ completan el triángulo homológico del *ABC*.

2.7. Transformación homológica de una circunferencia

La figura homológica de una circunferencia que no corta a la recta límite es una elipse. Será una parábola o una hipérbola, según que la corte en uno o dos puntos, ya que sus homólogos serían impropios.

Sea *c* la circunferencia, *l* la recta límite, *O* el centro de homología y *e* el eje [Ilustración 26].

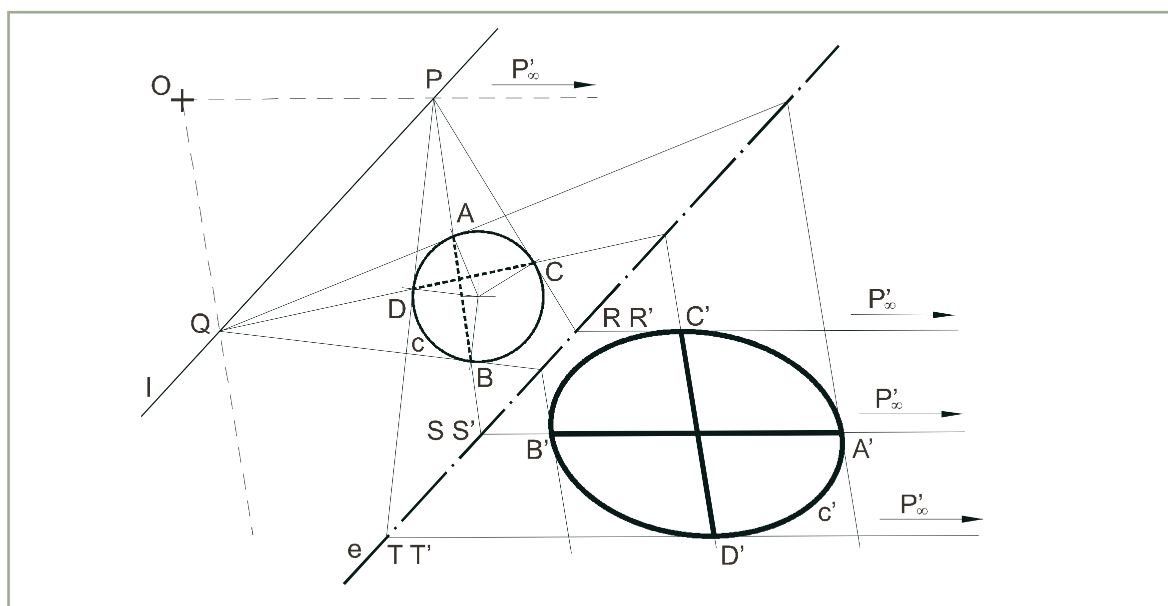


Ilustración 26

Se elige un punto cualquiera *P* de la recta límite *l* y se trazan desde él las tangentes a la circunferencia *PC, PD* que cortan al eje *e* en *R, T*. La recta *CD,* que une los puntos de tangencia, corta a la recta límite *l* en *Q*. Los puntos de tangencia *A, B* de las tangentes *QA, QB* trazadas desde *Q* determinan la recta *AB* que debe pasar por *P*. Las homólogas de las cuerdas *AB* y *CD* así obtenidas serán los diámetros conjugados *A'B'* y *C'D'* de la elipse en que se transforma la circunferencia.

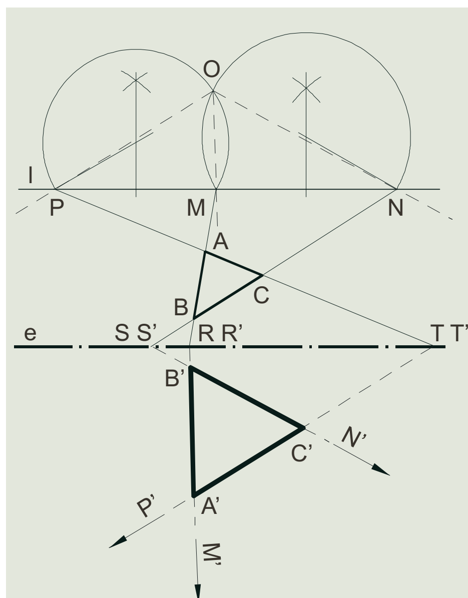
Las homólogas de *PR, PS, PT* pasan por los puntos dobles *R', S', T'* y son paralelas a la recta *OP* con la que concurren en el punto impropio P'_∞. Análogamente se obtienen las homólogas de las rectas que convergen en *Q* y sus intersecciones con las anteriores determinan los extremos *A', B', C', D'* de los diámetros.

La elipse se construye por cualquier método a partir de sus diámetros conjugados.

La construcción se apoya en dos propiedades de la elipse:

- Una cuerda en la que las tangentes en sus extremos son paralelas es un diámetro.
- Los puntos de tangencia de las tangentes paralelas a un diámetro determinan su conjugado.

Las tangentes a la circunferencia en *A, B,* así como la cuerda *CD,* convergen en el punto *Q* de la recta límite por lo que sus homólogas serán paralelas y formarán el diámetro *C'D'* y las tangentes en sus extremos. Y análogamente para las tangentes en *C, D* y la cuerda *AB*.



Aplicación

Se desea transformar el triángulo *ABC* en otro equilátero *A'B'C'* mediante una homología cuyo centro es preciso determinar previamente, conocidos el eje *e* y la recta límite *l*.

Las rectas *OM, ON, OP* definen las direcciones de los puntos impropios M'_∞, N'_∞, P'_∞ de los homólogos de los lados del triángulo. Para que éste sea equilátero deberán formar entre sí ángulos de 60º. El punto de corte de dos arcos capaces de 60º sobre los segmentos $\overline{MN}$ y $\overline{MP}$ definirá la posición del centro de homología.

Las homólogas *A'B', B'C', C'A'* de *AB, BC, CA* pasan por los puntos dobles *R, S, T* y son paralelas a *OM, ON, OP*.

2.8. Afinidad. Homólogos del punto y la recta

La homología cuyo centro es impropio se llama afín. En ella no existen rectas límites y las homólogas de rectas paralelas también son paralelas.

La homología afín o afinidad transforma cada punto *P* y cada recta *r* de una figura *f* en un punto *P' y* una recta *r'* de otra *f'*, de modo que:

- **Las rectas definidas por un par de puntos homólogos *P, P'* son paralelas a la dirección de afinidad, que es la dirección de su centro.**
- **Las rectas homólogas *r, r'* se cortan en una recta fija *e* llamada eje de afinidad.**

En la ilustración 27 se obtienen los transformados del punto *B* y la recta *r* mediante la **afinidad** de eje *e* y par de homólogos *A, A'*.

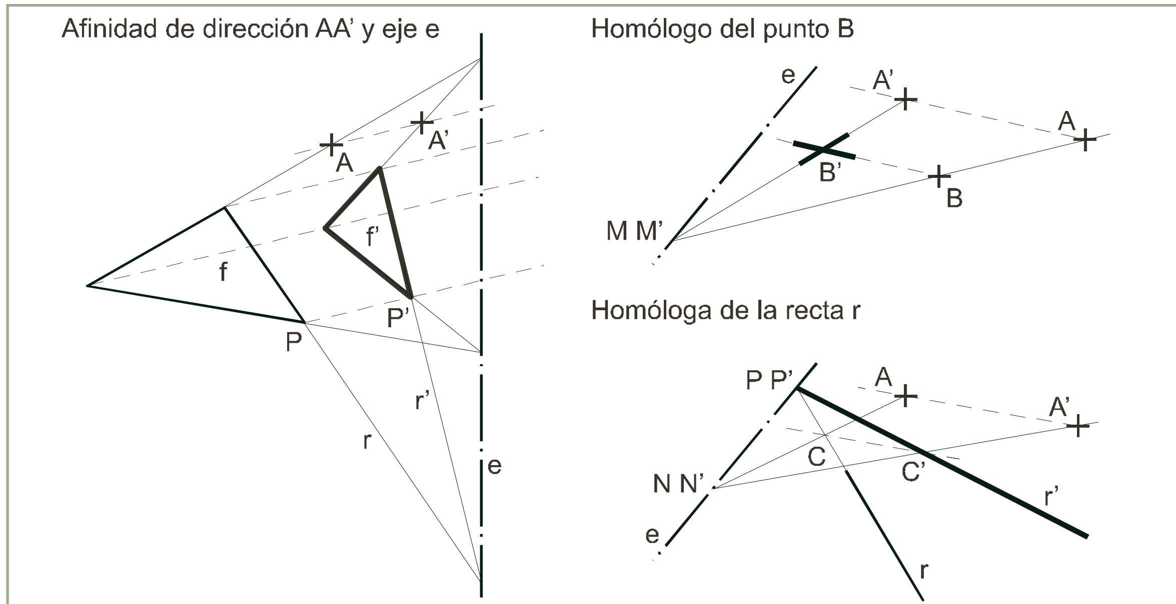
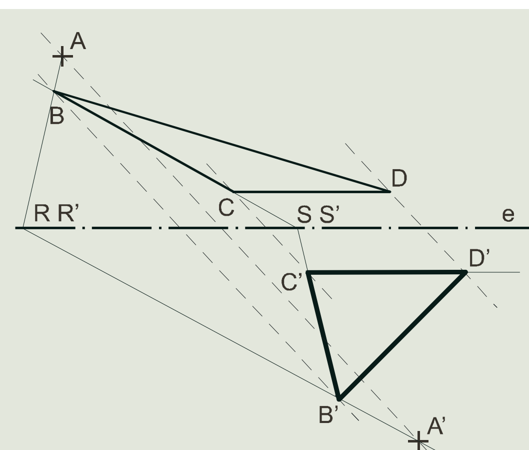


Ilustración 27

- Para obtener el homólogo *B'* de *B* se traza la recta *AB* que tiene un punto doble *M, M'* en el eje *e*, por el que pasa su homóloga *M'A'*. Esta corta a la paralela por *B* a la dirección de afinidad *AA'* en *B'*.
- La homóloga *r'* de *r* pasa por el punto doble *P, P'* y por el homólogo *C'* de un punto cualquiera *C* de *r*, que se obtiene previamente.



Aplicación

Se desea obtener la figura transformada de un triángulo *BCD* mediante la afinidad de eje *e* y par de homólogos *A, A'*.

Se obtiene el homólogo *B'* de *B* en el punto de corte de la paralela a la dirección de afinidad *AA'* por *B* con la transformada *A'R'* de *AR*. Análogamente se obtiene *C'*.

Al ser *CD* paralela al eje también lo será *C'D'*, ya que el punto doble compartido es impropio. La paralela por *D* a *AA'* corta a la paralela al eje por *C'* en *D'*.

2.9. Transformación afín de una circunferencia

La figura afín de una circunferencia es una elipse.

Sea *c* la circunferencia, *e* el eje y *AA'* un par de homólogos [Ilustración 28].

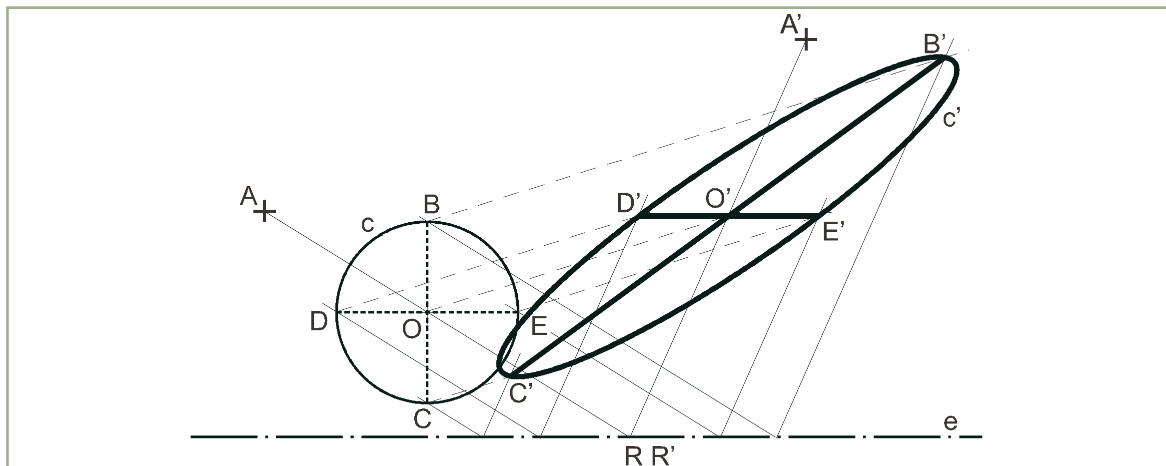


Ilustración 28

Se obtiene el homólogo *O'* de *O* en el punto de corte de la paralela a la dirección de afinidad *AA'* por *O* con la transformada *A'R'* de *AR*.

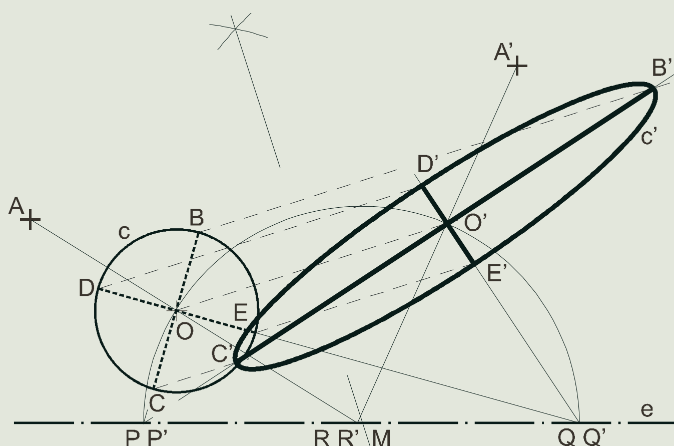
Como en la afinidad se conserva el paralelismo, trazaremos paralelas por *B, C, D, E* a la recta *AR*. Sus homólogas pasarán por el punto de corte con el eje *e* y serán paralelas a *R'A'*. Las intersecciones de éstas con las paralelas a la dirección de afinidad *AA'* trazadas desde *B, C, D, E* determinan *B', C', D', E'*.

La elipse se construye por cualquier método a partir de sus diámetros conjugados.

Aplicación

Se desean obtener los diámetros principales de la elipse en que se transforma una circunferencia *c*, mediante la afinidad de eje *e* y par de homólogos *A, A'*.

Se obtiene el homólogo *O'* de *O* en el punto de corte de la paralela a la dirección de afinidad *AA'* por *O* con la transformada *A'R'* de *AR*.



Se halla la mediatriz de *OO'* y por su punto de corte con el eje e se construye la semicircunferencia que pasa por *O, O'* y corta al eje *e* en *P, Q*. Se trazan los diámetros *CB, DE* que pasan por *P, Q* respectivamente. Sus homólogos *C'B', D'E'* pasarán por los puntos dobles *P', Q'* respectivamente y por *O'*. Las paralelas a la dirección de afinidad *AA'* por *B, C, D, E* les cortan en *B', C', D', E'*.

La elipse se construye por cualquier método a partir de sus diámetros principales.

Por ser arco capaz de 90º sobre el segmento $\overline{PQ}$, los diámetros *CB, DE* que pasan por *P, Q* y sus homólogos *C'B', D'E'* que también lo hacen, forman 90º, de ahí la construcción

2.10. Homotecia. Homólogos del punto y la recta

La homología cuyo eje es impropio es una homotecia. En ella las figuras *f* y *f'* son semejantes.

La homotecia transforma cada punto *P* y cada recta r de una figura *f* en un punto *P'* y una recta *r'* de otra *f'*, de modo que:

- **Los puntos homólogos *P*, *P'* están alineados con un punto fijo *O* llamado centro de homotecia.**
- **Las rectas homólogas *r*, *r'* son paralelas.**

En la ilustración 29 se obtienen los transformados del punto *B*, la recta *r* y la circunferencia *c* mediante la homotecia de centro *O* y par de homólogos *A*, *A'*.

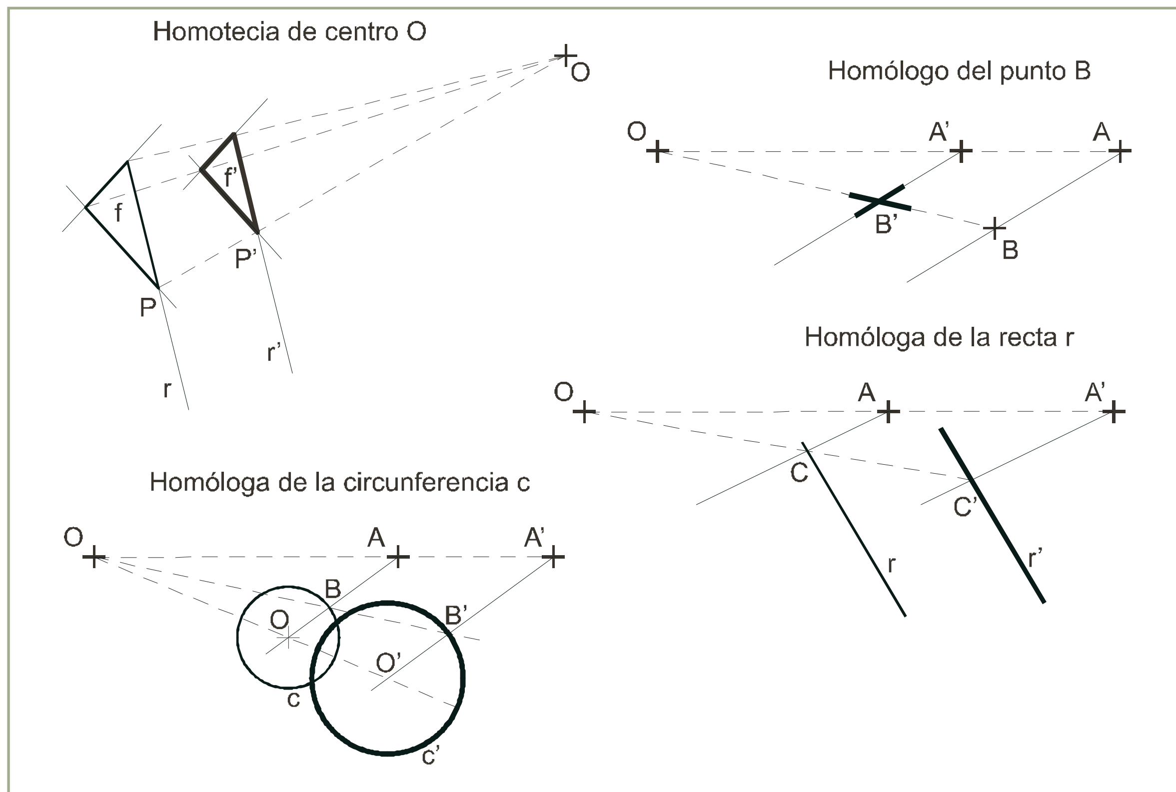
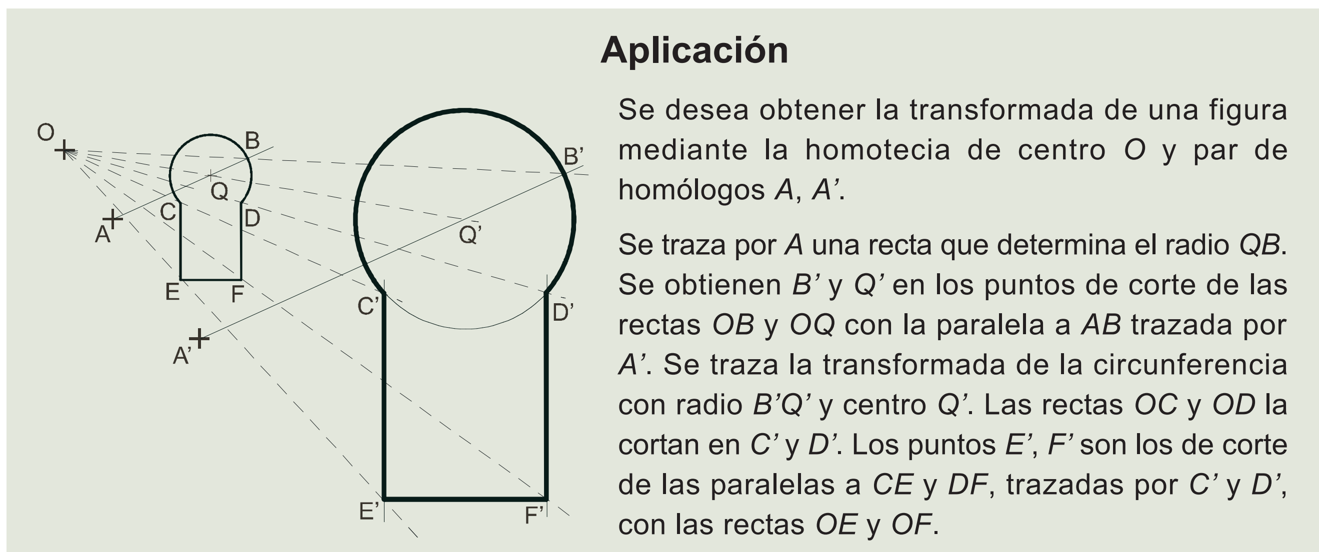


Ilustración 29

- Para obtener el homólogo *B*' de *B* se traza la recta *AB* y su paralela por *A*' que corta a la recta *OB* en *B*'.
- La transformada *r*' de una recta *r* es paralela a ella y pasa por el homólogo *C*' de un punto cualquiera *C* de *r*, que se obtiene previamente.
- La transformada *c*' de la circunferencia *c* se obtiene hallando el radio *O*'*B*', homólogo del radio *OB* que pasa por *A*.



Aplicación

Se desea obtener la transformada de una figura mediante la homotecia de centro *O* y par de homólogos *A*, *A’*.

Se traza por *A* una recta que determina el radio *QB*. Se obtienen *B’* y *Q’* en los puntos de corte de las rectas *OB* y *OQ* con la paralela a *AB* trazada por *A’*. Se traza la transformada de la circunferencia con radio *B’Q’* y centro *Q’*. Las rectas *OC* y *OD* la cortan en *C’* y *D’*. Los puntos *E’*, *F’* son los de corte de las paralelas a *CE* y *DF*, trazadas por *C’* y *D’*, con las rectas *OE* y *OF*.

2.11. Traslación. Homólogos del punto y la recta

La homología en la que su centro y su eje son impropios es una traslación. En ella las figuras *f* y *f’* son iguales.

La traslación transforma cada punto *P* y cada recta *r* de una figura *f* en un punto *P’* y una recta *r’* de otra *f’*, de modo que:

- **Las rectas definidas por un par de puntos homólogos *P*, *P’* son paralelas a la dirección de su centro, que es impropio.**
- **Las rectas homólogas *r*, *r’* son paralelas.**

En la ilustración 30 se obtienen los transformados del punto *B*, la recta *r* y la circunferencia *c* mediante la traslación definida por un par de homólogos *A*, *A’*.

- Para obtener el homólogo *B’* de *B* se traza la paralela por *A’* a la recta *AB*, que corta a la paralela por *B* a *AA’* en *B’*.
- La transformada *r’* de una recta *r* es paralela a ella y pasa por el homólogo *C’* de un punto cualquiera *C* de *r*, que se obtiene previamente.
- La transformada *c’* de la circunferencia *c* se traza con su mismo radio, tomando como centro el homólogo *O’* de *O*.

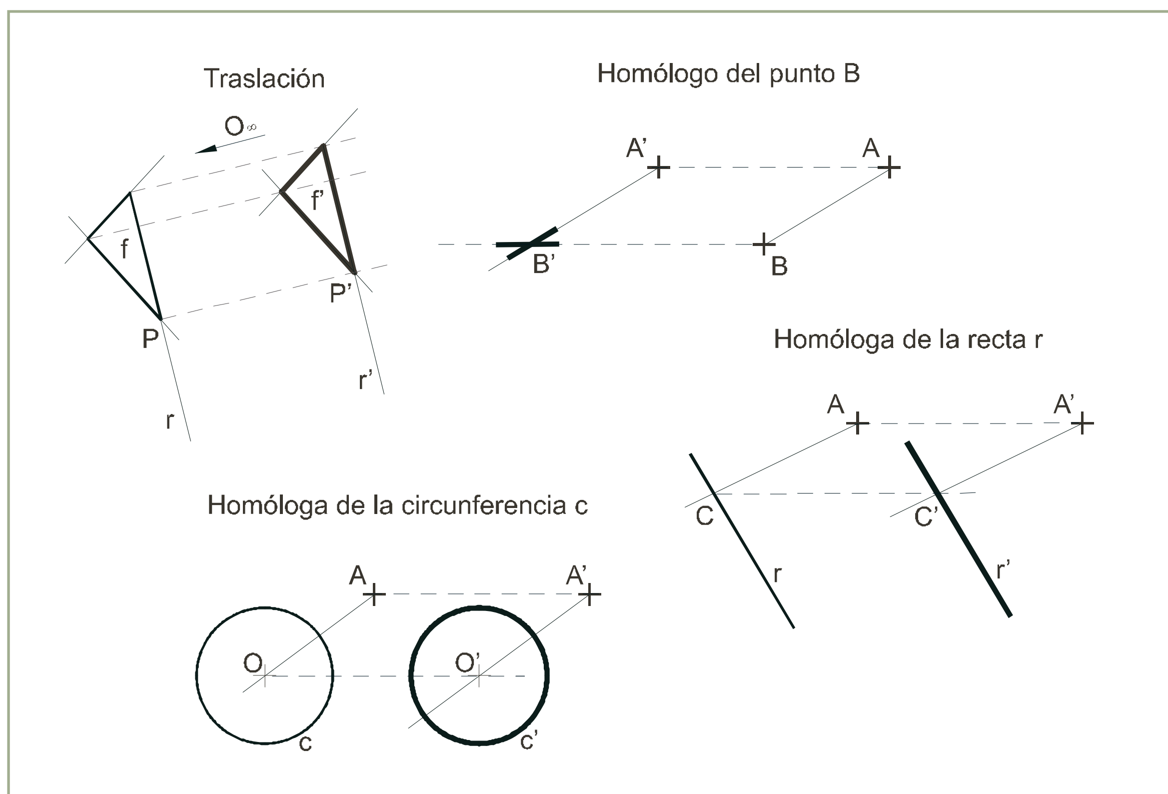
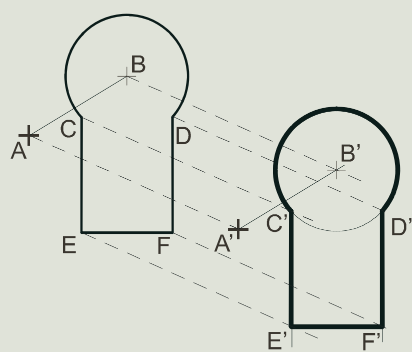


Ilustración 30

Aplicación



Se desea obtener la transformada de una figura mediante la traslación definida por el par de homólogos *A*, *A'*.

El homólogo *B'* de *B* es el punto de corte de la paralela trazada por A' a la recta AB con la paralela trazada por *B* a *AA'*. Se dibuja la transformada de la circunferencia y las paralelas a *AA'* por *C*, *D* que la cortan en *C'*, *D'*.

Los puntos *E'*, *F'* son los de corte de las paralelas a *CE* y *DF*, trazadas por *C'* y *D*, con las paralelas a *AA'* trazadas por *E* y *F*.



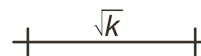
Recuerda

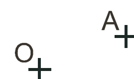
- La inversión queda definida dados centro y potencia, o centro y un par de puntos inversos, o bien dos parejas de puntos inversos.
- En potencia positiva, son dobles las circunferencias ortogonales a la de puntos dobles y las que contienen un par de puntos inversos.
- En potencia negativa, son dobles las circunferencias que contienen un par de puntos inversos.
- Las rectas que pasan por el centro de inversión son dobles.
- La figura inversa de una recta que no pasa por el centro de inversión es una circunferencia que sí pasa por él.
- La figura inversa de una circunferencia que pasa por el centro de inversión es una recta que no pasa por él.
- La figura inversa de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión es otra circunferencia que tampoco pasa por él. El centro de la homotecia que se puede definir entre ellas coincide con el de inversión.
- La homología queda definida dando: 1) centro, eje y par de homólogos; 2) centro, eje y recta límite; 3) eje y dos pares de homólogos.
- Las rectas homólogas se cortan en el eje.
- Los puntos homólogos están alineados con el centro de homología, sea éste propio o impropio (afinidad).
- La afinidad queda definida dados el eje y un par de puntos homólogos.
- En la homología no se conserva el paralelismo excepto cuando el centro o el eje son impropios (afinidad, homotecia y traslación).



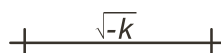
Actividades

1. Obtener el inverso de *A* siendo *O* el centro de inversión y $\sqrt{k}$ la raíz cuadrada de la potencia.





2. Construir la figura inversa de la recta *r* siendo *O* el centro de inversión y $\sqrt{-k}$ la raíz cuadrada de la potencia *k* (negativa).





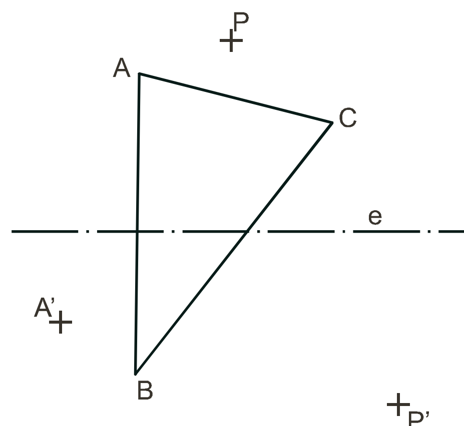


3. La figura está formada por media circunferencia y un diámetro; obtener su inversa, conocido el centro de inversión *O* y un punto doble *A*.

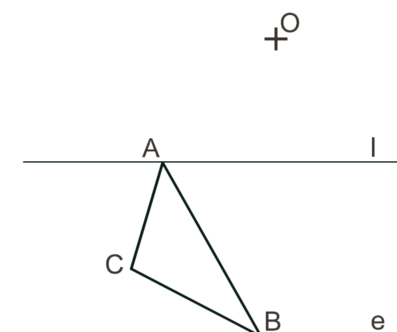




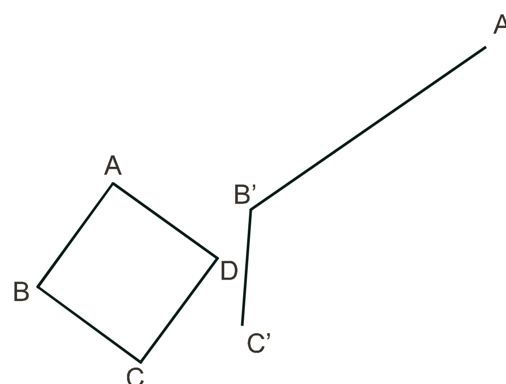
4. Construir la transformada del triángulo *ABC* mediante la homología de eje *e*, conocidos los homólogos *A’, P’* de *A, P.*



5. Construir la transformada del triángulo *ABC* mediante la homología de centro *O*, eje *e* y recta límite *l*.



6. Completar la figura *A’B’C’D’* afín del cuadrado *ABCD,* determinando el eje y la dirección de afinidad.



4 Curvas cónicas y técnicas

- *Opera y puente del puerto de Sidney, Australia (ISFTIC. Banco de imágenes).*

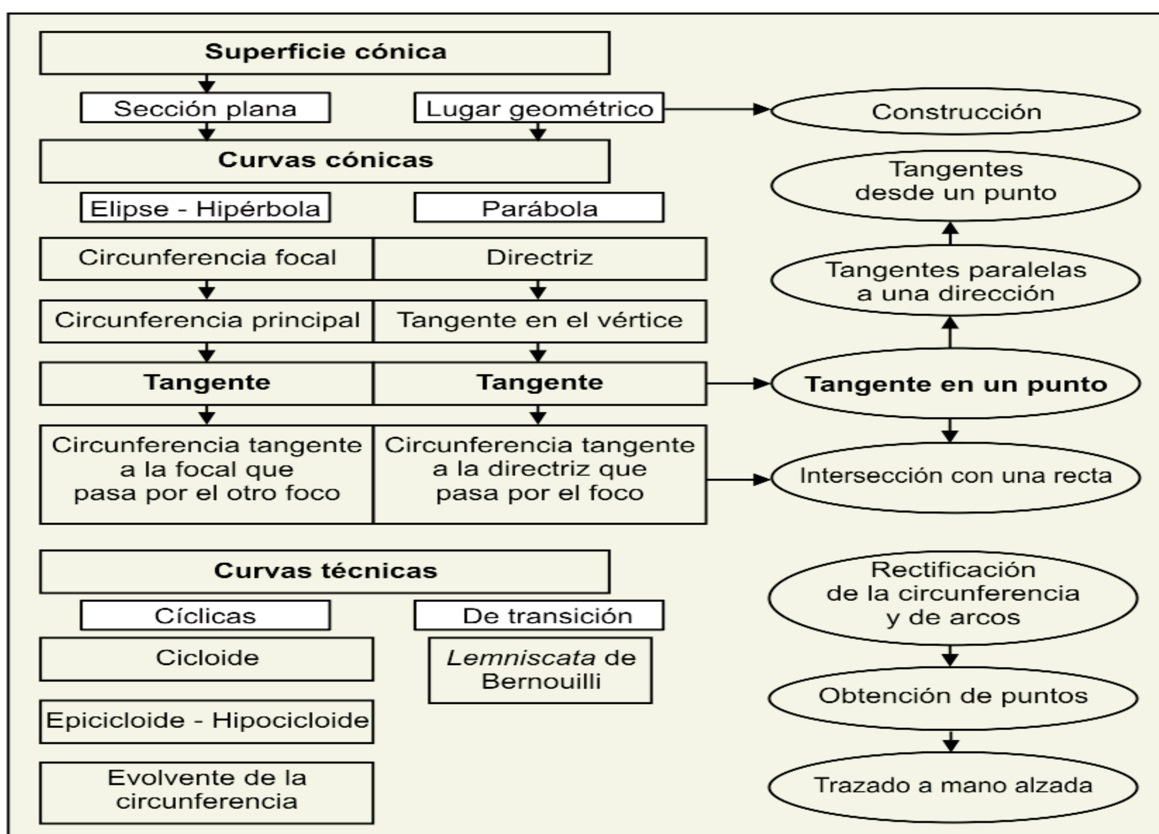
Las curvas cónicas y las curvas técnicas son empleadas por arquitectos, ingenieros y diseñadores en la configuración de edificios, obras públicas y objetos de uso. Esta Unidad se ocupa de ambos tipos de curvas, con diferentes objetivos. En las cónicas se estudia su construcción, el trazado de tangentes, la intersección con rectas y la obtención de los elementos que las definen, sin dibujar la curva. En las técnicas el trazado de la curva es el objetivo principal.

En las curvas cónicas se recomienda la comprensión y posterior memorización de las relaciones gráficas y conceptuales entre tangentes, circunferencias focales y circunferencia principal, como paso necesario para la resolución de las aplicaciones. Éstas persiguen la profundización en el conocimiento de las relaciones geométricas entre los elementos de las cónicas. Si se desea trazar las curvas se pueden utilizar las construcciones por puntos, o afinidad .

En las curvas técnicas se definen algunos tipos de curvas cíclicas y uno de transición, facilitándose los métodos necesarios para obtener una serie de puntos lo suficientemente próximos para poder unirlos a mano alzada.

Con el estudio de esta Unidad nos proponemos alcanzar los siguientes **objetivos**:

1. Construir las curvas cónicas y trazar tangentes a ellas desde un punto o paralelas a una dirección.
2. Obtener la intersección de las curvas cónicas con rectas.
3. Obtener los elementos de una cónica a partir de datos tales como: puntos, ejes, constante, tangentes, focos, vértices.
4. Rectificar circunferencias y arcos.
5. Trazar curvas técnicas a lápiz y mano alzada, previa obtención de una serie de puntos.



ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. Elipse

1.1. Definición y elementos

Si una recta *g* gira alrededor de un eje *e* que tiene un punto común con ella *V* genera una superficie de revolución llamada **superficie cónica** [Ilustración 1 a]. Dicha superficie está formada por las sucesivas posiciones de la recta generatriz *g* y se extiende indefinidamente en ambos sentidos desde el vértice *V*, que es centro de simetría de las dos hojas de que se compone. Las líneas obtenidas al cortar la superficie cónica por planos que no pasan por el vértice se llaman **curvas cónicas**.

Al seccionar una superficie cónica por un plano α perpendicular al eje se obtiene una circunferencia [Ilustración 1 b].

Al seccionar una superficie cónica por un plano oblicuo β que corte a todas las generatrices se obtiene una **elipse** [Ilustración 1 b].

Ilustración 1  Animaciones a y b  Animaciones c,d y e 

La elipse es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante. Así pues una elipse está determinada dando la distancia entre los focos 2*c* y la constante 2*a*. Para un punto genérico *P* será $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$ siendo *F* y *F'* los focos [Ilustración 1 c].

- **Vértices** *V*, *V'* son los puntos alineados con los focos *F*, *F'* y la distancia entre ellos es 2*a*. Los puntos *W*, *W'*, que equidistan de los focos, también se llaman vértices. La distancia entre ellos es 2*b* y la distancia a los focos *a*. Se puede formar un triángulo rectángulo con las distancias *b*, *c* como catetos y *a* de hipotenusa.
- **Cuerda** es cualquier segmento cuyos extremos son dos de sus puntos (*MN*).
- **Diámetro** es el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas paralelas a una dirección (diámetro *AB* para las cuerdas paralelas a *MN*).
- **Centro** *O* es el punto medio de todos los diámetros y centro de simetría de la elipse.
- **Ejes** son los diámetros máximo *VV'* y mínimo *WW'* y sus longitudes son 2*a* y 2*b*. Son ejes de simetría de la elipse.
- **Diámetros conjugados** son un diámetro *CD* y el diámetro *AB* definido por los puntos medios de las cuerdas paralelas a él.
- **Circunferencia principal** es la que tiene como radio *a* y centro el de la elipse.
- **Circunferencia focal** es la que tiene como radio 2*a* y centro en un foco.

1.2. Construcción de la elipse por puntos

Sea *a* el semieje mayor y *c* la semidistancia focal [Ilustración 2].

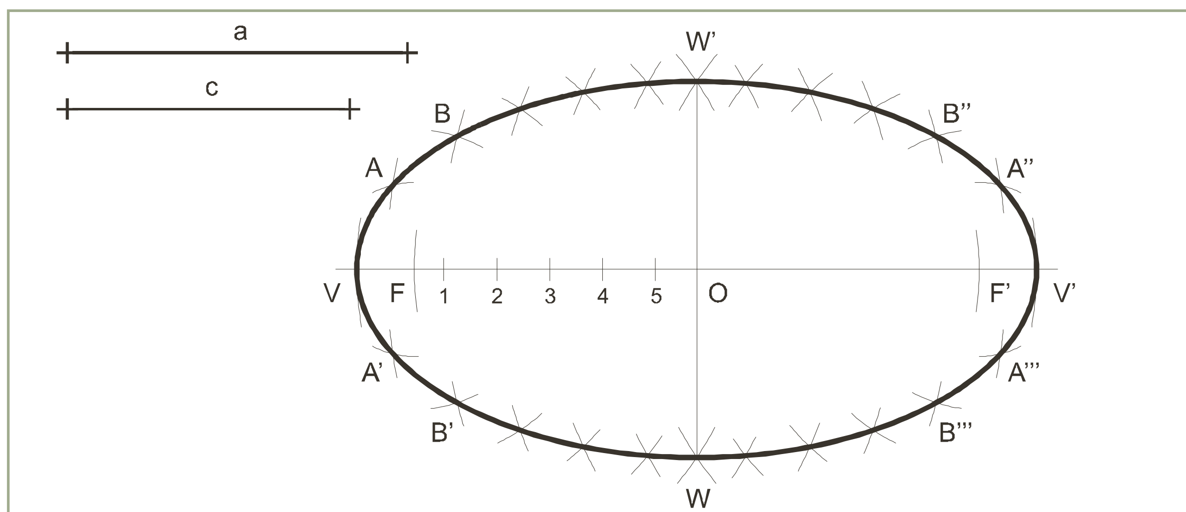


Ilustración 2 Animación

Se elige el centro *O* de la elipse sobre una recta cualquiera y con centro en él, se trazan arcos de radios *a* y *c* que la cortan en los vértices *V*, *V'* y en los focos *F*, *F'* respectivamente. En $\overline{OF}$ se eligen y numeran algunos puntos.

Las intersecciones de los arcos de centros *F* y *F'* y radios $\overline{1V}$ y $\overline{1V'}$ son los puntos *A* y *A'* de la elipse. Intercambiando los radios se obtienen *A''* y *A'''*.

Se procede análogamente con los puntos 2, 3,... y con *O* que permite determinar los vértices *W* y *W'*. Se traza la curva que pasa por los puntos obtenidos a mano alzada o con plantilla.

1.3. Construcción de la elipse por afinidad a partir de los ejes

Se parte de los ejes *VV'* y *WW'* [Ilustración 3].

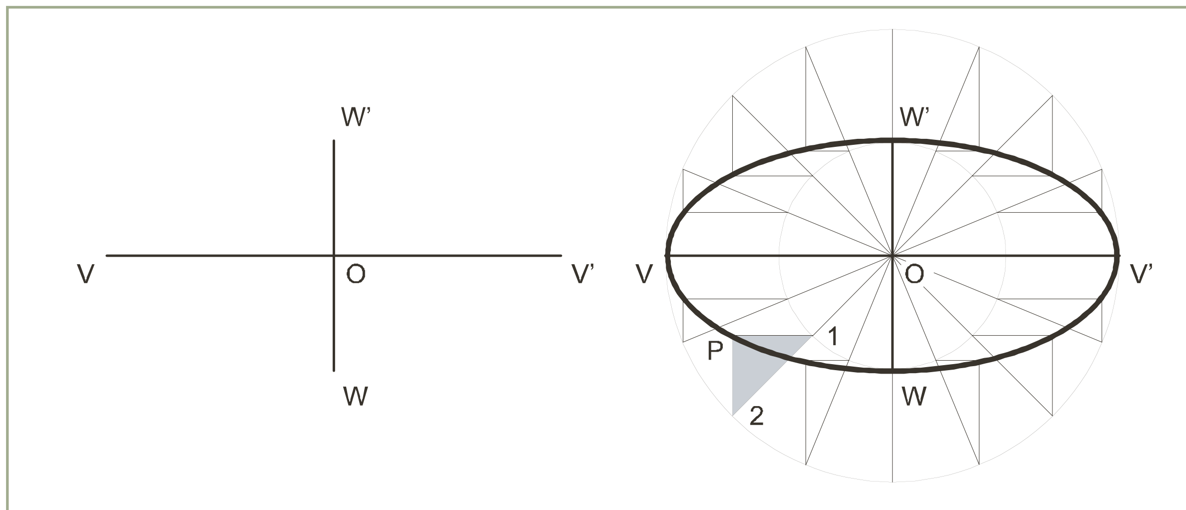
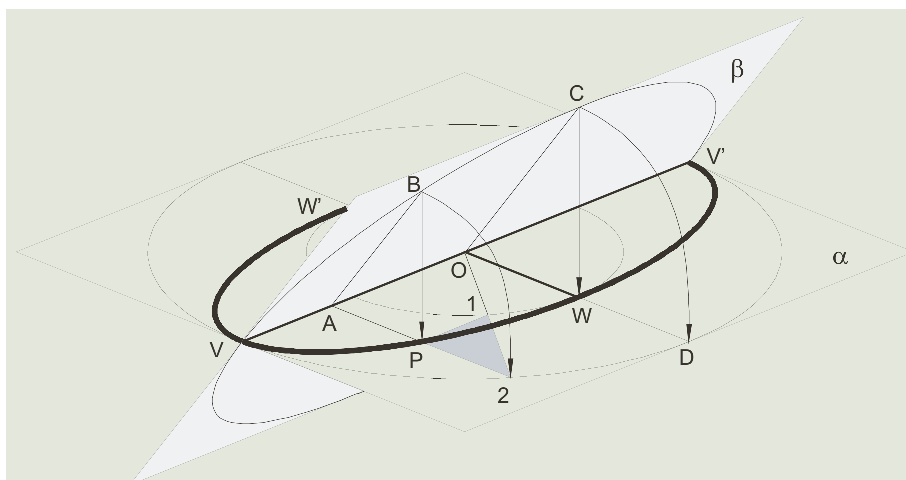


Ilustración 3 Animación

Se trazan la circunferencia principal y la de diámetro 2*b*. Cualquier semirrecta con origen en *O* corta a las dos circunferencias en 1 y 2. Las paralelas a los ejes que pasan por 1 y 2 determinan un punto genérico *P*.

Obtenidos suficientes puntos por este procedimiento se traza la curva que pasa por ellos.



En la figura se ha dibujado la construcción de la Ilustración 3 situada sobre un plano α visto en perspectiva. Se ha añadido un plano β que contiene una circunferencia, cuya proyección sobre α es la elipse. Al girar β alrededor de *VV'*, dicha circunferencia coincide con la principal.

Los puntos *C*, *B* se giran hasta *D*, 2 y se proyectan en *W*, *P* de modo que $\overline{OD} / \overline{OW} = \overline{A2} / \overline{AP}$, ya que los triángulos rectángulos *OCW*, *ABP* son semejantes.

Al girar los puntos *D*, *W* alrededor de *O* describen las circunferencias principal y de diámetro 2*b* hasta situarse en 1, 2. La proporción anterior se convierte en $\overline{O2} / \overline{O1} = \overline{A2} / \overline{AP}$, y debe ser la recta 1*P* paralela a *OA* para que se cumpla el teorema de Thales. Esto justifica la construcción empleada.

1.4. Construcción de la elipse por afinidad a partir de dos diámetros conjugados

Se parte de los diámetros conjugados *AB* y *CD* [Ilustración 4].

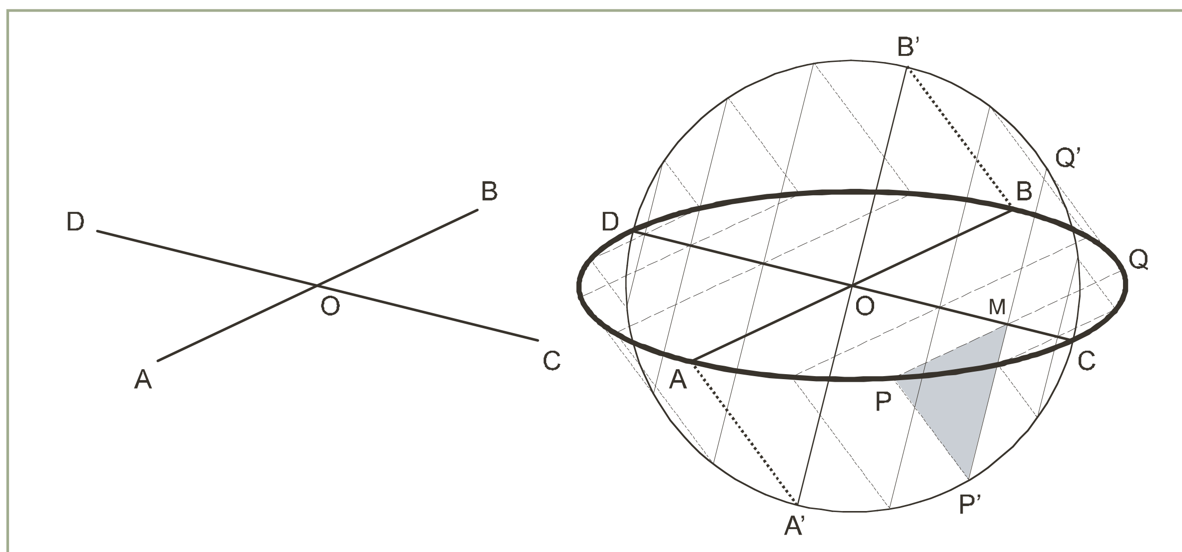


Ilustración 4

Se traza la circunferencia que tiene como diámetro uno de los conjugados, por ejemplo *CD*, y su diámetro perpendicular *A'B'*.

Elegido un punto cualquiera *M* de *CD*, se obtienen dos puntos *P* y *Q* genéricos de la elipse construyendo los triángulos *MP'P* y *MQ'Q* semejantes a *OA'A* y *OB'B*.

Obtenidos suficientes puntos por este procedimiento se traza la curva que pasa por ellos.

La construcción se basa en la afinidad existente entre la circunferencia de diámetro *CD* y la elipse. Ésta queda determinada por el eje de afinidad *CD* y los diámetros afines *A'B'* y *AB*. La dirección de afinidad es la definida por la recta *AA'*.

1.5. Circunferencias focales y tangentes

En la Ilustración 5 se ha dibujado una elipse de focos *F*, *F'* y constante 2*a*, un punto cualquiera de ella *P*, la circunferencia focal de radio 2*a* y centro *F',* y la circunferencia principal de radio *a* y centro *O*.

La suma de distancias de *P* a los focos es $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$ y el punto *P* divide al radio *F'M* = 2*a*, de modo que $\overline{PM} + \overline{PF'} = 2a$. Al comparar ambas expresiones, se observa que $\overline{PM} = \overline{PF}$*;* son los dos lados iguales del triángulo isósceles PFM. Esta relación da lugar a las siguientes propiedades:

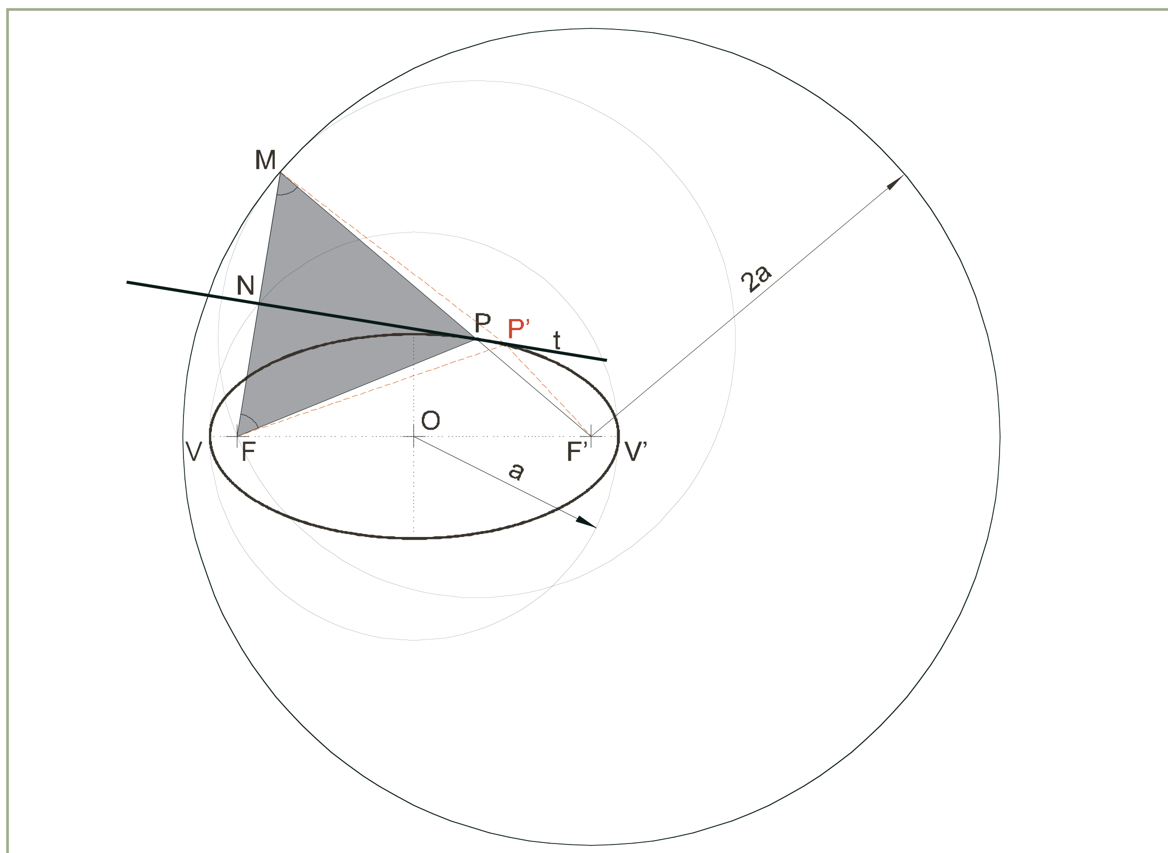


Ilustración 5 Animación

- **La tangente a la elipse en un punto es la mediatriz del segmento definido por un foco y el extremo del radio de la circunferencia focal del otro, que pasa por dicho punto**. Efectivamente, si dicha mediatriz no fuera la tangente tendría otro punto *P'* en común con la elipse siendo $\overline{P'F} = \overline{P'M}$ y $\overline{P'F} + \overline{P'F'} = 2a$, de donde $\overline{P'M} + \overline{P'F'} = 2a$, lo cual es imposible.

- **El centro de la circunferencia que pasa por un foco y es tangente a la circunferencia focal del otro es un punto de la elipse**. La tangencia entre ambas circunferencias asegura que $\overline{PM} + \overline{PF'} = 2a$, por estar los radios alineados y además los radios $\overline{PM} = \overline{PF}$, de donde $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$, que es la condición que satisface cualquier punto *P* de la elipse.

- **El pie de la perpendicular trazada desde un foco a cualquier tangente a la elipse está en la circunferencia principal**. El pie de dicha perpendicular es el punto *N,* que al equidistar de *M* y *F* es homotético de *M* en la homotecia de centro *F* y razón 1/2 definida entre la circunferencia focal y la principal.

1.6. Tangente a la elipse en un punto

Sea *A* el punto, *F*, *F'* los focos y *V*, *V'* los vértices [Ilustración 6]. Se presenta la curva dibujada aunque no es necesaria para la construcción.

Se traza la **circunferencia focal** de uno de los focos, por ejemplo de *F'* y el radio *F'M* que pasa por *A*. La mediatriz *t* del segmento $\overline{FM}$ es la tangente a la elipse en el punto *A*.

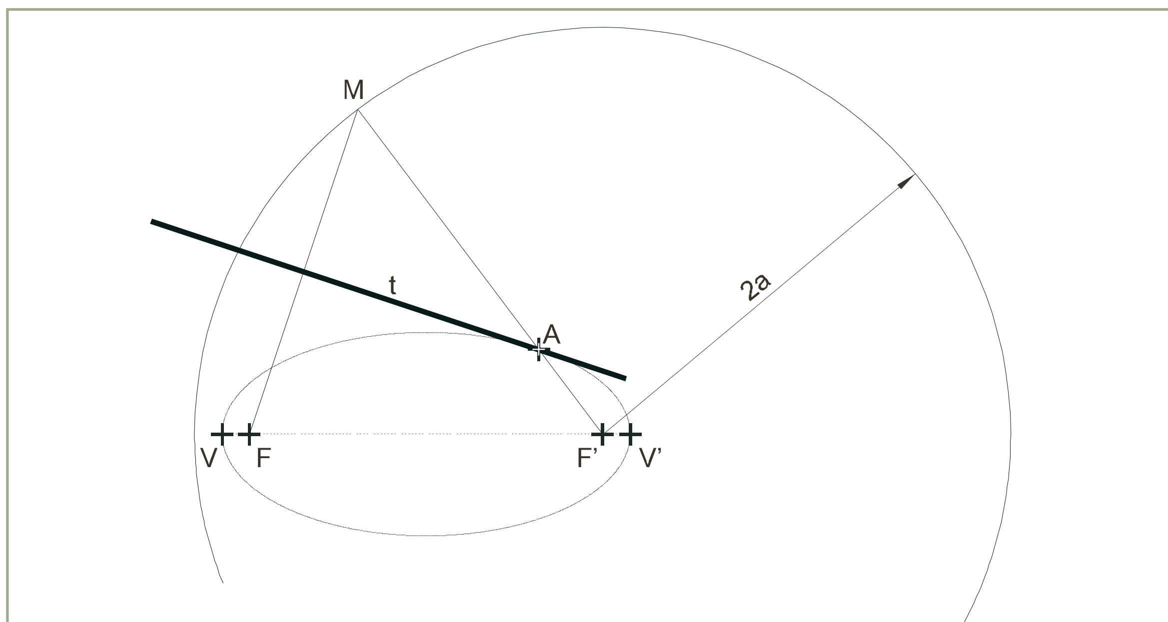


Ilustración 6

1.7. Tangentes a la elipse paralelas a una dirección

Sea *s* la dirección de las tangentes, *F*, *F'* los focos y *V*, *V'* los vértices [Ilustración 7]. Se presenta la curva dibujada aunque no es necesaria para la construcción.

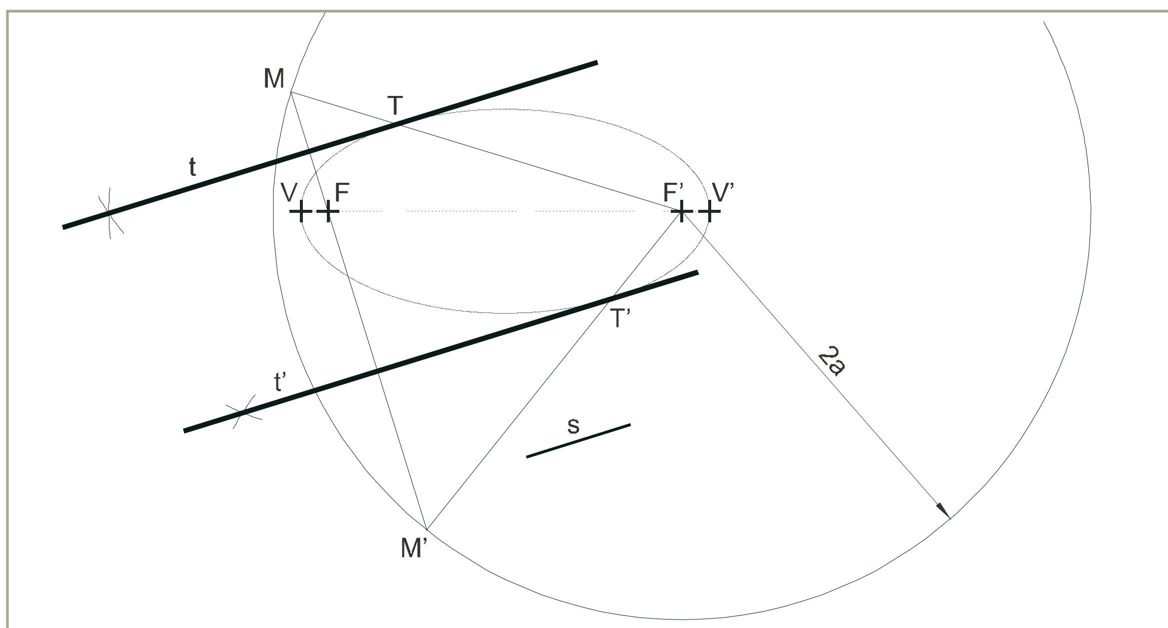


Ilustración 7  Animación 

Se traza la circunferencia focal de uno de los focos, por ejemplo de *F'* y la perpendicular a la dirección *s* por el otro foco *F*, que la corta en los puntos *M, M'*. Las mediatrices *t, t'* de los segmentos $\overline{FM}$, $\overline{FM'}$ son las tangentes a la elipse paralelas a *s*. Los puntos *T, T'* de tangencia con la elipse son los de corte de las tangentes *t, t'* con los radios *F'M, F'M'* de la circunferencia focal.

1.8. Tangentes a la elipse desde un punto exterior

Sea *A* el punto, *F*, *F'* los focos y *V*, *V'* los vértices [Ilustración 8]. Se presenta la curva dibujada aunque no es necesaria para la construcción.

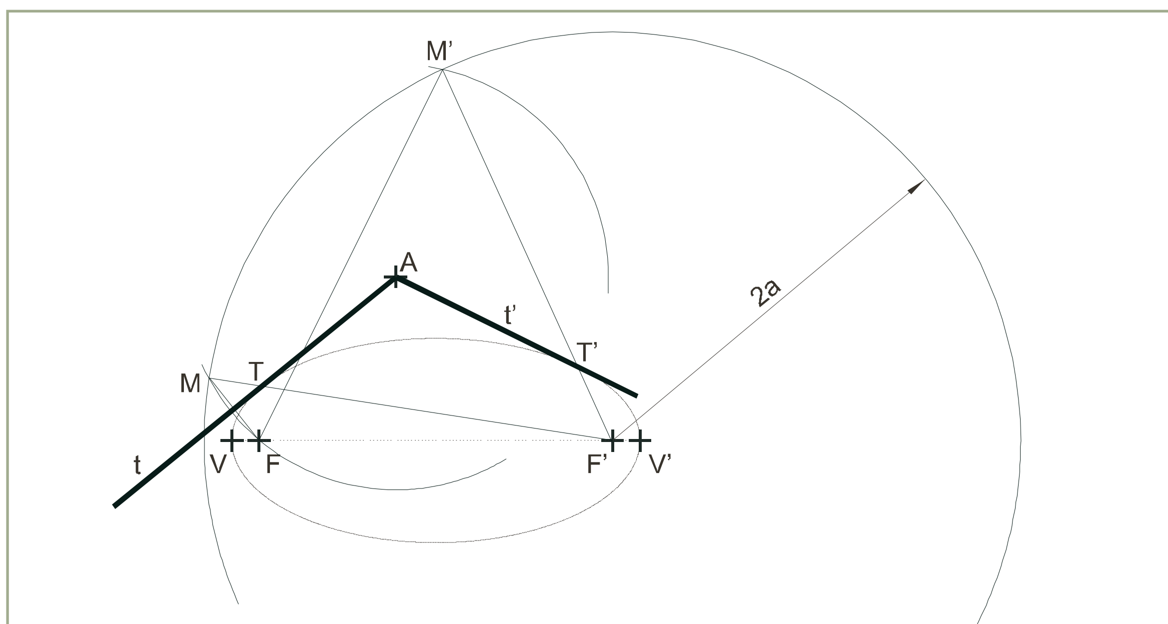


Ilustración 8

Se traza la circunferencia focal de uno de los focos, por ejemplo de *F'* y el arco, de centro *A*, que pasa por el otro foco *F* y que la corta en los puntos *M, M'*. Las mediatrices *t, t'* de los segmentos $\overline{FM}$, $\overline{FM'}$ son las tangentes a la elipse que pasan por *A*. Los puntos *T, T'* de tangencia con la elipse son los de corte de las tangentes *t, t'* con los radios *F'M, F'M'* de la circunferencia focal.

1.9. Intersección de la elipse con una recta

Sea *r* la recta, *F*, *F'* los focos y *V*, *V'* los vértices [Ilustración 9]. Se presenta la curva dibujada aunque no se utiliza en la construcción.

Se traza la circunferencia focal de uno de los focos, por ejemplo de *F'* y se halla el simétrico F_S del otro foco *F*, respecto de la recta *r*. La construcción se reduce así a la de los centros de las circunferencias tangentes a la focal que pasan por *F* y F_S.

Todas las circunferencias que pasan por *F* y F_S comparten el eje radical *e*. Una de ellas c_a, secante a la focal, comparte con ésta el eje radical e_a que corta al eje del haz *e* en el centro radical C_R. Las rectas tangentes desde C_R a la circunferencia focal son ejes radicales que determinan los puntos de tangencia *T*, *T'* de las circunferencias cuyos centros *I*, *I'* son puntos de corte de la recta con la elipse. Éstos están en las alineaciones de *F'* con *T* y *T'* respectivamente.





Ilustración 9

Aplicación

Se desea obtener los elementos de la elipse dadas tres tangentes cualquiera *t, t', t''* y un foco *F*.

Los puntos de corte *N, N', N''* de las tangentes *t, t', t''* con sus perpendiculares trazadas desde *F* pertenecen a la **circunferencia principal**. Obtenido su centro *O* en la intersección de las mediatrices de las cuerdas *NN'* y *NN''* se traza con radio $\overline{ON} = a$. Sus puntos de corte con la recta *OF* son los vértices *V, V'* y el simétrico de *F* respecto de *O* es *F'*.

Los vértices *W, W'* son los puntos de corte de arcos de radio *a* y centros *F, F'*.

2. Parábola

2.1. Definición y elementos

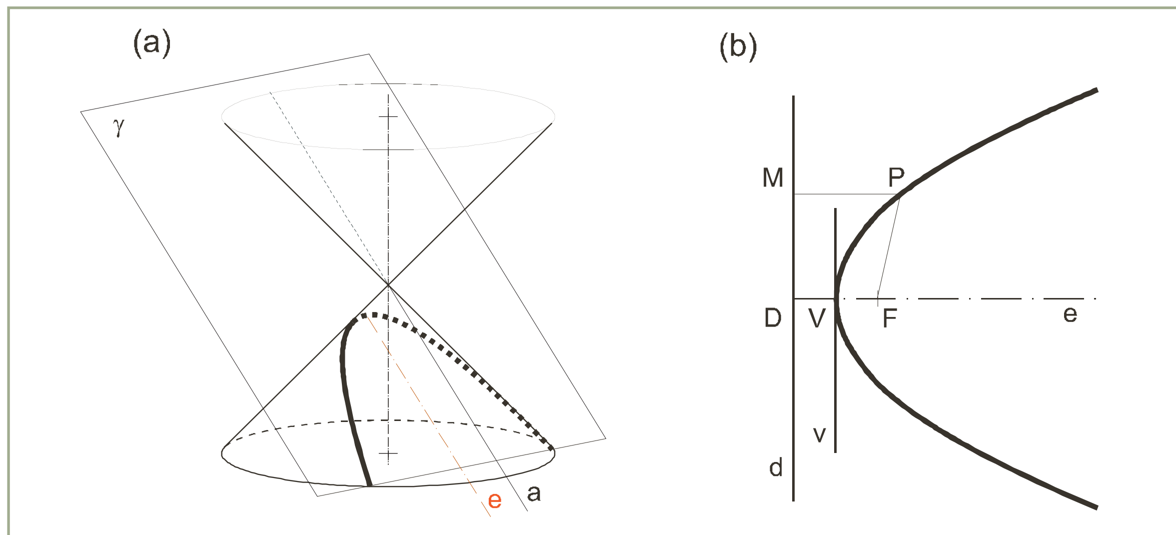


Ilustración 10 Animación (a) Animación (b)

Al seccionar la superficie cónica por un plano paralelo a una de las generatrices se obtiene una **parábola**. En la Ilustración 10 a, la generatriz *a* es paralela al eje *e* de la parábola, que tiene un punto en el infinito. Se define así:

La parábola es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta llamada directriz. La curva queda determinada dando la distancia $\overline{DF}$ entre el foco y la directriz. Para un punto genérico *P* será $\overline{PF} = \overline{PM}$ siendo *F* el foco, *d* la directriz y *M* el pie de la perpendicular trazada desde *P* a ésta.

Los elementos característicos de la parábola, que pueden verse en la Ilustración 10 b, son:

- **Directriz** *d* y **foco** *F*.
- **Vértice** *V*, equidistante de la directriz y el foco.
- **Eje** *e*, que contiene al foco y al vértice, y es perpendicular a la directriz. Es eje de simetría de la parábola.
- **La tangente en el vértice** *v*. Es perpendicular al eje.

2.2. Construcción de la parábola por puntos

Sea $\overline{VF}$ la distancia entre el vértice y el foco [Ilustración 11].

Se trazan la directriz y el eje perpendiculares entre sí, llevando sobre éste $\overline{DV}$ y $\overline{VF}$ iguales, a partir de D.

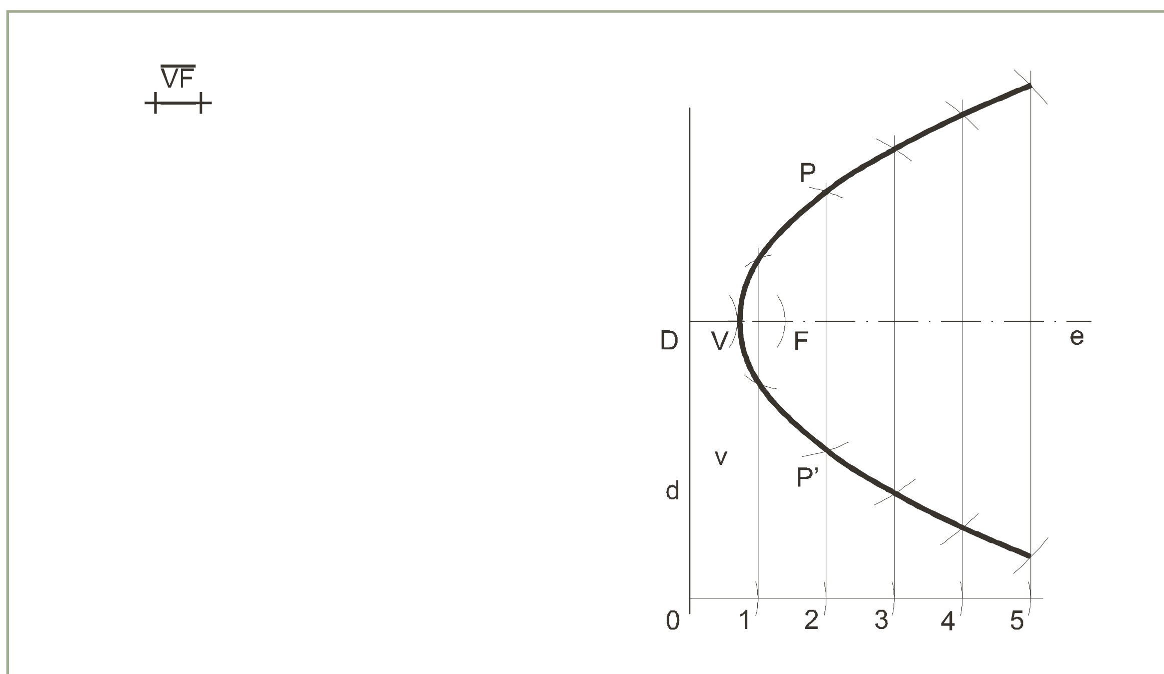


Ilustración 11  Animación 

Se traza una paralela al eje, eligiendo y numerando puntos de ella a partir de la directriz, cuidando de que la primera división sea mayor que $\overline{DV}$.

Dos puntos genéricos *P* y *P'* se obtienen en las intersecciones de la circunferencia de centro *F* y radio 02 con la paralela a la directriz por la división 2. Obtenidos suficientes puntos por este procedimiento se traza la curva que pasa por ellos, a mano alzada o con plantilla.

2.3. Construcción de la parábola mediante haces proyectivos

Sea *P* un punto de la parábola, *V* su vértice y *e* el eje. [Ilustración 12]

Se traza la paralela al eje por *P* y su perpendicular por *V*, que se cortan en *A*. Se dividen $\overline{AP}$ y $\overline{AV}$ en el mismo número de partes iguales, numerando las divisiones de $\overline{AP}$ a partir de *A* y las de $\overline{AV}$ desde *V*.

Se obtienen puntos del arco *PV* en las intersecciones del rayo *V*1 con la paralela al eje desde 1', del rayo *V*2 con la paralela desde 2'... Se procede análogamente con el arco *VP'*, siendo *P'* el simétrico de *P* respecto al eje.

La parábola se traza a mano alzada o con plantilla, uniendo los puntos obtenidos.

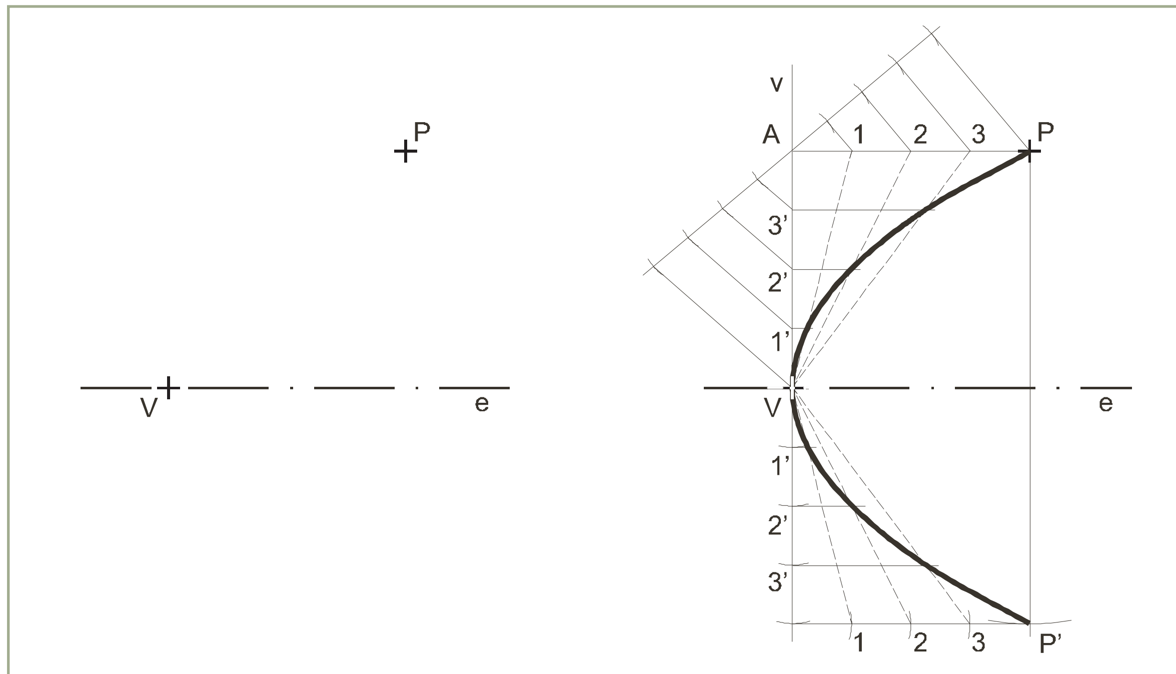
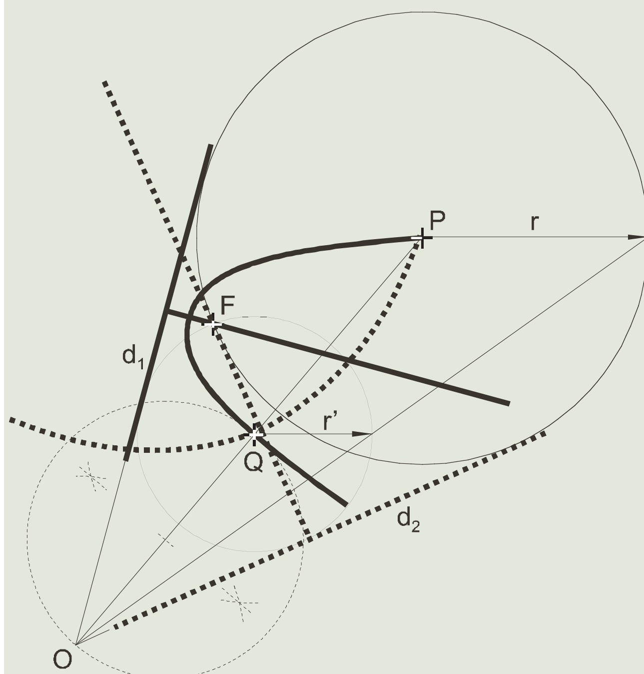


Ilustración 12  Animación 

Aplicación



Se desea obtener el eje y la directriz de la parábola conocido su foco *F* y los puntos *P* y *Q*.

Con centro en los puntos *P* y *Q* y radios $\overline{PF}$ y $\overline{QF}$, se trazan dos circunferencias. Las tangentes comunes a ambas son las dos directrices posibles d_1 y d_2. Se obtienen mediante la homotecia de centro *O*, definida por los radios paralelos *r* y *r'*, hallando las tangentes desde *O* a la circunferencia de centro *Q*, que también lo serán a la de centro *P*.

Los dos ejes posibles serán las perpendiculares desde *F* a d_1 o d_2.

2.4. Propiedades de las tangentes

En la ilustración 13 se ha dibujado una parábola de foco *F* y distancia entre foco y vértice $\overline{VF}$, la directriz *d* y un punto cualquiera de la parábola *P*.

La distancia de *P* respecto del foco y de la directriz es la misma, así $\overline{PM} = \overline{PF}$ son los dos lados iguales del triángulo isósceles *PFM*. Esta relación da lugar a las siguientes propiedades:

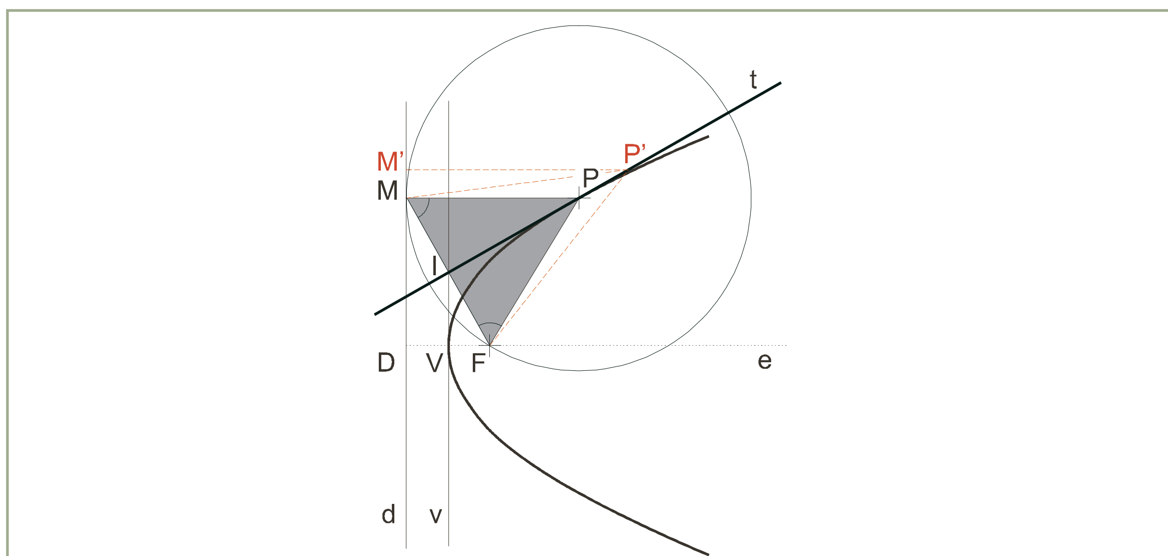


Ilustración 13  Animación 

- **La tangente en un punto de la parábola es la mediatriz del segmento definido por el foco y el pie de la perpendicular a la directriz trazada desde él**. Efectivamente, si dicha mediatriz *t* no fuera la tangente tendría otro punto *P'* en común con la elipse. Por pertenecer *P'* a ella sería $\overline{P'F} = \overline{P'M'}$, y al ser *P'* un punto de la mediatriz de $\overline{FM}$ también , de donde $\overline{P'M'} = \overline{P'M}$; lo cual es imposible.

- **El centro de la circunferencia tangente a la directriz, que pasa por el foco, es un punto de la parábola**. Al ser los radios $\overline{PM} = \overline{PF}$ y $\overline{PF}$ la distancia de *P* al foco, bastará que $\overline{PM}$ sea la distancia de *P* a la directriz para que éste sea un punto de la parábola. La tangencia entre circunferencia y directriz asegura que el radio $\overline{PM}$ es perpendicular a ésta, por lo que coincidirá con dicha distancia.

- **El pie de la perpendicular trazada desde el foco a cualquier tangente a la parábola está en la tangente en el vértice**. La proporción $\frac{\overline{MF}}{\overline{IF}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{VF}}$, deducida de las igualdades $\overline{MI} = \overline{IF}$ y $\overline{DV} = \overline{VF}$ establece, según el teorema de Thales, el paralelismo de la recta *VI* con la directriz, luego ésta debe ser la tangente *v* en el vértice *V*.

2.5. Tangente a la parábola en un punto

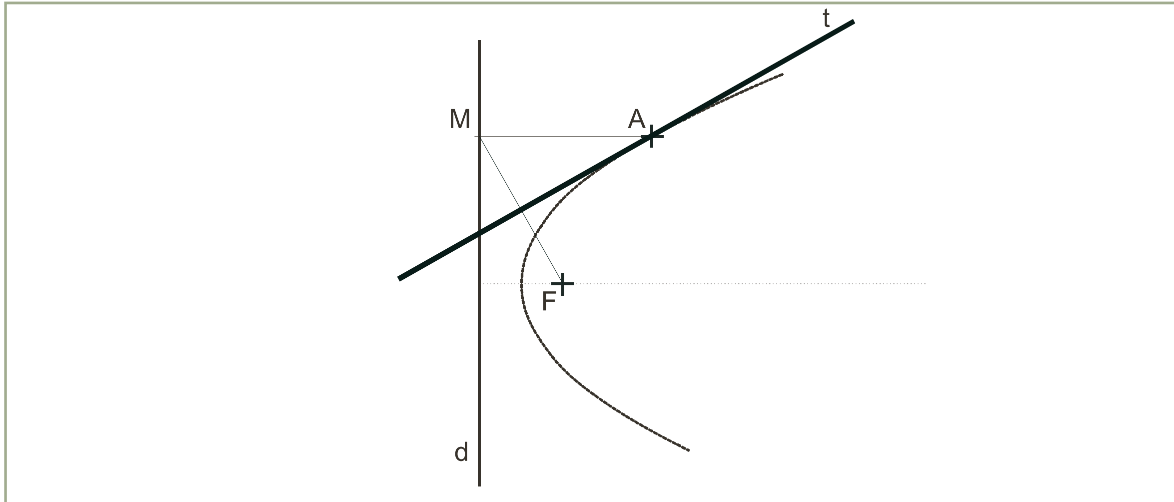


Ilustración 14

Sea *A* el punto, *F* el foco y *d* la directriz [Ilustración 14]. Se presenta la curva dibujada aunque no es necesaria para la construcción.

Se traza la perpendicular a la directriz que pasa por *A* y la corta en *M*. La mediatriz *t* del segmento $\overline{FM}$ es la tangente a la parábola en el punto *A*.

2.6. Tangente a la parábola paralela a una dirección

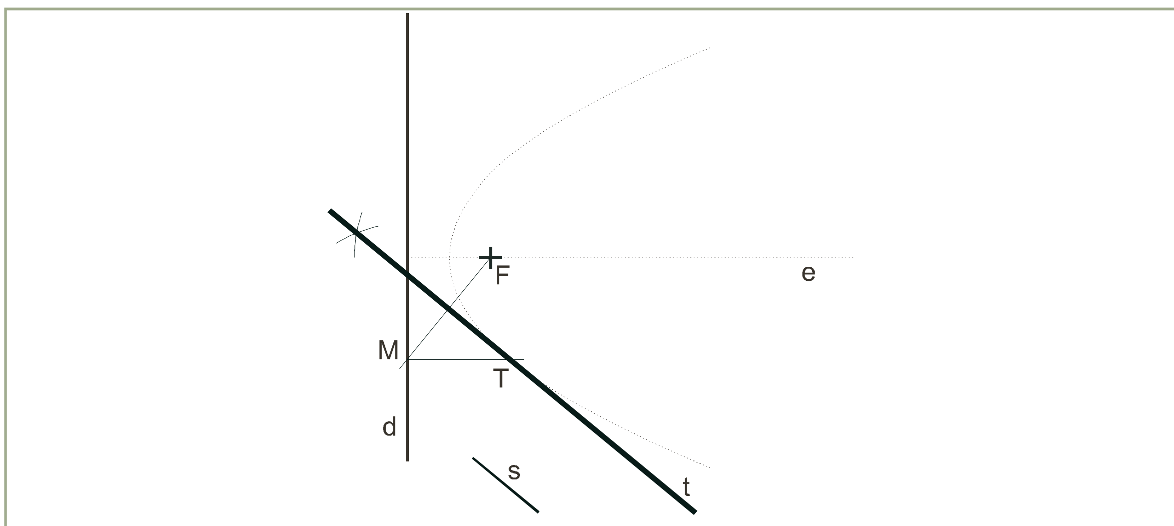


Ilustración 15

Sea *s* la dirección, *F* el foco y *d* la directriz [Ilustración 15]. En la ilustración aparecen la curva y su eje, aunque no son necesarios para la construcción.

Se traza la perpendicular a la dirección *s* que pasa por el foco *F* y corta a la directriz en *M*. La mediatriz *t* del segmento $\overline{FM}$ es la tangente a la parábola. El punto *T* de tangencia es el de corte con la tangente *t* de la perpendicular a la directriz trazada desde *M*.

2.7. Tangentes a la parábola desde un punto exterior

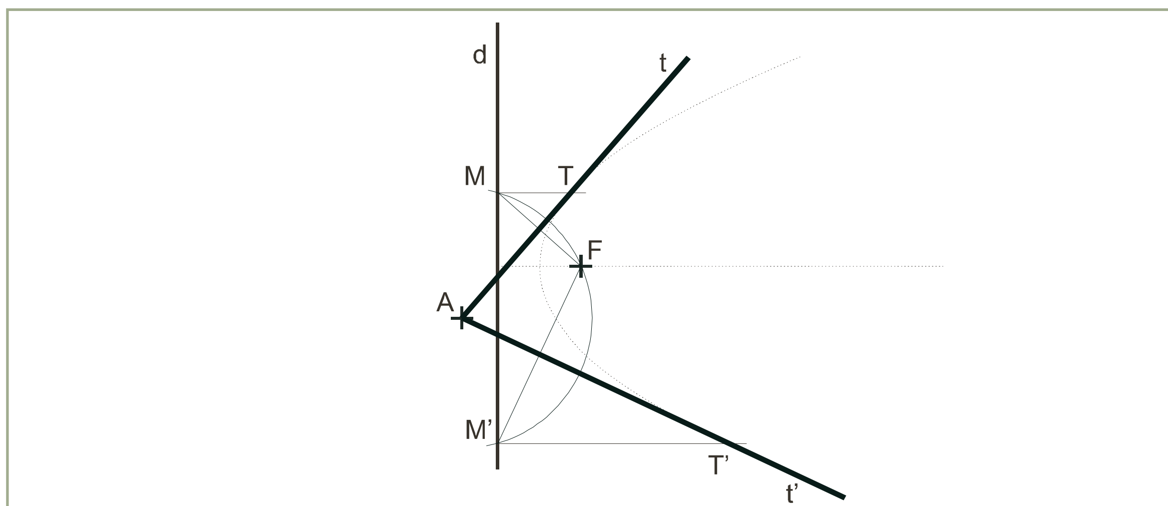


Ilustración 16

Sea *A* el punto, *F* el foco y *d* la directriz [Ilustración 16]. En la ilustración aparecen la curva y su eje, aunque no son necesarios para la construcción.

Se traza el arco de centro *A* que pasa por el foco *F* y corta a la directriz en *M, M'*. Las mediatrices *t, t'* de los segmentos $\overline{FM}$, $\overline{FM'}$ son las tangentes a la parábola. Los puntos *T, T'* de tangencia son los de corte con las tangentes *t, t'* de las perpendiculares a la directriz trazadas desde *M* y *M'*.

2.8. Intersección de la parábola con una recta

Sea *r* la recta, *F* el foco y *d* la directriz [Ilustración 17]. En la ilustración aparecen la curva y su eje, aunque no son necesarios para la construcción.

Se obtiene el simétrico F_s del foco *F*, reduciéndose la construcción a la de los centros de las circunferencias tangentes a la directriz que pasan por *F* y F_s.

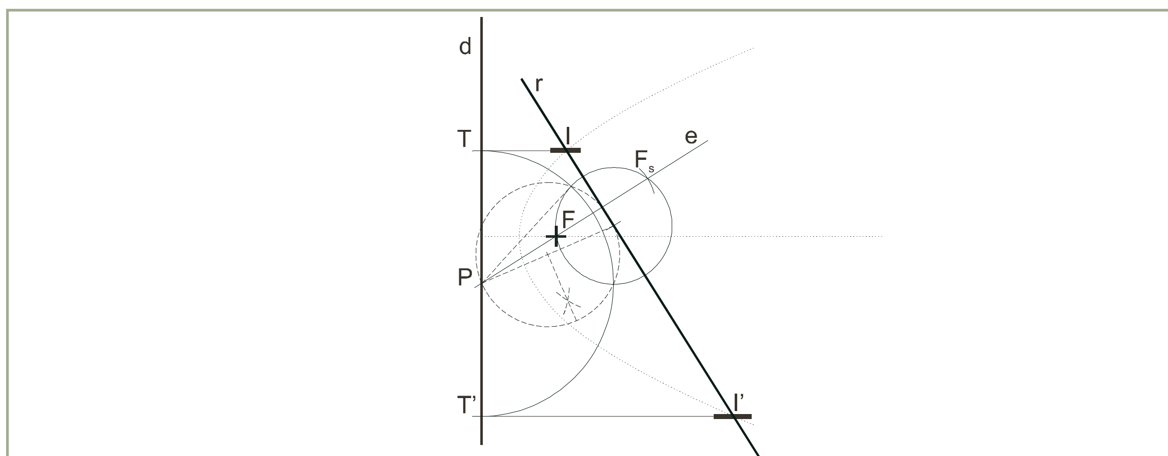
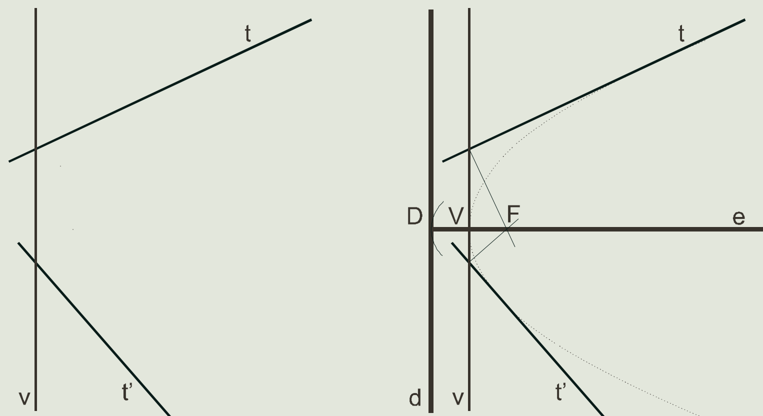


Ilustración 17

Todas las circunferencias que pasan por *F* y F_s comparten el eje radical *e*, que corta en *P* a la directriz *d*. La recta tangente desde *P* a cualquier circunferencia que pase por *F* y F_s es el segmento representativo de la potencia, que trasladado sobre la directriz *d*, en ambos sentidos a partir de *P*, determina los puntos de tangencia *T* y *T'* de las circunferencias cuyos centros *I*, *I'* son puntos de corte de la recta con la parábola. Estos están en las perpendiculares a la directriz *d* trazadas desde *T* y *T'* respectivamente.

Aplicación



Se desean obtener los elementos de la parábola dadas dos tangentes cualesquiera *t, t'* y la tangente en el vértice *v*.

Se trazan dos perpendiculares a las tangentes *t, t'* por los puntos de corte de éstas con la tangente en el vértice *v*, que se cortan en el foco *F*. La perpendicular por el foco a la tangente *v* es el eje *e* de la parábola, que la corta en el vértice *V*. Llevando $\overline{VD} = \overline{VF}$ sobre el eje *e* mediante un arco se obtiene *D*. La directriz *d* pasa por *D* y es perpendicular al eje.

3. Hipérbola

3.1. Definición y elementos

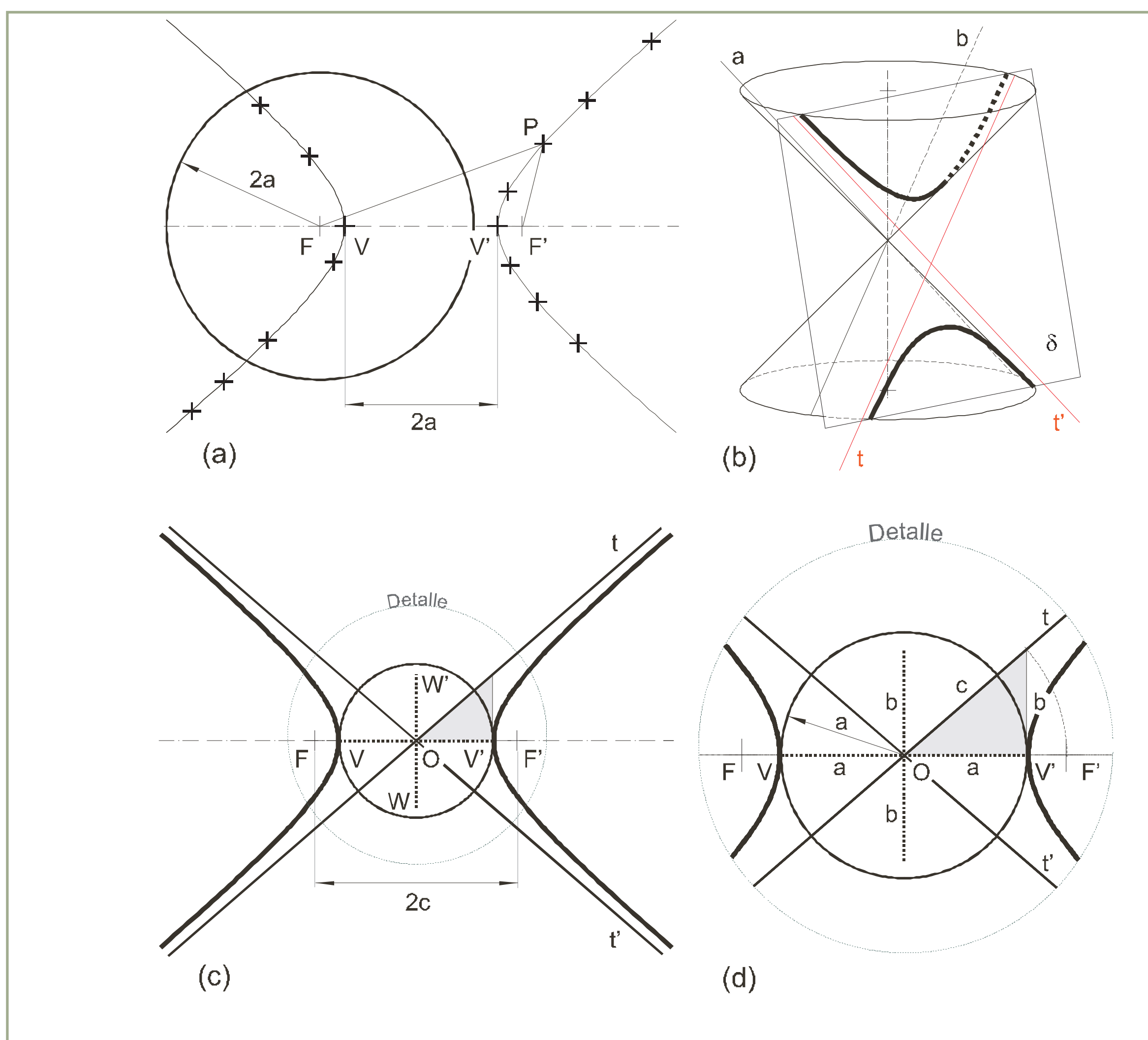


Ilustración 18 Animación a Animación b Animaciones c y d

Al seccionar la superficie cónica por un plano paralelo a dos generatrices se obtiene una **hipérbola**. En la Ilustración 18 b el plano δ es paralelo a las generatrices *a* y *b*, la curva presenta dos ramas, una en cada hoja de la superficie. Las tangentes a la hipérbola en los puntos del infinito *t* y *t'*, llamadas **asíntotas**, son las paralelas a las generatrices *a* y *b*. La curva se define así:

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante. Así pues, una hipérbola está determinada por la distancia entre los focos 2*c* y la constante 2*a*. Para un punto genérico *P* [Ilustración 18 a] será $\overline{PF} - \overline{PF'} = 2a$ siendo *F* y *F'* los focos.

Los elementos característicos de la hipérbola [Ilustración 18 a, c, d] son:

- Los **vértices** *V*, *V′*, que están alineados con *F* y *F′*. La distancia entre ellos es 2*a* ya que $\overline{VF'} - \overline{VF} = \overline{VV'} = 2a$.
- La hipérbola tiene dos ejes, el **real** *VV′* de longitud 2a y el **imaginario** *WW′* de longitud 2*b*, que son ejes de simetría de la hipérbola y se cortan en su **centro** *O*, que a su vez es centro de simetría.
- En la Ilustración 18 d, puede verse el triángulo rectángulo formado con las distancias *a*, *b* como catetos y *c* de hipotenusa. Esta se superpone a la **asíntota** *t*, por lo que es un buen método para obtenerla.
- **Circunferencia principal** es la que tiene como radio *a* y centro el de la hipérbola.
- **Circunferencia focal** es la que tiene como radio 2*a* y centro en un foco.

3.2. Construcción de la hipérbola por puntos. Obtención de ejes y asíntotas

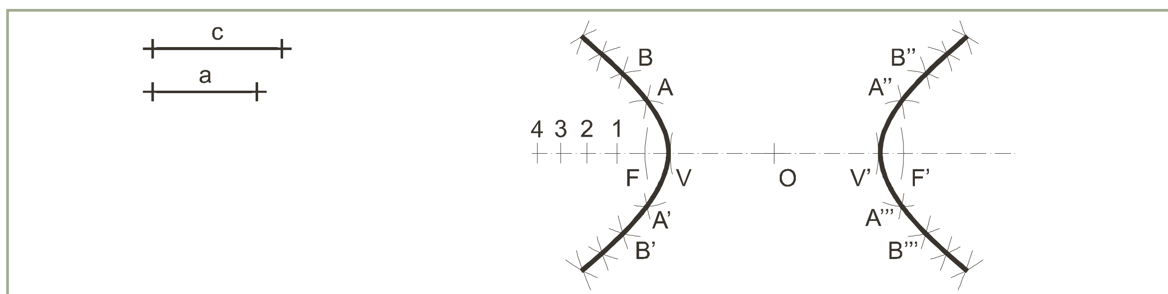


Ilustración 19 Animación

Sea *a* el semieje mayor y *c* la semidistancia focal [Ilustración 19].

Se elige el centro *O* de la hipérbola sobre una recta cualquiera y con centro en él se trazan arcos de radios *a* y *c* que la cortan en los vértices y focos. Sobre el eje real, a la izquierda de *F*, se eligen y numeran algunos puntos.

Las intersecciones de los arcos de centros *F* y *F′* y radios $\overline{1V}$ y $\overline{1V'}$ son los puntos *A* y *A′* de la hipérbola. Intercambiando los radios se obtienen *A″* y *A‴*. Se procede análogamente con los puntos 2, 3... y se traza la curva que pasa por los puntos obtenidos, a mano alzada o con plantilla.

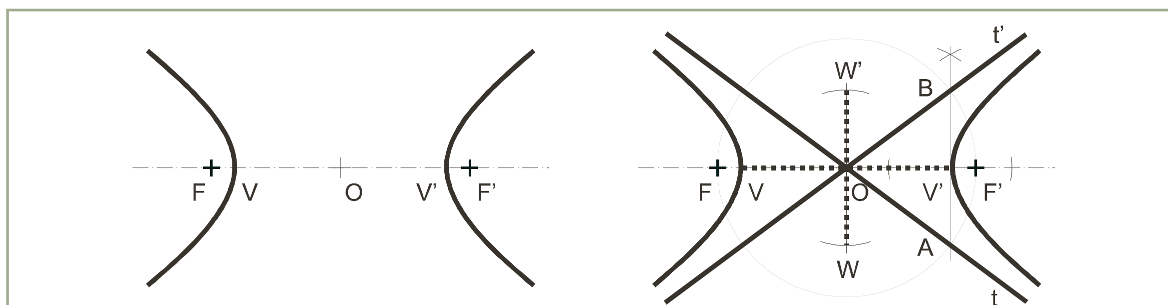
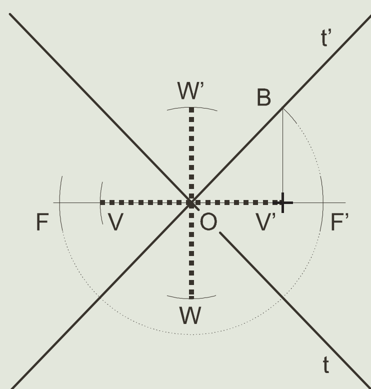


Ilustración 20 Animación

Para obtener las asíntotas [Ilustración 20] se trazan dos arcos de centro *O* y radio *c*, que cortan a la perpendicular al eje real por *V′* en los puntos *A* y *B*. Las asíntotas son las rectas *OA* y *OB*.

El eje real es *VV′* y el eje imaginario *WW′* es perpendicular a él y pasa por *O*. Sus extremos se determinan trazando los arcos de radio $\overline{V'B}$ y centro *O*.

Aplicación



Se desean obtener los ejes y focos de la hipérbola conocidas sus asíntotas *t*, *t′* y el vértice *V′*.

La perpendicular por *V′* a la recta *OV′* corta a *t′* en *B*. Se traza la circunferencia de centro *O* y radio *OB* que corta al eje en los focos *F* y *F′*.

V′ es simétrico de *V* respecto a *O*.

El eje real es *VV′* y el eje imaginario *WW′* se determina cortando a la perpendicular a *VV′* por *O* mediante los arcos de radio $\overline{V'B}$ y centro *O*.

3.3. Circunferencias focales y tangentes

En la ilustración 21 se ha dibujado una hipérbola de focos *F*, *F’* y constante 2*a*, un punto cualquiera de ella *P*, la circunferencia focal de radio 2*a* y centro *F,* y la circunferencia principal de radio *a* y centro *O*.

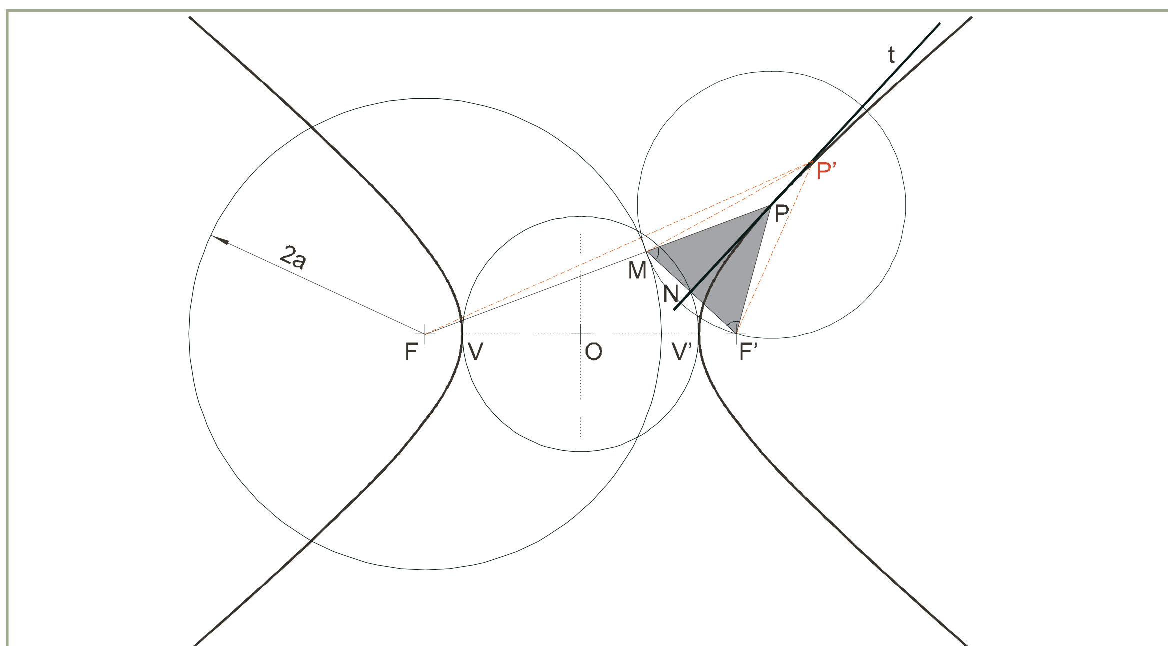


Ilustración 21  **Animación** 

La diferencia de distancias de *P* a los focos es $\overline{PF} - \overline{PF'} = 2a$ y al ser $\overline{FM} = 2a$ *un radio de la circunferencia focal, será* $\overline{PF} - \overline{PM} = 2a$. Al comparar ambas expresiones se observa que $\overline{PM} = \overline{PF'}$ son los dos lados iguales del triángulo isósceles *PF'M*. Esta relación da lugar a las siguientes propiedades:

- **La tangente a la hipérbola en un punto es la mediatriz del segmento definido por un foco y el extremo del radio de la circunferencia focal del otro, cuya prolongación pasa por dicho punto**. Efectivamente, si dicha mediatriz no fuera la tangente tendría otro punto *P'* en común con la hipérbola siendo $\overline{P'F'} = \overline{P'M}$ y $\overline{P'F} - \overline{P'F'} = 2a$, de donde $\overline{P'F} - \overline{P'M} = 2a$, o bien $\overline{P'F} = \overline{P'M} + 2a$, lo cual es imposible.
- **El centro de la circunferencia que pasa por un foco y es tangente a la circunferencia focal del otro es un punto de la hipérbola**. La tangencia entre ambas circunferencias asegura que $\overline{PF} = \overline{PM} + 2a$ por estar los radios alineados y además los radios $\overline{PM} = \overline{PF'}$, de donde $\overline{PF} = \overline{PF'} + 2a$, expresión que conduce a la condición $\overline{PF} - \overline{PF'} = 2a$, que satisface cualquier punto *P* de la hipérbola.
- **El pie de la perpendicular trazada desde un foco a cualquier tangente a la hipérbola está en la circunferencia principal**. El pie de dicha perpendicular es el punto *N,* que al equidistar de *M* y *F'* es homotético de *M* en la homotecia de centro *F'* y razón 1/2 definida entre la circunferencia focal y la principal.

3.4. Tangente a la hipérbola en un punto

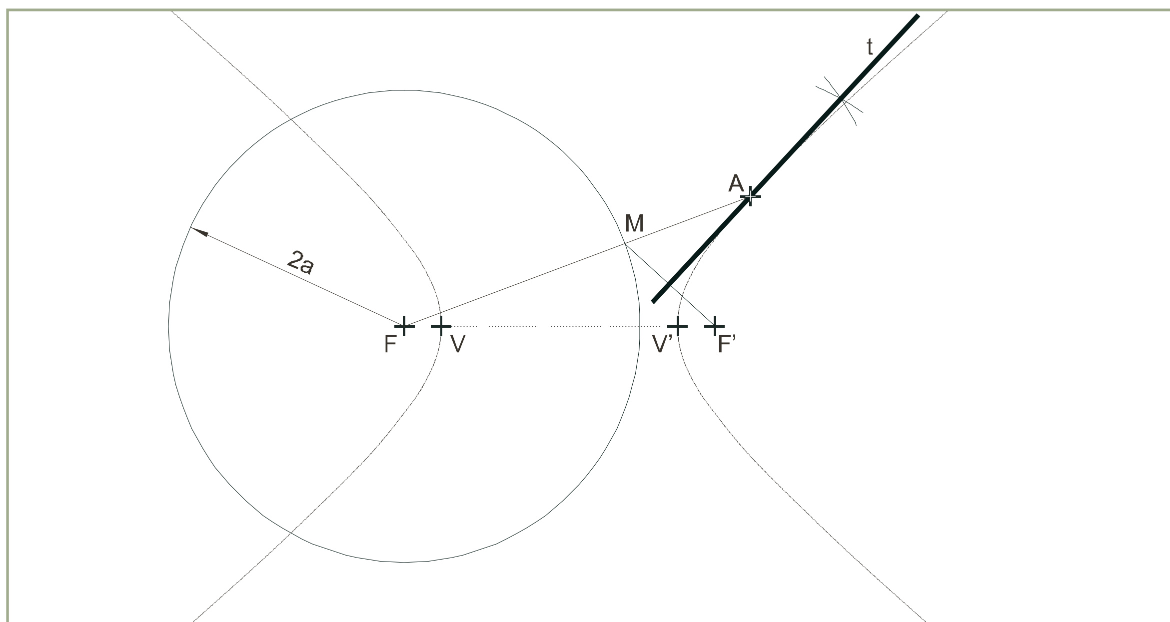


Ilustración 22

Sea *A* el punto, *F*, *F'* los focos y *V*, *V'* los vértices [Ilustración 22]. Se presenta la curva dibujada aunque no es necesaria para la construcción.

Se traza la circunferencia focal de uno de los focos, por ejemplo de *F* y el radio *FM* que pasa por *A*. La mediatriz *t* del segmento $\overline{F'M}$ es la tangente a la hipérbola en el punto *A*.

3.5. Tangentes a la hipérbola paralelas a una dirección

Sea *s* la dirección de las tangentes, *F*, *F'* los focos y *V*, *V'* los vértices [Ilustración 23]. Se presenta la curva dibujada aunque no es necesaria para la construcción.

Se traza la circunferencia focal de uno de los focos, por ejemplo de *F* y la perpendicular a la dirección *s* por el otro foco *F'*, que la corta en los puntos *M, M'*. Las mediatrices *t, t'* de los segmentos $\overline{F'M}$, $\overline{F'M'}$ son las tangentes a la elipse paralelas a *s*. Los puntos *T, T',* de tangencia con la hipérbola, son los de corte de las tangentes *t, t'* con los radios *FM, FM'* de la circunferencia focal.

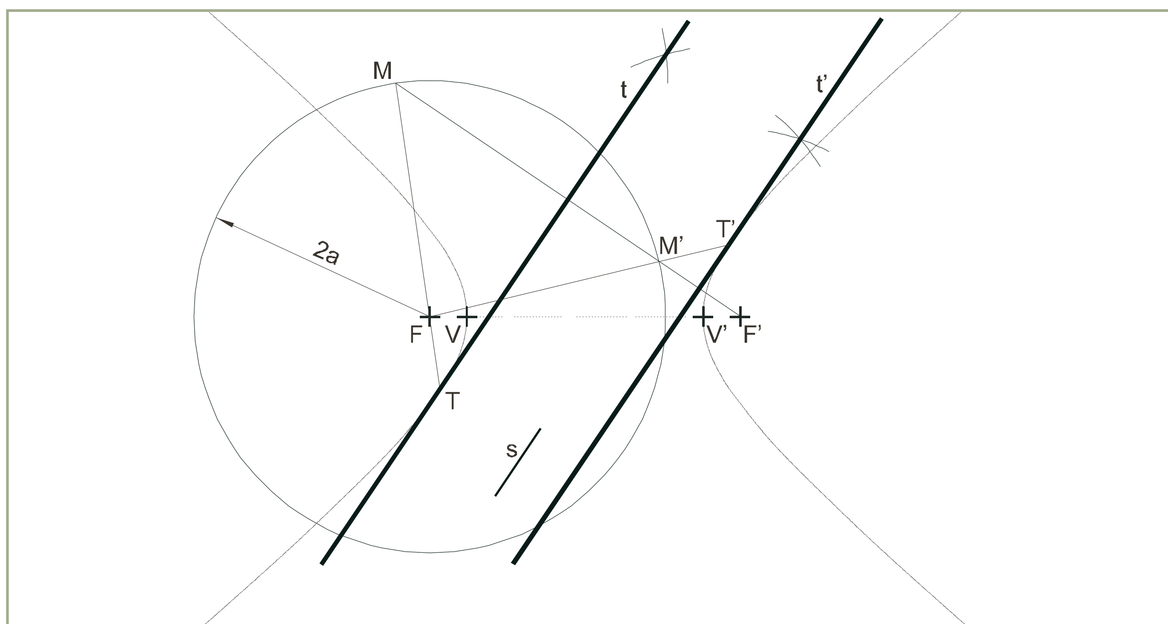


Ilustración 23

3.6. Tangentes a la hipérbola desde un punto exterior

Sea *A* el punto, *F*, *F'* los focos y *V*, *V'* los vértices [Ilustración 24]. Se presenta la curva dibujada aunque no es necesaria para la construcción.

Se traza la circunferencia focal de uno de los focos, por ejemplo de *F,* y el arco de centro *A* que pasa por el otro foco *F'* y que la corta en los puntos *M* y *M'*. Las mediatrices *t, t'* de los segmentos $\overline{F'M}$, $\overline{F'M'}$ son las tangentes a la hipérbola que pasan por *A*. Los puntos *T, T'* de tangencia con la hipérbola son los de corte de las tangentes *t, t'* con los radios *FM, FM'* de la circunferencia focal.

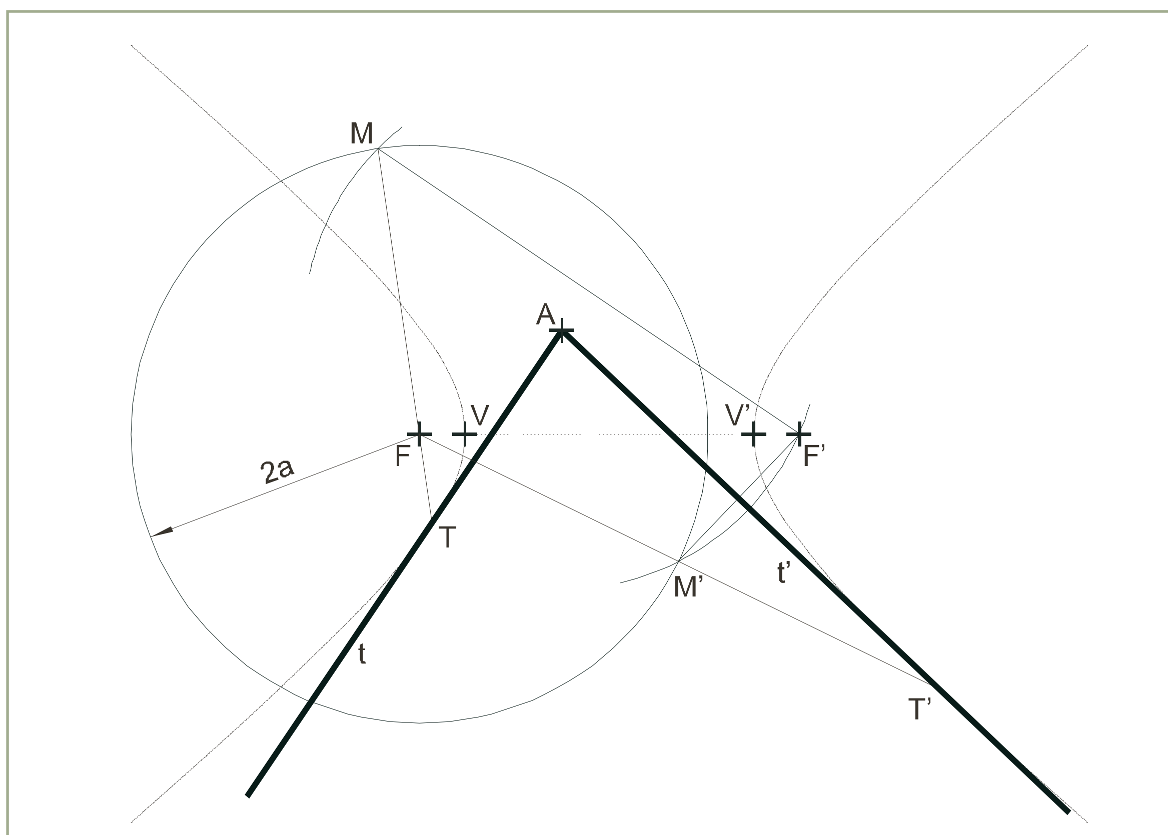


Ilustración 24

3.7. Intersección de la hipérbola con una recta

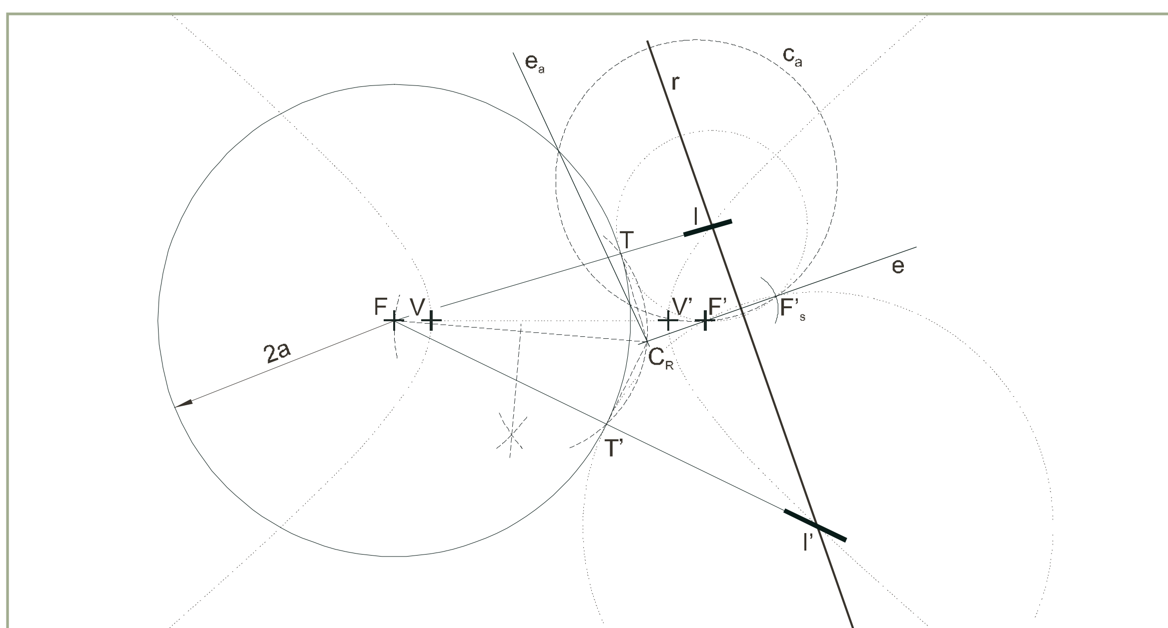


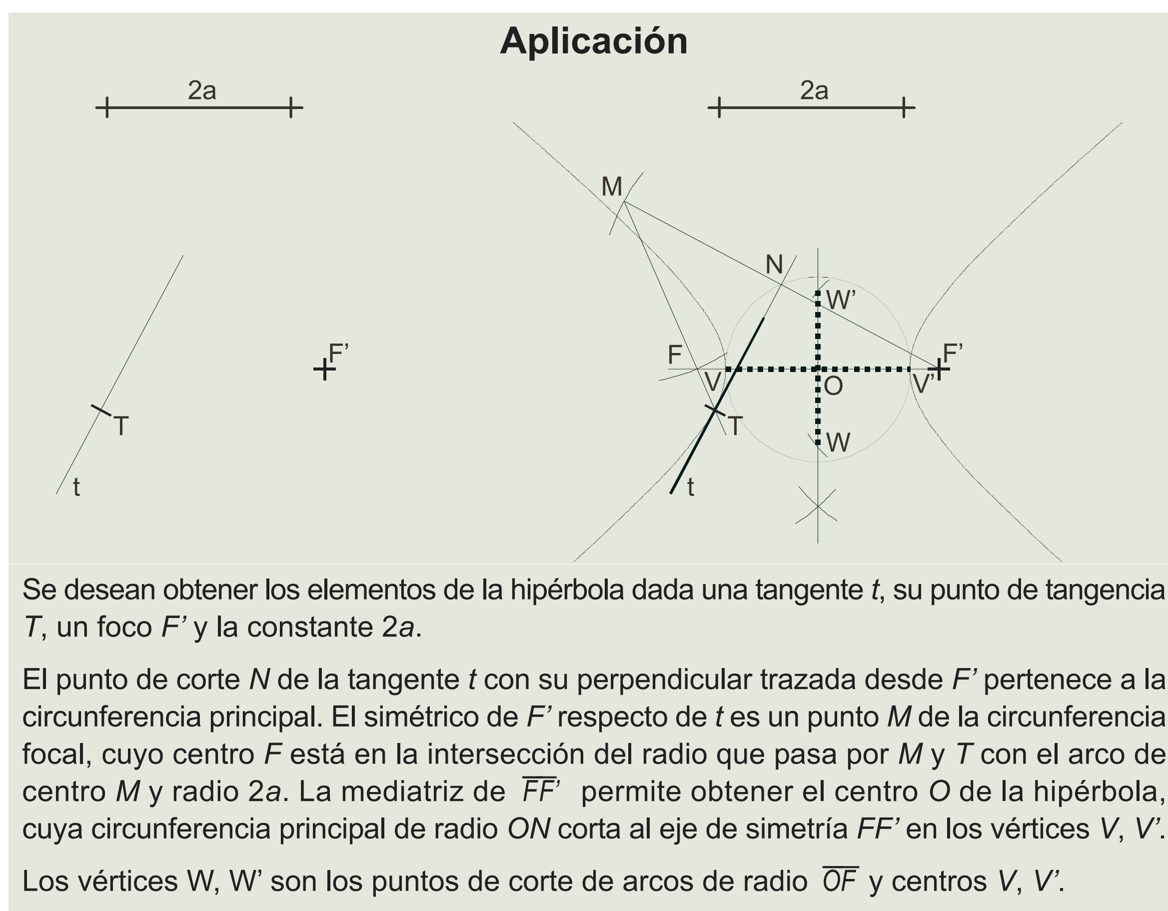
Ilustración 25

Sea *r* la recta, *F*, *F’* los focos y *V*, *V’* los vértices [Ilustración 25]. Se presenta la curva dibujada aunque no se utiliza en la construcción.

Se traza la circunferencia focal de uno de los focos, por ejemplo de *F* y se halla el simétrico F'_S del otro foco *F’* respecto de la recta *r*. La construcción se reduce a la de los centros de las circunferencias tangentes a la focal que pasan por *F’* y F'_S.

Todas las circunferencias que pasan por *F’* y F'_S comparten el eje radical *e*. Una de ellas c_a, secante a la focal, comparte con ésta el eje radical e_a que corta al eje del haz *e* en el centro radical C_R. Las rectas tangentes desde C_R a la circunferencia focal, son ejes radicales que determinan los puntos de tangencia *T*, *T’* de las circunferencias cuyos centros *I*, *I’* son puntos de corte de la recta con la hipérbola. Éstos están en las alineaciones de *F* con *T* y *T’* respectivamente.

Aplicación



Se desean obtener los elementos de la hipérbola dada una tangente *t*, su punto de tangencia *T*, un foco *F’* y la constante 2*a*.

El punto de corte *N* de la tangente *t* con su perpendicular trazada desde *F’* pertenece a la circunferencia principal. El simétrico de *F’* respecto de *t* es un punto *M* de la circunferencia focal, cuyo centro *F* está en la intersección del radio que pasa por *M* y *T* con el arco de centro *M* y radio 2*a*. La mediatriz de $\overline{FF'}$ permite obtener el centro *O* de la hipérbola, cuya circunferencia principal de radio *ON* corta al eje de simetría *FF’* en los vértices *V*, *V’*.

Los vértices W, W’ son los puntos de corte de arcos de radio $\overline{OF}$ y centros *V*, *V’*.

4. Curvas técnicas

4.1. Curvas cíclicas: cicloide normal

Las curvas cíclicas son generadas por un punto de una recta o circunferencia que rueda, sin resbalar, sobre otra recta o circunferencia. La recta o circunferencia móvil se llama **ruleta o generatriz** y rueda sobre una línea llamada **base**.

Cicloide normal es la curva que describe un punto de una circunferencia que rueda, sin resbalar, sobre una recta.

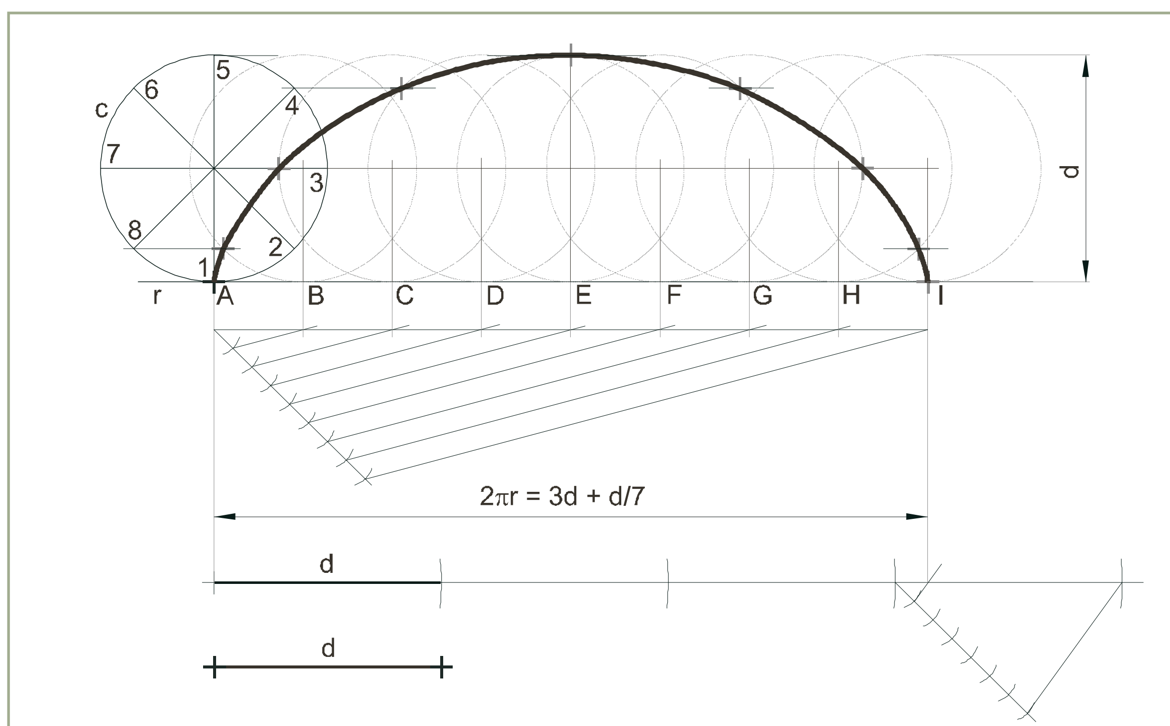


Ilustración 26 Animación

Sea *d* el diámetro de la circunferencia ruleta de una cicloide normal [Ilustración 26].

Se traza una recta base *r* y la circunferencia ruleta *c* tangente en uno de sus puntos *A*.

Se rectifica la circunferencia ruleta, es decir, se obtiene gráficamente el segmento que tiene la misma longitud que la circunferencia de diámetro *d* [Ilustración 26 abajo]. Ésta es $2\pi r = \pi d \approx 3{,}14d \approx 3d + \frac{1}{7}d$ y, llevada sobre la recta base *r,* define el segmento $\overline{AI}$, que reúne todos los puntos de contacto con la ruleta en una vuelta.

Se divide la ruleta en 8 arcos mediante diámetros perpendiculares, paralelos y que formen 45º con la recta base *r*, numerándose los puntos de división en sentido contrario al de giro. Si se deseara mayor precisión en el trazado de la curva se elegiría un número de partes mayor. Se divide $\overline{AI}$ en el mismo número de partes en que hemos dividido la ruleta, nombrando los puntos de división con las letras *A, B, C, …*

Al rodar la ruleta los puntos 2, 3 … entran en contacto con *B, C* … dibujándose las 8 posiciones sucesivas de la ruleta mediante circunferencias tangentes en *B, C, …* En cada una de ellas se sitúa el punto 1, que describe la cicloide normal mediante paralelas a *r* trazadas desde las posiciones iniciales 1, 2 … de los puntos de división.

Por último, se traza una curva que pase por las 9 posiciones del punto 1, a lápiz y mano alzada o con plantilla de curvas.

4.2 Curvas cíclicas: cicloide acortada y alargada

Cicloide acortada o alargada es la curva que describe un punto interior o exterior a una circunferencia que rueda, sin resbalar, sobre una recta y que está solidariamente unido a ella.

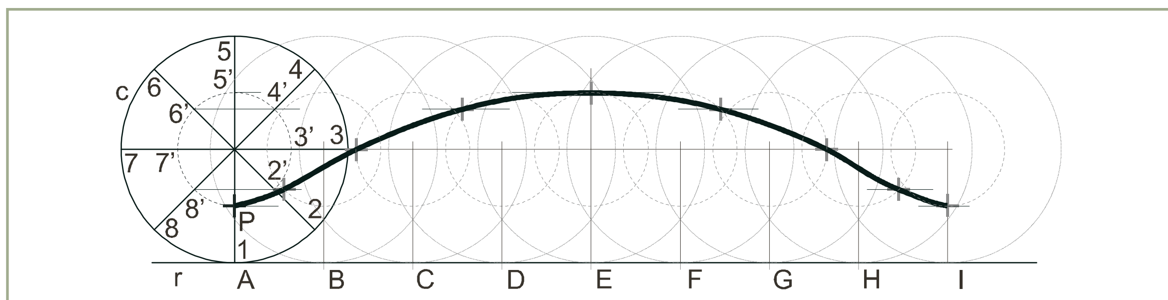


Ilustración 27 Animación

En la construcción de la **cicloide**, consideremos que en lugar del punto 1 es un punto *P* cualquiera de su radio el que genera la curva [Ilustración 27].

Se dibuja sobre la ruleta, para que la acompañe en su movimiento, una circunferencia concéntrica que pasa por *P* y corta a los radios de los puntos de división 1, 2 … en puntos *P,* 2', 3' …, que proporcionan las alturas respecto a la recta base *r* de las posiciones intermedias. Dibujadas las *8* posiciones sucesivas de la ruleta y su circunferencia concéntrica, los puntos de corte de ésta con las paralelas trazadas por *P,* 2', 3' … sitúan las 8 posiciones sucesivas de *P*. La curva que pasa por *P* y por ellas es una cicloide acortada.

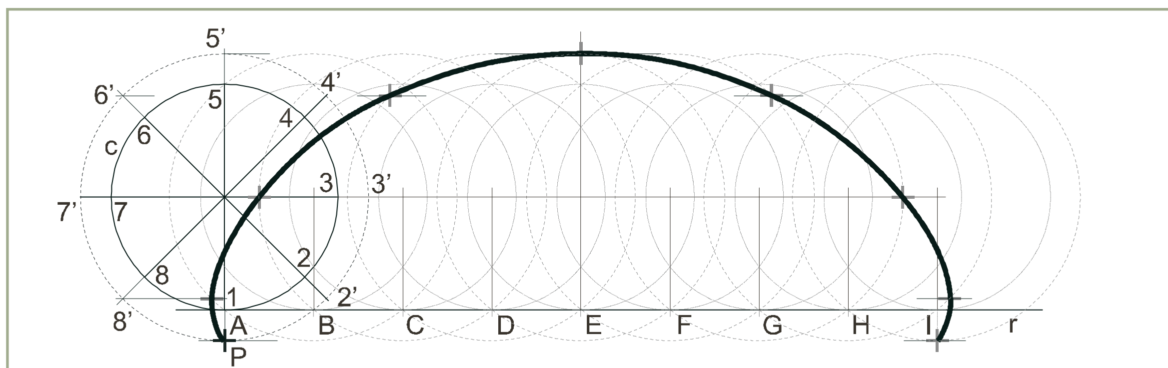


Ilustración 28 Animación

Considérese, por último, que el punto *P* está situado en la prolongación del radio del punto de división 1 de la ruleta y, por tanto, en el exterior de ésta [Ilustración 28].

Procediendo de forma similar a lo expuesto para la cicloide acortada se obtendrían las sucesivas posiciones de *P*. La curva que pasa por ellas es una cicloide alargada.

4.3. Curvas cíclicas: epicicloide

Epicicloide es la curva que describe un punto solidariamente unido a una circunferencia que rueda, sin resbalar, sobre otra circunferencia, exteriormente a ella. Se llamará **normal**, **acortada** o **alargada** según el punto esté en, dentro o fuera de la circunferencia ruleta.

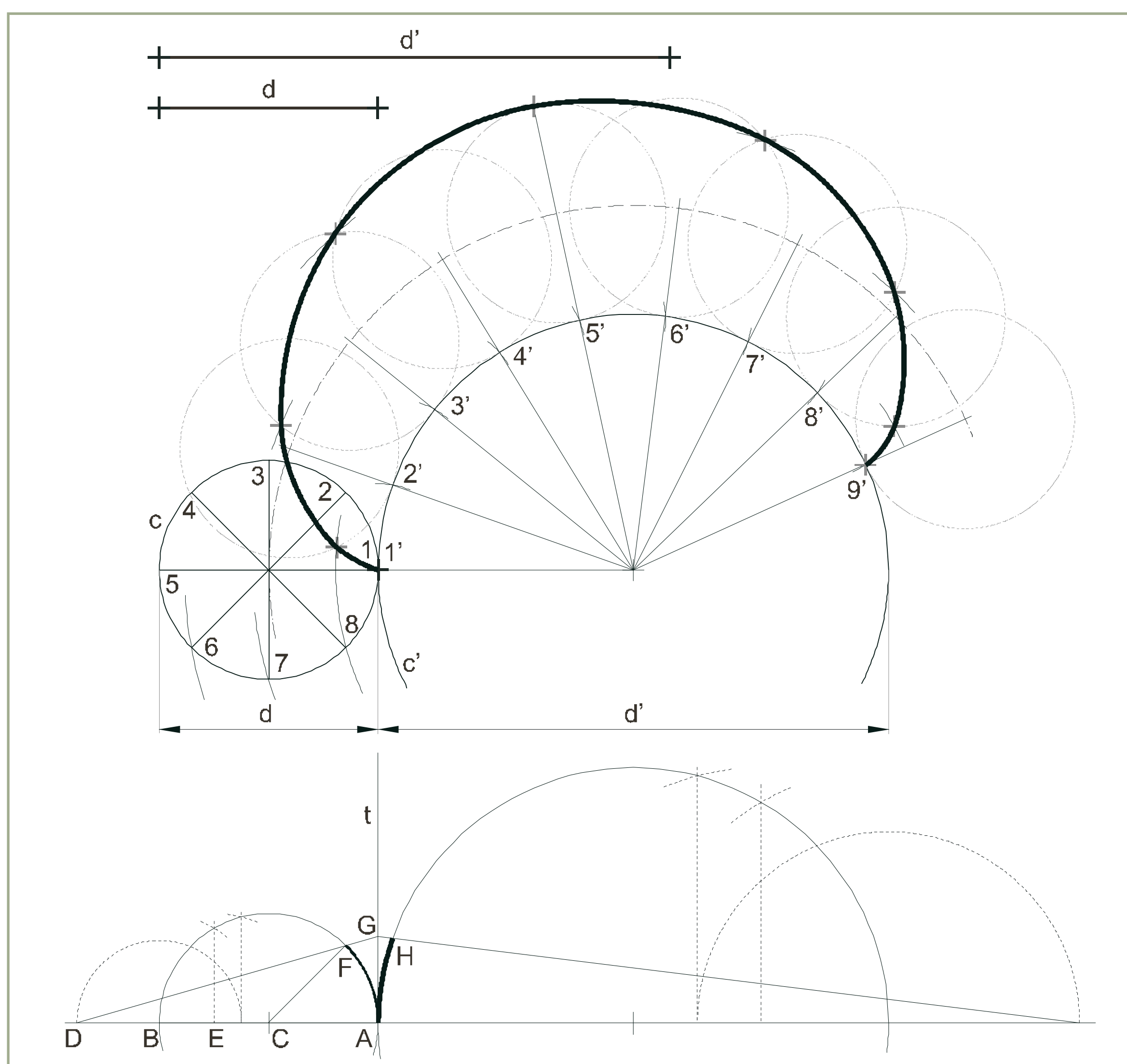


Ilustración 29 Animación

Sea *d* el diámetro de la circunferencia ruleta y *d'* el de la circunferencia base de una epicicloide normal [Ilustración 29].

Se trazan tangentes exteriores la circunferencia base *c'* y la circunferencia ruleta *c*.

Se divide la ruleta en 8 arcos mediante un diámetro que pase por el centro de la circunferencia base, otro perpendicular a él y otros dos trazados a 45º, numerándose los puntos de división en sentido contrario al de giro. Si se deseara mayor precisión en el trazado de la curva se elegiría un número de partes mayor.

Se rectifica uno de los 8 arcos de la circunferencia ruleta, es decir, se obtiene gráficamente el segmento que tiene aproximadamente su misma longitud. Para ello se dibuja aparte una circunferencia de diámetro $d = \overline{AB}$ y su tangente *t* en *A* [Ilustración 29 abajo]. Se prolonga $\overline{AB}$ una longitud $\overline{BD} = \frac{3}{8}d$ y se traza el arco *AF* que se desea rectificar y que corresponde a un ángulo *ACF* = 45º. La recta *DF*, que corta a la tangente *t* en el punto *G*, determina el segmento $\overline{AG}$ buscado.

Se realiza la construcción inversa a la rectificación de un arco para obtener el arco *AH* de la circunferencia base, que tiene una longitud aproximadamente igual a la del segmento $\overline{AG}$ [a la derecha de la anterior construcción]. Se transporta el arco *AH* 8 veces sobre la circunferencia base a partir del punto de contacto 1 con la ruleta numerándose en el sentido de avance de ésta.

Al rodar la ruleta, los puntos 2, 3, … entran en contacto con 2', 3' … dibujándose sus 8 posiciones sucesivas mediante circunferencias tangentes en 2', 3' … En cada una de ellas se sitúa el punto 1, que describe la **epicicloide**, mediante arcos concéntricos con la circunferencia base que pasen por las posiciones iniciales 1, 2 … de los puntos de división.

Por último, se traza una curva que pase por las 9 posiciones del punto 1, a lápiz y mano alzada o con plantilla de curvas.

4.4. Curvas cíclicas: hipocicloide

Hipocicloide es la curva que describe un punto solidariamente unido a una circunferencia que rueda, sin resbalar, sobre otra circunferencia, interiormente a ella. Se llamará **normal**, **acortada** o **alargada** según que el punto esté en, dentro o fuera de la circunferencia ruleta.

Sea *d* el diámetro de la circunferencia ruleta y *d'* el de la circunferencia base de una hipocicloide normal [Ilustración 30].

Se trazan tangentes interiores la circunferencia base *c'* y la circunferencia ruleta *c*.

Se divide la ruleta en 8 arcos mediante un diámetro que pase por el centro de la circunferencia base, otro perpendicular a él y otros dos trazados a 45º, numerándose los puntos de división en sentido contrario al de giro. Si se deseara mayor precisión en el trazado de la curva, se elegiría un número de partes mayor.

Así el arco *AF* se rectifica en el segmento $\overline{AG}$ [Ilustración 30 abajo] y a continuación se realiza la construcción inversa, para obtener el arco *AH* de la circunferencia base, que tiene

una longitud aproximadamente igual a la del segmento $\overline{AG}$ [a la derecha de la anterior construcción]. Se transporta el arco *AH* 8 veces sobre la circunferencia base, a partir del punto de contacto 1 con la ruleta, numerándose en el sentido de avance de ésta.

Al rodar la ruleta, los puntos 2, 3 … entran en contacto con 2', 3' … dibujándose sus 8 posiciones sucesivas mediante circunferencias tangentes en 2', 3' … En cada una de ellas se sitúa el punto 1, que describe la **hipocicloide**, mediante arcos concéntricos con la circunferencia base que pasen por las posiciones iniciales 1, 2 … de los puntos de división.

Por último se traza una curva que pase por las 9 posiciones del punto 1, a lápiz y mano alzada o con plantilla de curvas.

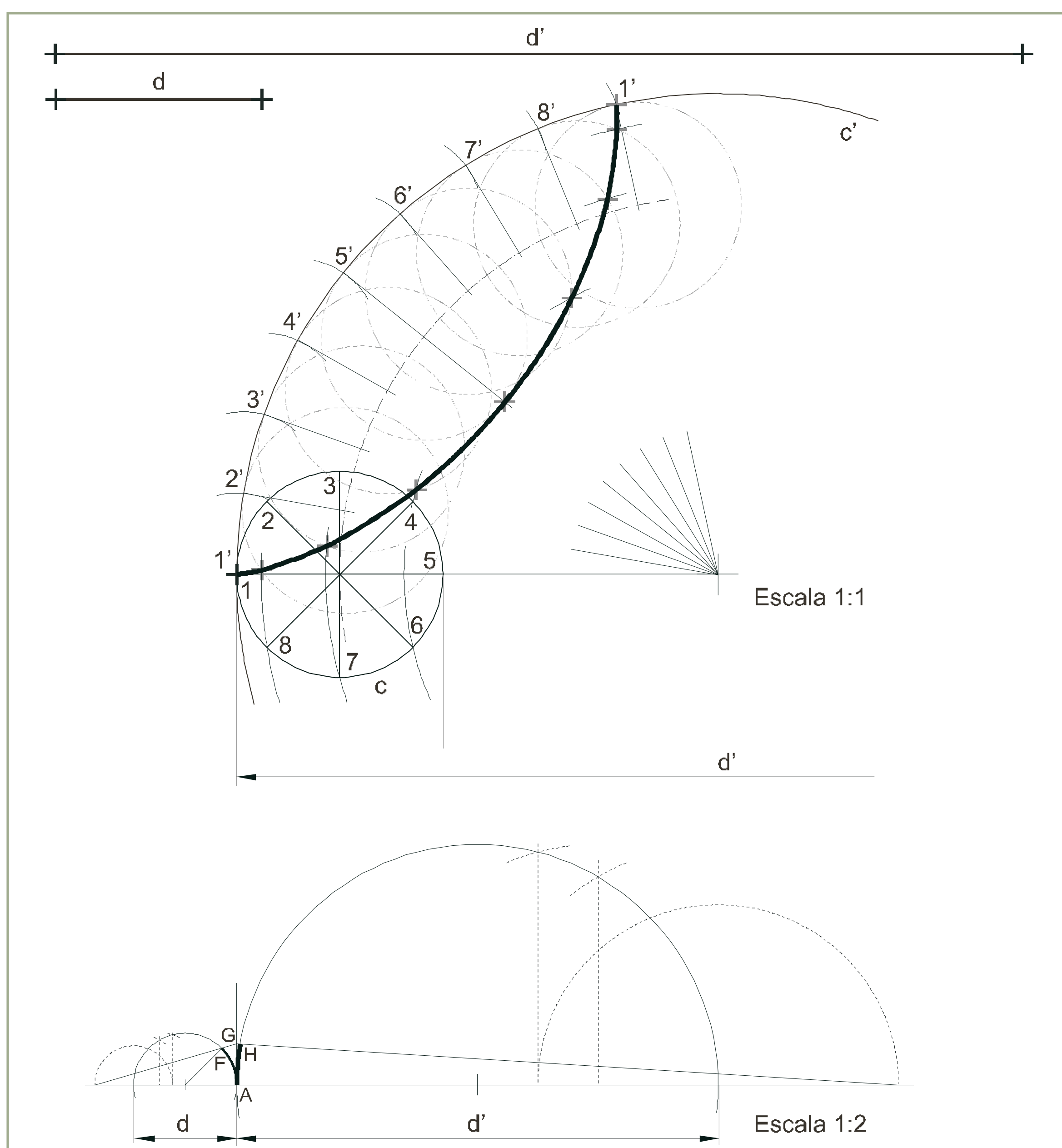


Ilustración 30 Animación

4.5. Curvas cíclicas: evolvente

Evolvente de una circunferencia es la curva que describe un punto solidariamente unido a una recta que rueda, sin resbalar, sobre ella. Se llamará **normal** si el punto está en la recta; y **acortada** o **alargada** si está en el mismo semiplano, o en el opuesto, de los dos en que la recta divide al plano en cada instante.

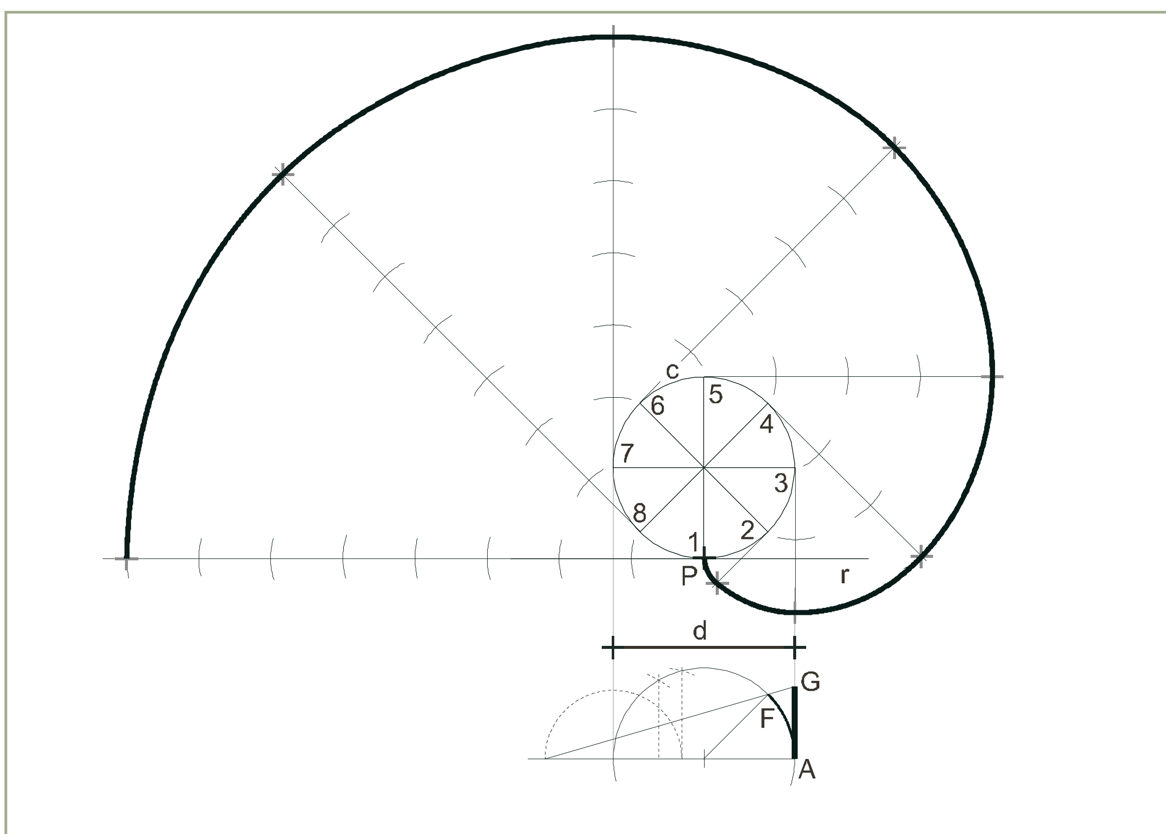


Ilustración 31 Animación

Sea *d* el diámetro de la circunferencia base de una evolvente normal [Ilustración 31].

Se trazan la circunferencia base *c* y la recta ruleta *r* tangentes en uno de sus puntos *P*.

Se divide la circunferencia base *c* en 8 arcos mediante diámetros perpendiculares, paralelos y que formen 45º con la recta ruleta *r*, numerándose los puntos de división en el sentido de giro de la recta. Si se desea mayor precisión en el trazado de la curva, se dividirá en un número de partes mayor.

Se rectifica uno de los 8 arcos de la circunferencia base. En la Ilustración 31 abajo se obtiene el segmento $\overline{AG}$ rectificado del arco *AF*.

Al rodar la recta *r* sobre la circunferencia base, manteniéndose tangente a ella, los puntos *2, 3, …* pasan a ser puntos de tangencia instantáneos y el punto *P* de *r*, que describe la curva, se sitúa en cada instante a una distancia de ellos de $\overline{AG}$, $2\overline{AG}$, $3\overline{AG}$ … respectivamente. Las

8 posiciones sucesivas del punto *P* son las intersecciones de tangentes a la circunferencia base *c,* trazadas por los puntos de división 1, 2 …, con arcos de radios $\overline{AG}$, 2$\overline{AG}$, 3$\overline{AG}$ … y centro en dichos puntos.

La curva que pasa por las 9 posiciones del punto *P* es la **evolvente de la circunferencia**. Se traza a lápiz y mano alzada o con plantilla de curvas.

4.6. Curvas de transición: *lemniscata* de Bernoulli

La *lemniscata* toma su nombre de la cinta, llamada lemnisco, que en la antigua Grecia adornaba las coronas y las palmas de los atletas vencedores; en señal de recompensa honorífica. Su forma es semejante a un 8 tumbado y ha sido adoptada como símbolo del infinito ∞. El matemático suizo Jakob Bernouilli (1654 - 1705) la definió como el lugar geométrico de los puntos, cuyo producto de distancias a dos puntos fijos llamados focos, es constante.

Tiene radio de curvatura variable, desde cero hasta el de las circunferencias que la generan; por lo que es adecuada como curva de transición en las carreteras, en los enlaces entre un tramo recto y otro circular.

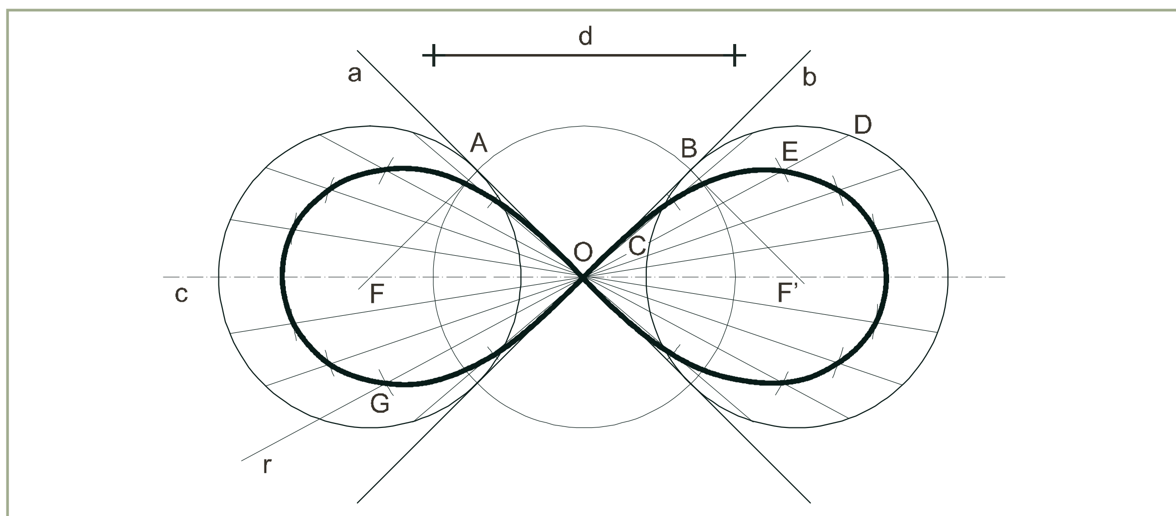


Ilustración 32

Sea *d* el diámetro de las circunferencias que la generan [Ilustración 32].

La *lemniscata* es generada a partir de dos circunferencias de igual radio, cuyas rectas tangentes interiores son ortogonales, por lo que deben trazarse éstas en primer lugar. Se traza una circunferencia de centro *O* y diámetro *d*, dos rectas perpendiculares *a*, *b* que pasen por *O* y la corten en *A*, *B,* y su bisectriz *c*. Las rectas tangentes en *A* y *B* cortan a la bisectriz *c* en los centros *F*, *F'* de las circunferencias buscadas.

Se obtienen puntos de la curva mediante secantes como la recta *r,* que pasa por *O* y corta a una de ellas en *C* y *D*. Arcos de radio *CD* y centro *O* cortan a la secante en dos puntos *E* y *G* de la *lemniscata*.

Al unir los puntos obtenidos mediante sucesivas secantes, a mano alzada o con plantilla de curvas, se dibuja la *lemniscata*.



Recuerda

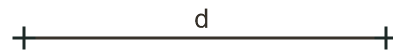
- ✓ Las secciones de la superficie cónica son elipses, parábolas o hipérbolas si el plano corta a todas las generatrices o es paralelo a una o dos de ellas.
- ✓ Si son F y F' los focos y P un punto genérico, en la elipse $PF + PF' = 2a$, en la hipérbola $PF - PF' = 2a$, y en la parábola $PF = PD$ donde PD es la distancia a la directriz.
- ✓ La tangente a la elipse en un punto es la mediatriz del segmento definido por un foco y el extremo del radio de la circunferencia focal del otro, que pasa por dicho punto.
- ✓ El pie de la perpendicular trazada desde un foco a cualquier tangente a la elipse está en la circunferencia principal.
- ✓ La tangente en un punto de la parábola es la mediatriz del segmento definido por el foco y el pie de la perpendicular a la directriz trazada desde él.
- ✓ El pie de la perpendicular trazada desde el foco a cualquier tangente a la parábola está en la tangente en el vértice.
- ✓ La tangente a la hipérbola en un punto es la mediatriz del segmento definido por un foco y el extremo del radio de la circunferencia focal del otro, cuya prolongación pasa por dicho punto.
- ✓ El pie de la perpendicular trazada desde un foco a cualquier tangente a la hipérbola está en la circunferencia principal.
- ✓ Cicloide normal es la curva que describe un punto de una circunferencia que rueda, sin resbalar, sobre una recta.
- ✓ Epicicloide normal es la curva que describe un punto de una circunferencia que rueda, sin resbalar, sobre otra circunferencia, exteriormente a ella.
- ✓ Hipocicloide normal es la curva que describe un punto de una circunferencia que rueda, sin resbalar, sobre otra circunferencia, interiormente a ella.
- ✓ Evolvente de una circunferencia es la curva que describe un punto de una recta que rueda, sin resbalar, sobre ella.



Actividades

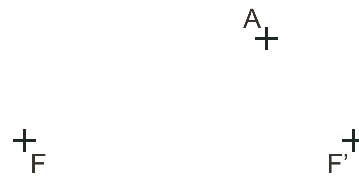


1. Trazar la *lemniscata* conocido el diámetro *d* de las circunferencias generadoras.



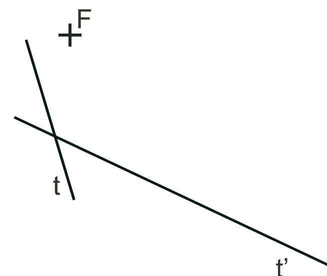


2. Trazar la tangente a la elipse en el punto *A* conocidos sus focos *F, F'*.



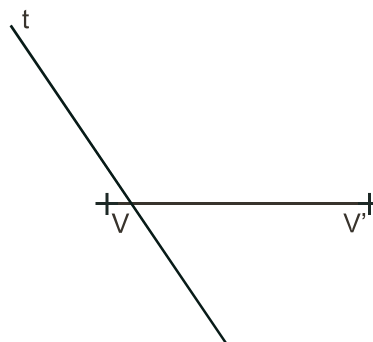


3. Obtener el eje y la directriz de una parábola conocido el foco *F* y dos tangentes *t, t'*. Determinar los puntos de tangencia *T, T'*.



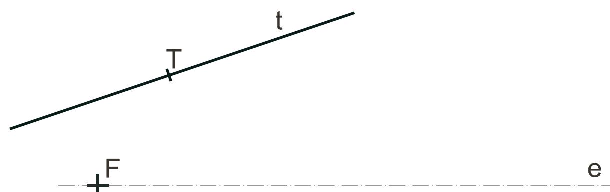


4. Hallar el punto de tangencia *T* de la hipérbola con su tangente *t* conocido el eje real *VV'*.



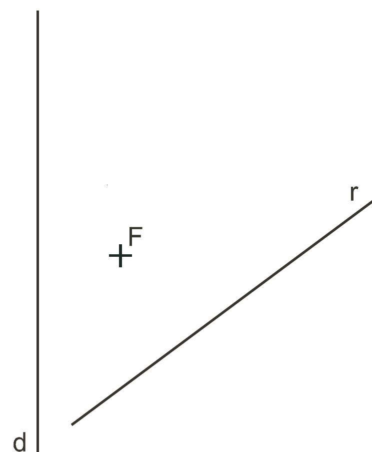


5. Construir la tangente *t'* a una elipse y su punto de tangencia *T'* sabiendo que es paralela a la tangente *t*. Se conoce ésta, su punto de tangencia *T*, el foco *F* y el eje de simetría *e*.

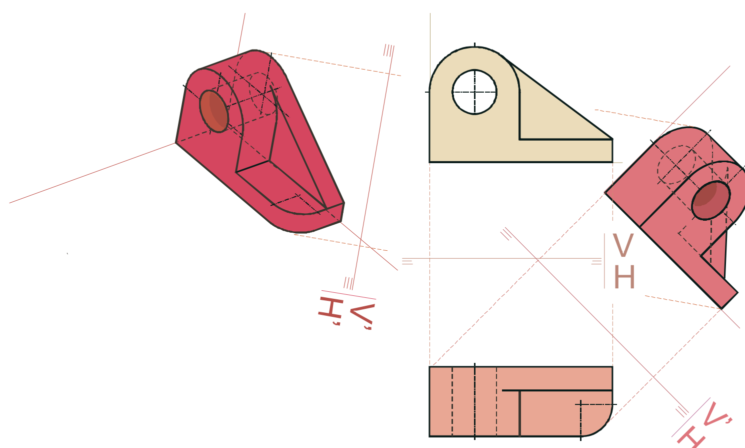




6. Hallar uno de los puntos de intersección de la parábola definida por su foco *F* y su directriz *d* con la recta *r*, sin dibujar la curva.



5 Sistema diédrico: métodos



Empleo de cambios de plano para obtener una perspectiva isométrica.

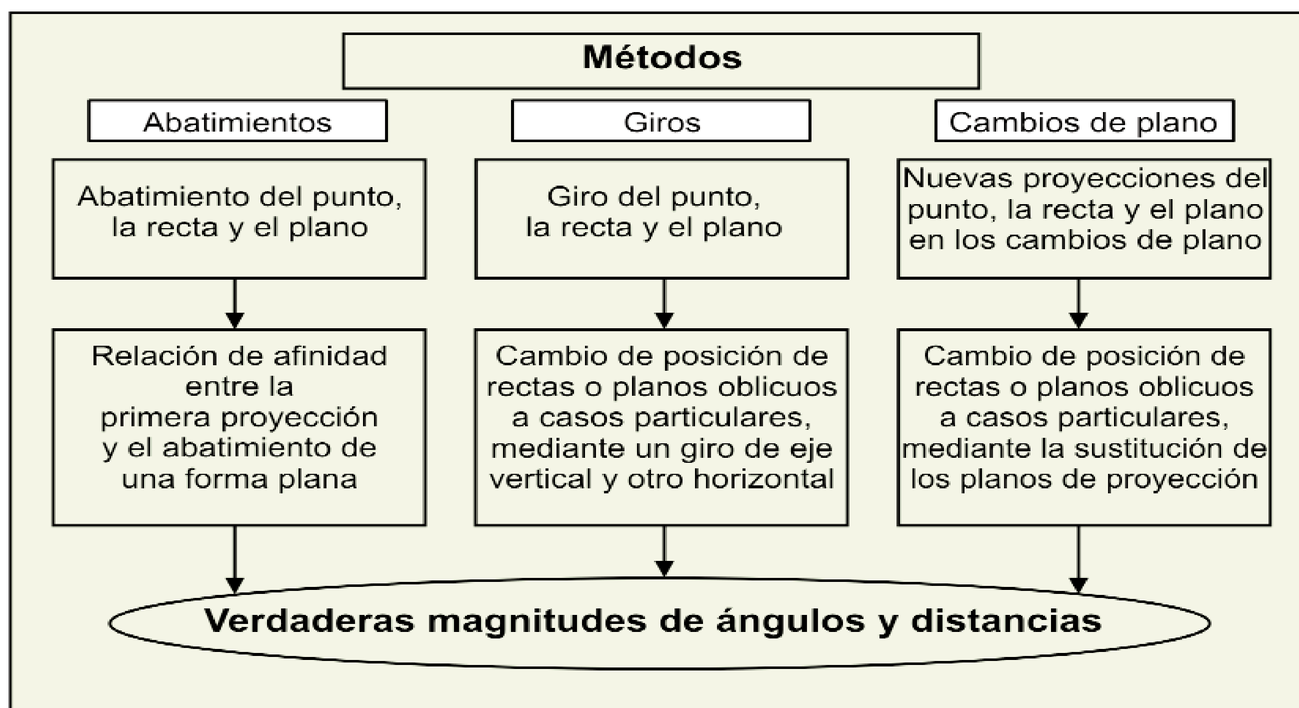
Los sistemas de representación utilizan métodos específicos para representar objetos formados por poliedros y superficies, medir sus distancias y ángulos, obtener sus secciones por planos y rectas o nuevas proyecciones. Esta Unidad se ocupa de los métodos operativos del sistema diédrico: abatimiento, en el que se enriquecen las construcciones del libro de Primero con la afinidad; giros y cambios de plano.

En los abatimientos se utiliza la relación de afinidad entre la proyección y el abatimiento de una forma plana, pues simplifican las construcciones de obtención de verdaderas magnitudes o de representación de formas contenidas en planos, especialmente circunferencias y arcos.

El uso de giros y cambios de plano permite introducir grandes simplificaciones, en la realización de construcciones de distancias y ángulos ya vistas en Primero. Al efectuar cambios de plano o giros, puede ocurrir que no se visualicen adecuadamente las situaciones espaciales, especialmente en los cambios del plano horizontal. Es posible, sin embargo, seguir la mecánica de las construcciones, que se basa en una secuencia de operaciones bien fundamentadas, cuyo orden y contenido, aunque lógico, es preciso memorizar.

Con el estudio de esta Unidad nos proponemos alcanzar los siguientes **objetivos**:

1. Utilizar la afinidad entre la proyección y el abatimiento de formas planas para la representación de éstas y la obtención de sus magnitudes.
2. Situar rectas y planos oblicuos en posiciones especiales mediante el empleo de giros o cambios de plano.
3. Obtener verdaderas magnitudes de formas planas, distancias y ángulos utilizando los métodos: abatimientos, giros y cambios de plano.



ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. Abatimiento

1.1. Afinidad entre la proyección y el abatimiento de una forma plana

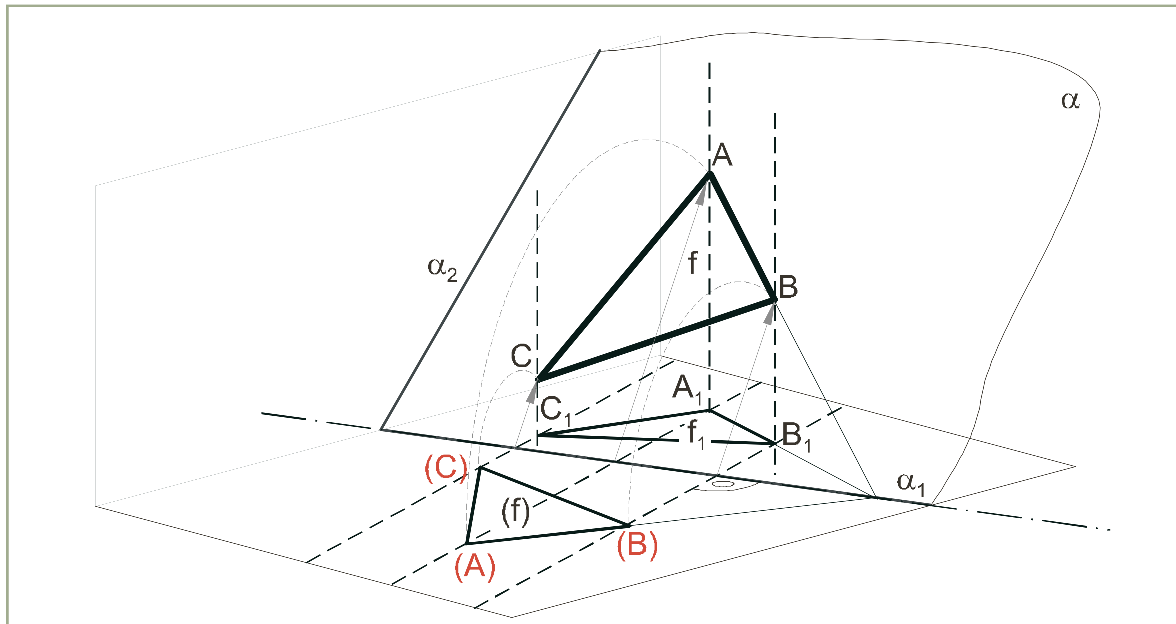


Ilustración 1 Animación

En la ilustración 1 se ha situado, con referencia a los planos de proyección de un sistema diédrico, un triángulo *ABC* contenido en un plano α. Proyectarlo desde un punto cualquiera y seccionar por el Plano Horizontal, permitiría obtener otro triángulo homológico con él. En particular, si la proyección se realiza desde el infinito en dirección perpendicular al Plano Horizontal, obtendremos su primera proyección $A_1B_1C_1$, que será afín del triángulo *ABC*.

Al abatir el triángulo *ABC* en el Plano Horizontal se mantiene la afinidad, ahora entre las figuras coplanarias $A_1B_1C_1$ y *(A)(B)(C)*, en la cual:

- Rectas homólogas como A_1B_1 y *(A)(B)* se cortan en la traza α_1, charnela del abatimiento y ahora, también, **eje de afinidad**.
- Puntos homólogos como *(A)* y A_1 están alineados con el punto impropio que define la dirección de abatimiento y ahora, también, **dirección de afinidad**.

En general:

Entre la proyección f_1 de una figura *f* contenida en un plano oblicuo α y su abatimiento *(f)* sobre el Plano Horizontal, existe una afinidad en la que el eje es la traza horizontal α_1 y la dirección de afinidad coincide con la de abatimiento.

Lo mismo se puede afirmar para los abatimientos en el Plano Vertical.

1.2. Verdadera magnitud de una forma plana poligonal situada en un plano oblicuo

El abatimiento de las figuras contenidas en un plano se realiza aquí, con el auxilio de la relación de afinidad entre abatimiento y proyección de una forma plana.

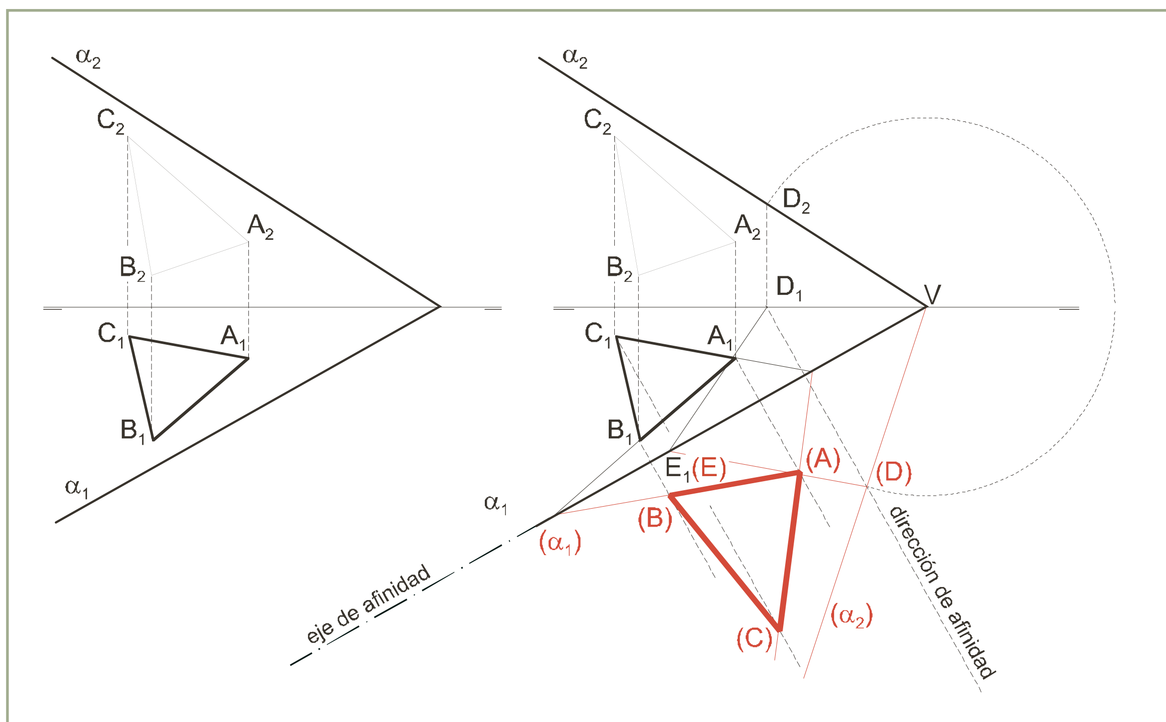


Ilustración 2

Sea el triángulo *ABC,* contenido el plano α, que se desea abatir sobre el Plano Horizontal [Ilustración 2].

En primer lugar se abaten las trazas del plano α. La traza horizontal α_1 coincide consigo misma en su posición abatida (α_1). La traza vertical abatida (α_2) pasa por el punto de intersección *V* de la charnela con la línea de tierra y por el abatido *(D)* de uno cualquiera de sus puntos *D*. Se obtiene *(D)* en la intersección de la dirección de abatimiento (perpendicular a la charnela) con el arco de centro *V* y radio VD_2.

A continuación se obtienen los afines de las primeras proyecciones A_1, B_1, C_1 de los vértices del triángulo, siendo el eje de afinidad (α_1), la dirección de afinidad coincidente con la de abatimiento $D_1(D)$ y la traza vertical abatida (α_2) afín de la primera proyección de dicha traza α_2, que coincide con la línea de tierra.

Se obtiene *(A)* en la intersección de la dirección de afinidad trazada por A_1 con la afín *(D)(E)* de la recta D_1E_1, que pasa por A_1.

Análogamente se obtienen *(B)* y *(C)* que junto con *(A)* definen la verdadera forma del triángulo.

1.3. Representación de polígonos situados en planos oblicuos

Para representar una figura plana situada en un plano dado se abaten las trazas de éste, se dibuja la figura sobre el plano abatido y se obtiene su afín, que será la proyección en el plano de abatimiento.

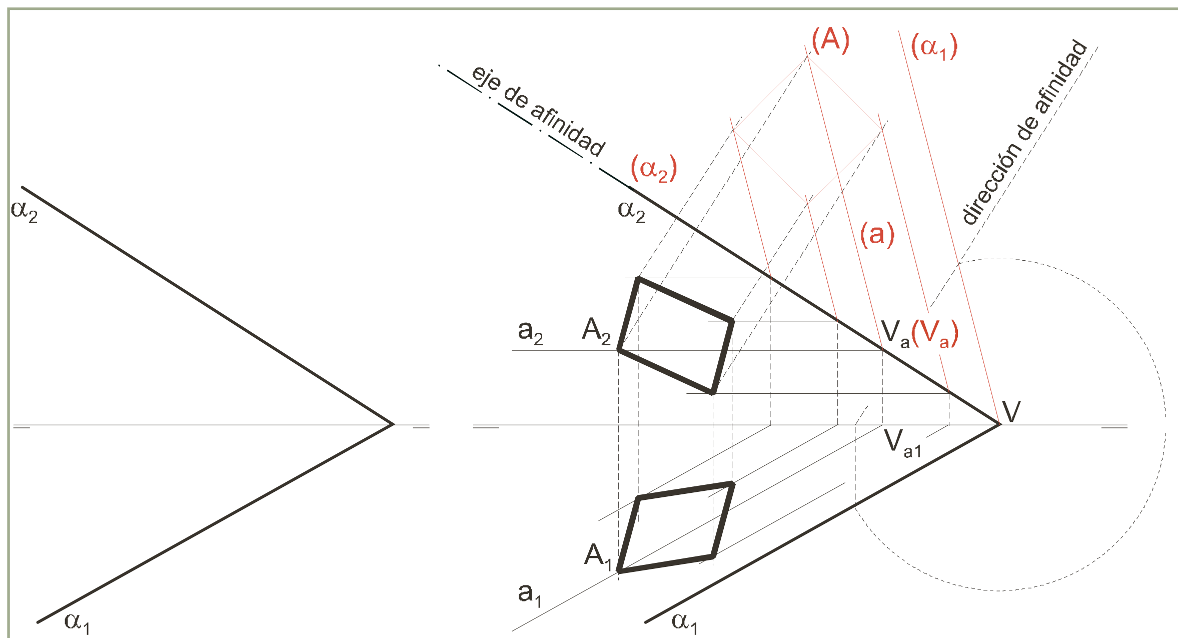


Ilustración 3

Sea el plano α representado por sus trazas y 13 *mm* la longitud de un lado del cuadrado contenido en él, cuyas proyecciones se desea obtener [Ilustración 3].

Se abaten las trazas del plano α sobre el plano vertical y se construye, en la porción de plano situada entre ellas, el cuadrado de lado 13 *mm* en cualquier posición, salvo que ésta se especifique.

Se obtiene A_2 en la intersección de la dirección de afinidad trazada por *(A)* con la paralela a la línea de tierra a_2, que es afín de la recta *(a)*, paralela a (α_1). Éstas se cortan en su traza vertical V_a, que coincide con (V_a), y cuya primera proyección V_{a1} se obtiene sobre *L. T.*. La primera proyección a_1 de la horizontal de plano *a*, se traza paralela a α_1 por V_{a1} y corta a la línea de referencia trazada por A_2 en A_1.

Análogamente se obtienen las proyecciones de los demás vértices del cuadrado.

1.4. Representación de circunferencias situadas en planos oblicuos

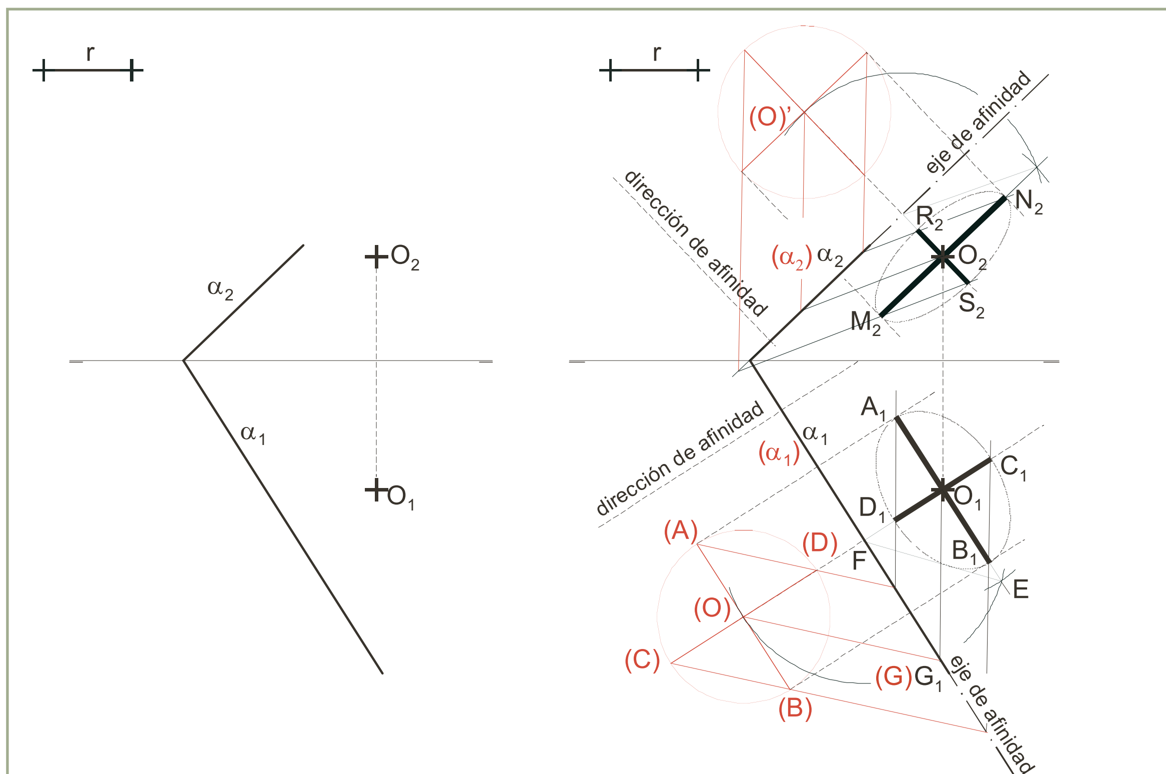


Ilustración 4

Sea α el plano, *O* el centro y *r* el radio de la circunferencia contenida en él, de la que se desean obtener los diámetros principales de cada una de sus proyecciones [Ilustración 4].

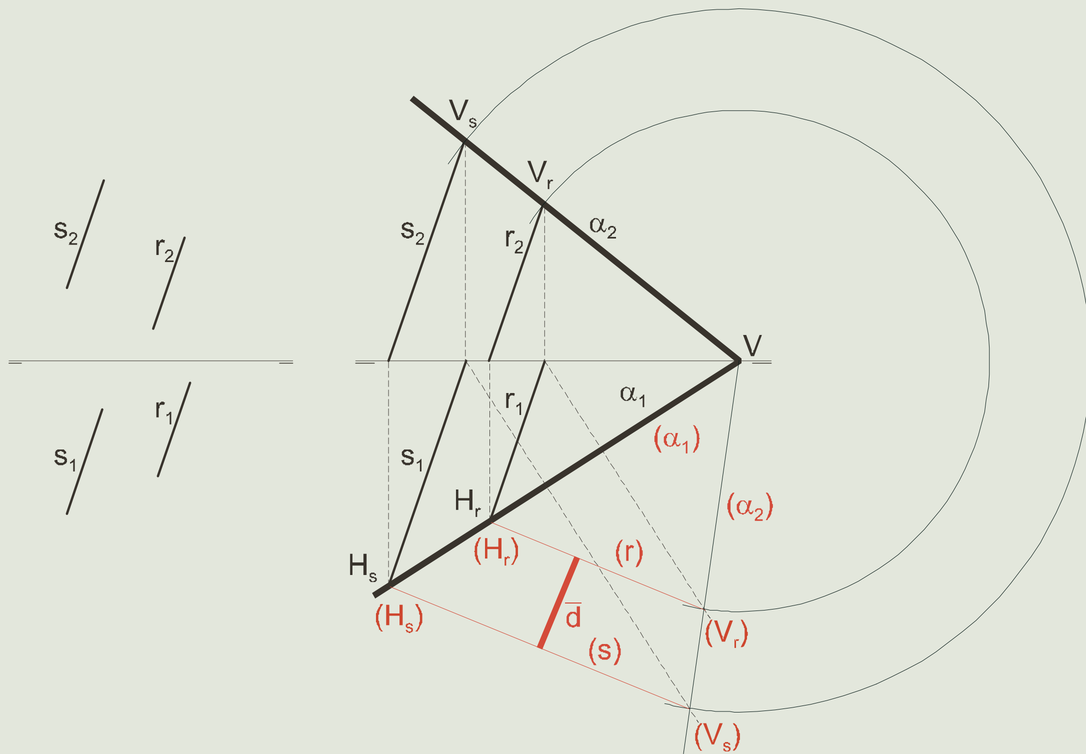
Para obtener los diámetros de la proyección horizontal se abate el centro *O* sobre el Plano Horizontal. Para ello se traza la dirección de abatimiento de O_1 que corta a la charnela α_1 en *F*. Se construye el triángulo rectángulo O_1EF, siendo el cateto $\overline{O_1E}$ la cota del punto *O*. Un arco de centro *F* y radio $\overline{FE}$ corta a la dirección de abatimiento en *(O)*.

Se dibuja la circunferencia de centro *(O)* y radio *r*, un diámetro paralelo *(A)(B)* y otro perpendicular *(C)(D)* a la charnela α_1. Los afines de éstos serán diámetros principales de la elipse, que es primera proyección de la circunferencia.

Los afines de *(A), (B), (C), (D)* son los puntos de intersección de direcciones de afinidad trazadas por ellos con las afines de las rectas *(A)(D)* y *(C)(B)*, que por ser paralelas a *(O)(G)* se trazan paralelas a G_1O_1 por los puntos de corte con el eje de afinidad. La elipse puede construirse por puntos, afinidad o haces proyectivos.

Para obtener los diámetros de la proyección vertical se abate el centro *O* sobre el Plano Vertical y se procede de manera análoga.

Aplicación



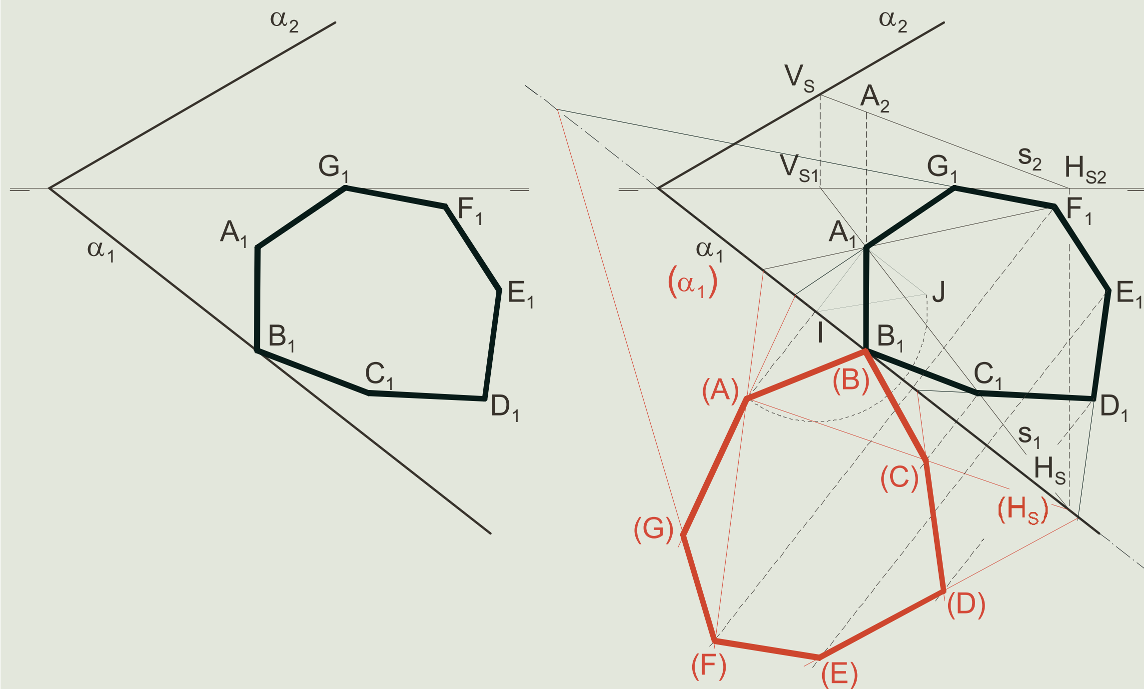
Se desea hallar la distancia entre las rectas *r* y *s* definidas por sus proyecciones.

Se hallan las trazas del plano definido por las dos rectas. Para ello, se obtienen las trazas de la recta r trazando líneas de referencia por los puntos de corte de r_1 y r_2 con la línea de tierra, una de ellas corta a r_1 en H_r, y la otra a r_2 en V_r. Análogamente se obtienen las trazas de la recta *s*. La traza horizontal α_1 del plano definido por *r* y *s* pasa por H_r y H_s y la traza vertical α_2 pasa por V_r y V_s.

Se abaten las trazas del plano α y de las rectas *r* y *s*. Las trazas horizontales α_1, H_r, H_s coinciden consigo mismas en su posición abatida (α_1), (H_r), (H_s). La traza vertical abatida (α_2) pasa por el punto de intersección *V* de la charnela con la línea de tierra y por las abatidas (V_r), (V_s) de las trazas verticales de las rectas. Se obtienen (V_r), (V_s) en la intersección de las direcciones de abatimiento de las primeras proyecciones de V_r y V_s con los arcos de centro *V* y radios $\overline{VV_r}$ y $\overline{VV_s}$.

Las rectas *r* y *s* en su posición abatida se trazan uniendo (H_r) con (V_r), y (H_s) con (V_s). La distancia $\overline{d}$ entre *r* y *s* es la que existe entre *(r)* y *(s)* medida en cualquier recta perpendicular a ambas.

Aplicación



Se desean obtener las verdaderas magnitudes del polígono *ABCDEFG* conocida su primera proyección y las trazas del plano α que lo contiene.

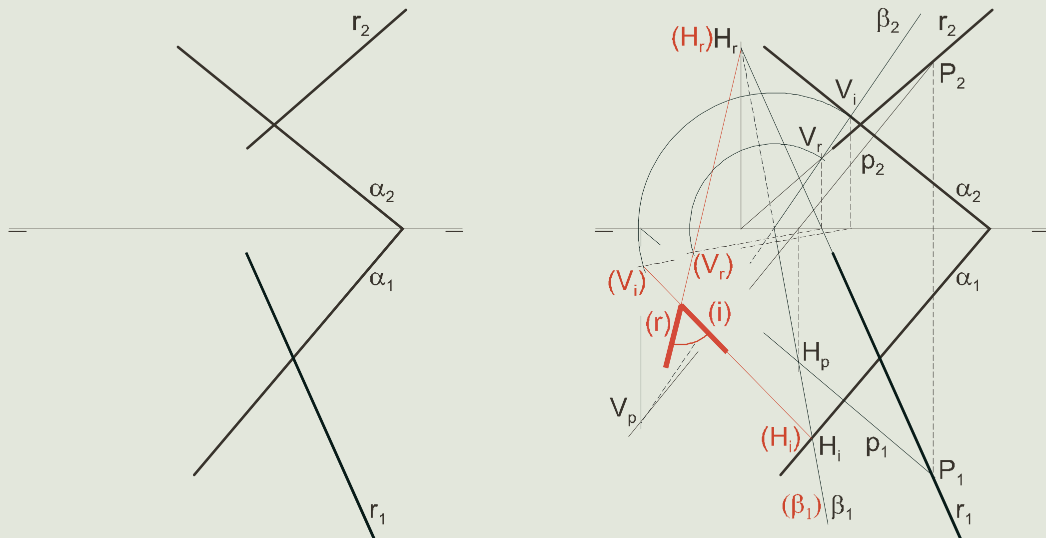
Se comienza abatiendo el punto *A* para definir la afinidad. Su cota es la distancia de su segunda proyección a *L.T.*. Ésta se obtiene trazando por *A* una recta cualquiera *s*. La primera proyección s_1 pasa por A_1 y la segunda proyección por H_{s_2} y V_s, que se obtienen mediante líneas de referencia trazadas desde los puntos de corte de s_1 con α_1 y *L.T.*; A_2 es el punto de corte de s_2 con la línea de referencia trazada desde A_1.

Para abatir *A* se traza la dirección de abatimiento de A_1 que corta a la charnela α_1 en *I*. Se construye el triángulo rectángulo A_1IJ, siendo el cateto $\overline{A_1J}$ la cota del punto *A*. Un arco de centro *I* y radio $\overline{IJ}$ corta a la dirección de abatimiento en *(A)*.

A continuación se obtienen los afines de las primeras proyecciones B_1, C_1,… de los vértices del polígono, siendo el eje de afinidad (α_1) y *(A)* afín de A_1.

Se obtiene *(C)* en la intersección de la dirección de afinidad trazada por C_1 con la afín $(A)(H_s)$ de la recta A_1C_1. Análogamente se obtienen los demás vértices.

Aplicación



Se desea obtener la verdadera magnitud del ángulo que forman la recta *r* y el plano α.

La construcción de un plano β perpendicular al plano α *que contenga a la recta r permite, al abatir ésta y la recta de intersección i de ambos planos, medir el ángulo que forman, que es el buscado*.

Se traza una perpendicular *p* a la recta *r* por uno de sus puntos *P*. Se hallan las trazas de *r* y *p*, y pasando por ellas, las del plano β que las contiene. Los puntos de corte de las trazas homónimas de los planos α y β son las trazas H_i, V_i de su recta intersección *i*, cuyas proyecciones no se necesita dibujar.

Tomando $\beta_1 = (\beta_1)$ como charnela se abaten las trazas de las rectas *r*, *i* sobre el plano horizontal y uniéndolas se dibujan las rectas abatidas *(r)*, *(i)*.

2. Giros

2.1. Giro de un punto

Algunas construcciones se simplifican cuando se traslada y gira el objeto representado, de modo que en la nueva posición, operaciones como medir distancias y ángulos, seccionar, obtener una nueva vista, … sean más sencillas. En ocasiones puede ser necesario efectuar el movimiento inverso de las modificaciones introducidas en el objeto para completar su representación en la posición inicial.

El giro se efectúa alrededor de un eje vertical (recta vertical) u horizontal (recta de punta), o bien se aplican sucesivamente dos giros, uno de cada tipo. La traslación, que no tiene más finalidad que la de buscar espacio libre de dibujo, pocas veces es necesaria.

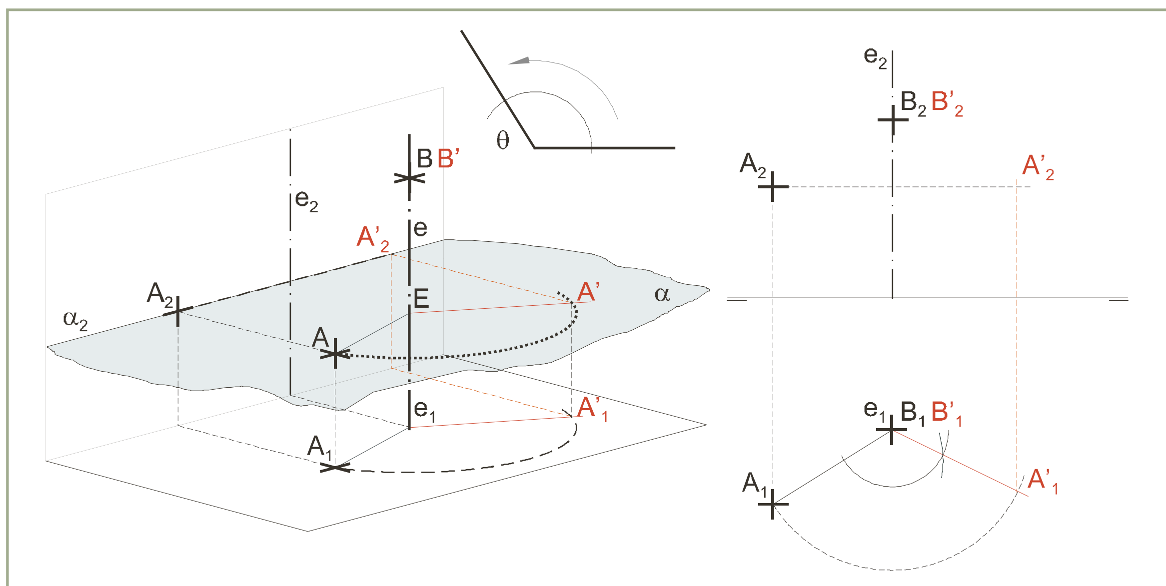


Ilustración 5 Animación

Sean *A, B* dos puntos, *e* un eje vertical y θ el ángulo y dirección del giro que se les desea aplicar [Ilustración 5].

La trayectoria seguida por el punto *A* al girar alrededor del eje vertical *e* [Ilustración 5 izquierda] es un arco de circunferencia situado en un plano α perpendicular a dicho eje y por tanto horizontal. Su primera proyección conservará su forma y dimensiones y la segunda se transformará en una recta paralela a *L.T.* coincidente con la traza vertical del plano α.

Para obtener la primera proyección del punto *A* después del giro [Ilustración 5 derecha] se traza un arco de radio $\overline{e_1A_1}$ y centro e_1 en el sentido del giro, que corta en A'_1 a la recta que pasa por e_1 y forma un ángulo igual al de giro con $\overline{e_1A_1}$. La segunda proyección A'_2 es el punto de corte de la paralela a *L.T.* que pasa por A_2 con la línea de referencia de A'_1.

El punto *B*, que está en el eje de giro, es un punto doble de la transformación, por lo que sus proyecciones coinciden antes y después del giro.

2.2. Giro de una recta

Sean *r* una recta, *e* un eje vertical y θ el ángulo y dirección del **giro** que se desea aplicar [Ilustración 6].

El giro de la recta *r* alrededor del eje *e* [Ilustración 6 izquierda] se realiza girando dos de sus puntos. Si se elige el punto *A*, que es el extremo de la perpendicular común $\overline{EA}$ al eje *e* y la recta *r*, el giro de la proyección A_1 determina el de r_1, pues sus proyecciones $\overline{e_1A_1}$ y r_1 son también perpendiculares.

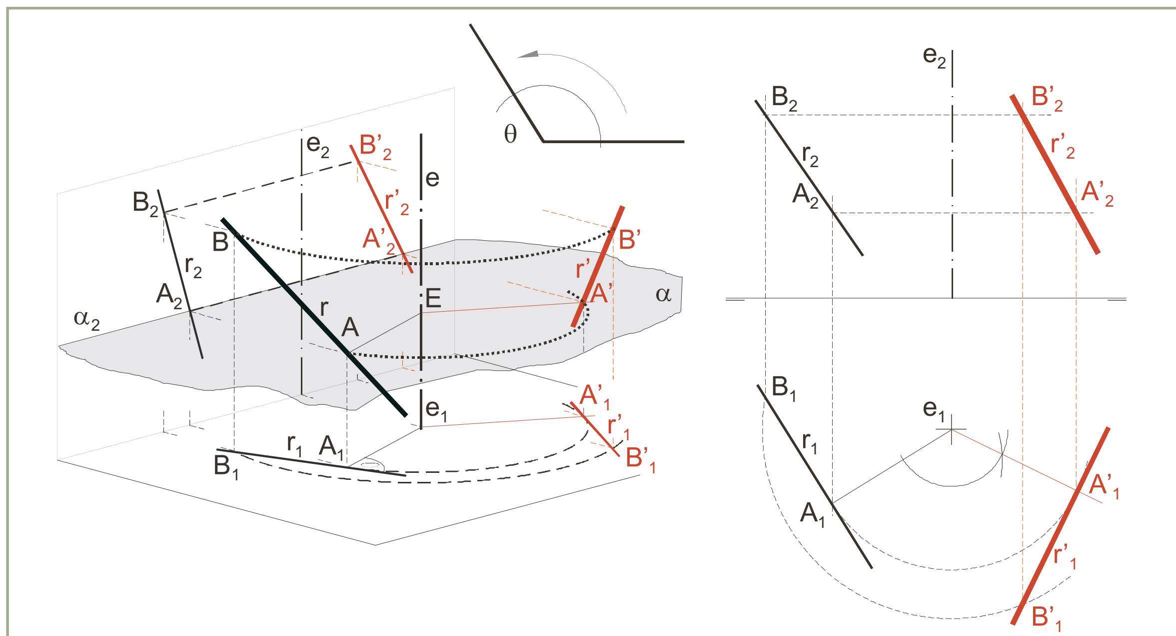
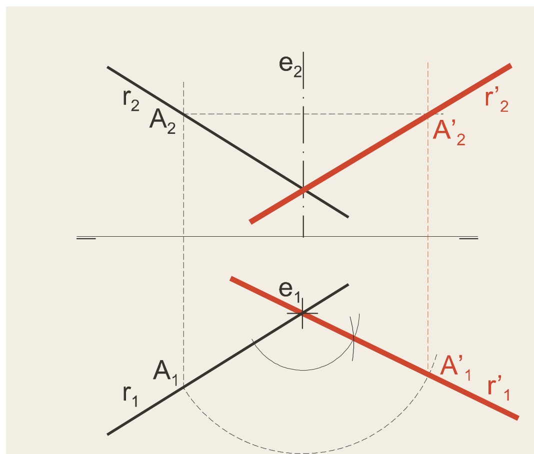


Ilustración 6 Animación

Se obtiene la primera proyección de la recta *r* [Ilustración 6 derecha] girando A_1 y dibujando por A'_1 la nueva proyección r'_1, perpendicular a la recta $e_1A'_1$. Para obtener la segunda proyección r'_2 es necesario girar otro punto *B*. Elegido éste, un arco de centro e_1 que pase por B_1 corta a r'_1 en B'_1. Los puntos de corte de las paralelas a *L.T.* que pasan por A_2, B_2 con las líneas de referencia de A'_1, B'_1, son A'_2, B'_2. Queda así definida la segunda proyección r'_2 como la recta $A'_2B'_2$.



Si la recta *r* pasa por el eje *e* basta girar un punto *A* el ángulo y sentido especificado, pues el punto de corte con el eje de giro es doble. La primera proyección r'_1 de la recta en su nueva posición será $e_1A'_1$, y la segunda r'_2 pasará por el punto de corte de e_2 con r_2, y por A'_2.

2.3. Giro de un plano

Sea α un plano, *e* un eje vertical y θ el ángulo y dirección del giro que se desea aplicar [Ilustración 7].

Para girar un plano basta girar suficientes elementos que lo definan. En el giro alrededor de un eje vertical *e* [Ilustración 7 izquierda] se gira la traza horizontal α_1 y una horizontal de plano *h*.

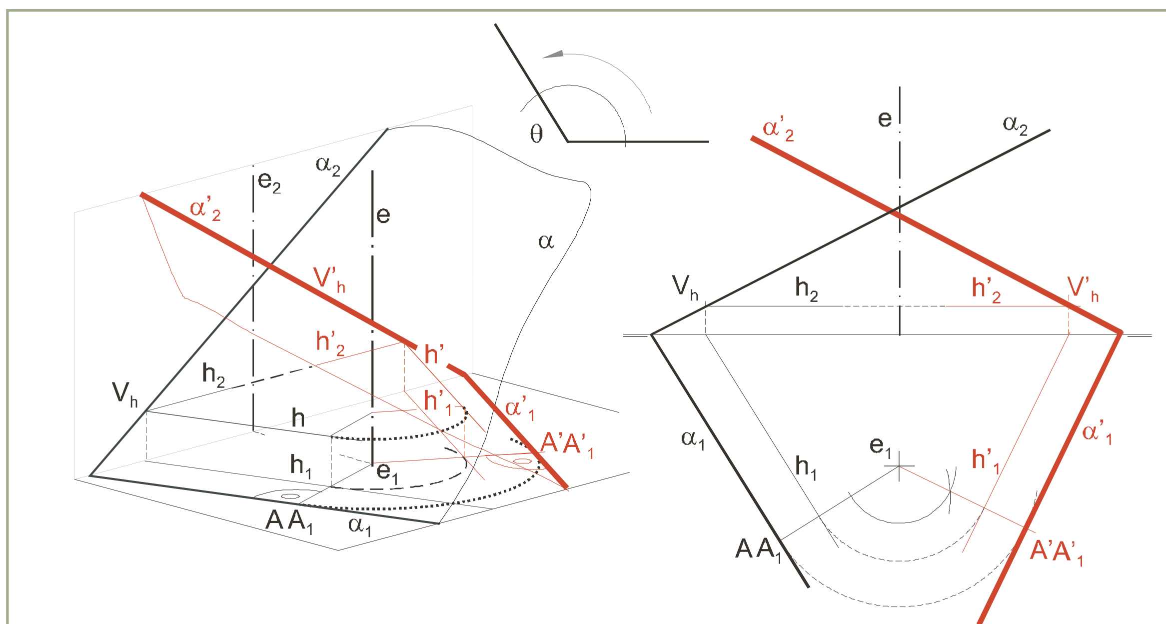


Ilustración 7

Se traza la perpendicular $\overline{e_1A_1}$ a la traza α_1 [Ilustración 7 derecha], se gira A_1 el ángulo θ en la dirección especificada, y se traza por A'_1 y perpendicular a $\overline{e_1A'_1}$ la traza girada α'_1.

Se traza una horizontal de plano cualquiera *h* y se gira del mismo modo su primera proyección h_1 hasta que se sitúe en la posición h'_1. La segunda proyección h'_2 coincide con h_2. Por su traza vertical V'_h y por el punto de corte de α'_1 con *L.T.* pasará α'_2.

2.4. Giro de una recta oblicua hasta convertirla en vertical

Sea *r la recta* [Ilustración 8].

El giro de la recta oblicua *r* alrededor de un eje vertical *e*, hasta que su primera proyección r'_1 sea paralela a *L.T.*, la sitúa en posición frontal.

La perpendicular común al eje y la recta determina el punto *A* de ésta, cuyo giro facilita el de la recta. Su primera proyección $\overline{e_1A_1}$ es el radio del arco de centro e_1, cuyo punto de corte con la perpendicular a *L.T.* trazada por e_1, es A'_1. Por él pasa la primera proyección de la recta girada r'_1, que se dibuja perpendicular a $\overline{e_1A'_1}$.

Para obtener la segunda proyección r'_2 es necesario girar otro punto *B*. Elegido éste, un arco de centro e_1 que pase por B_1 corta a r'_1 en B'_1. Los puntos de corte de las paralelas a *L.T.* que pasan por A_2, B_2 con las líneas de referencia de A'_1, B'_1, son A'_2, B'_2. Queda así definida la segunda proyección r'_2 como la recta $A'_2B'_2$.

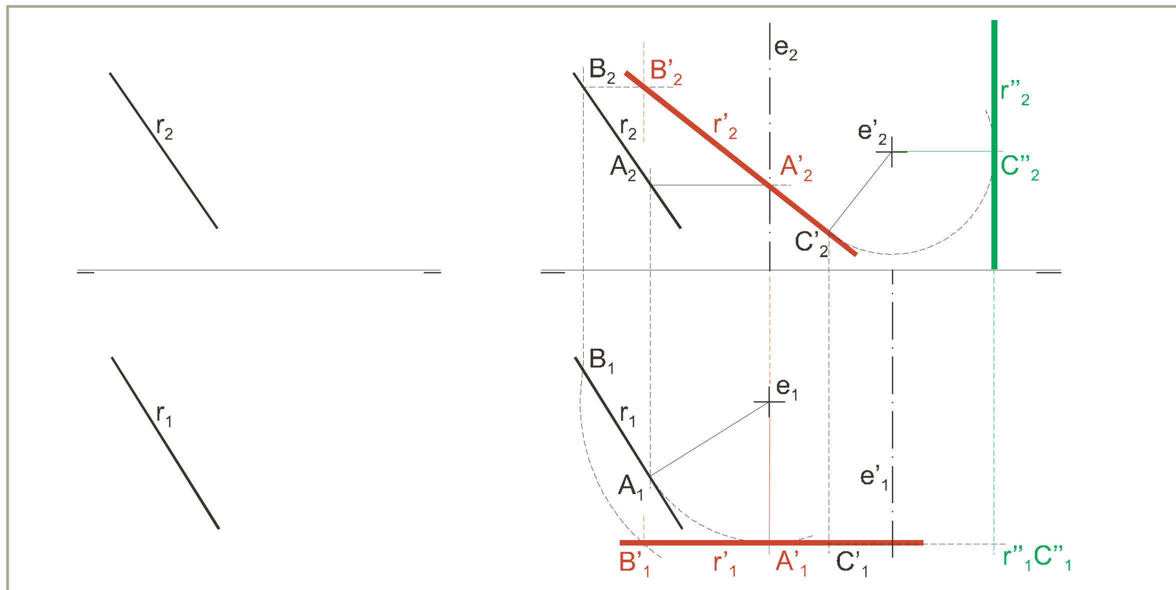


Ilustración 8 Animación

El giro de la recta frontal *r'* alrededor del eje horizontal *e'*, hasta que su segunda proyección r''_2 sea perpendicular a *L.T.*, la sitúa en posición vertical.

La perpendicular común al eje y la recta es $\overline{e'C'}$ cuya segunda proyección $\overline{e'_2C'_2}$ es el radio del arco de centro e'_2, cuyo punto de corte con la paralela a *L.T.* desde e'_2 es C''_2. Pasando por él y perpendicular a *L.T.* se dibuja r''_2. La primera proyección de la recta *r* es r''_1 que tiene el mismo alejamiento en esta posición vertical que en la frontal anterior.

2.5. Giro de un plano oblicuo hasta convertirlo en horizontal

Sea α el plano [Ilustración 9].

El giro del plano oblicuo α alrededor del eje vertical *e* hasta que su traza horizontal α_1 sea perpendicular a L.T., lo sitúa en posición de canto.

Se traza la perpendicular $\overline{e_1A_1}$ a la traza α_1, se gira A_1 hasta la posición A'_1, en que $\overline{e'_1A'_1}$ es paralela a *L.T.*, y se traza por A'_1 y perpendicular a $\overline{e_1A'_1}$ la traza girada α'_1.

Se traza una horizontal de plano cualquiera *h* y se gira del mismo modo su primera proyección h_1 hasta que se sitúe en la posición h'_1. La segunda proyección h'_2 está en h_2. Por su traza vertical V'_h y por el punto de corte de α'_1 con *L.T.* pasará α'_2.

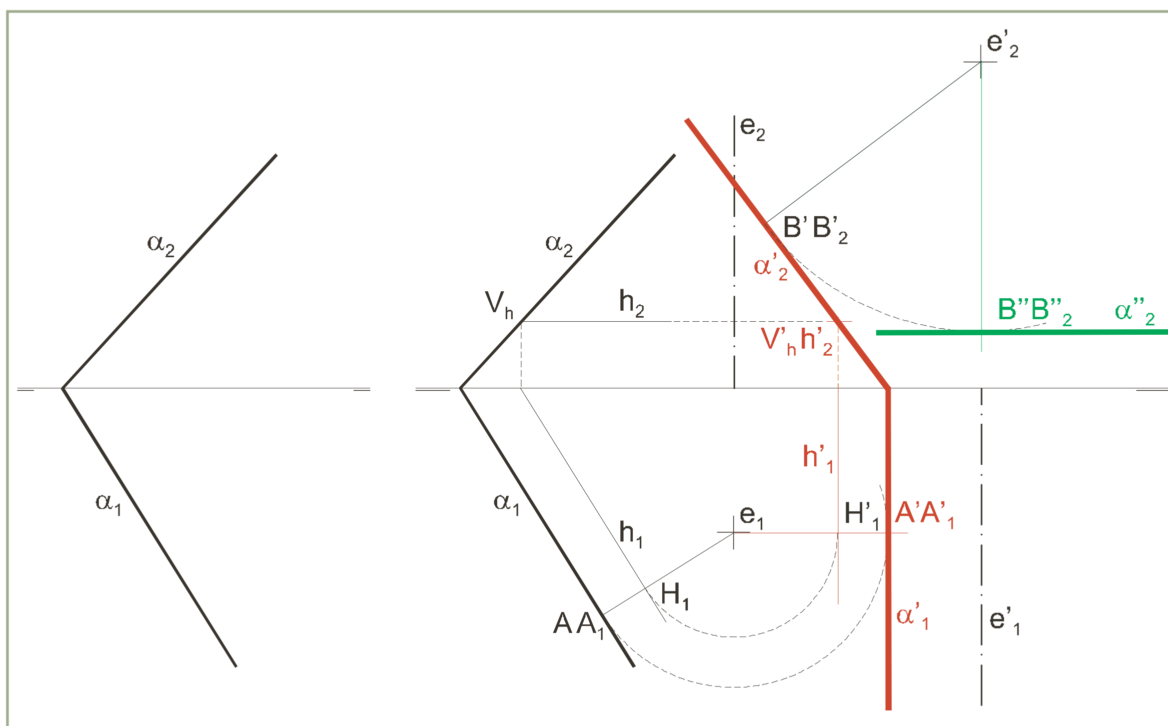


Ilustración 9

El giro del plano de canto α' alrededor del eje horizontal e' hasta que su traza vertical α'_2 sea paralela a *L.T.*, lo sitúa en posición horizontal.

Se traza la perpendicular $\overline{e'_2B'_2}$ a la traza α'_2 y se gira a la posición $\overline{e'_2B''_2}$, perpendicular a *L.T.*. Por último se traza α''_2 paralela a *L.T.* por B''_2.

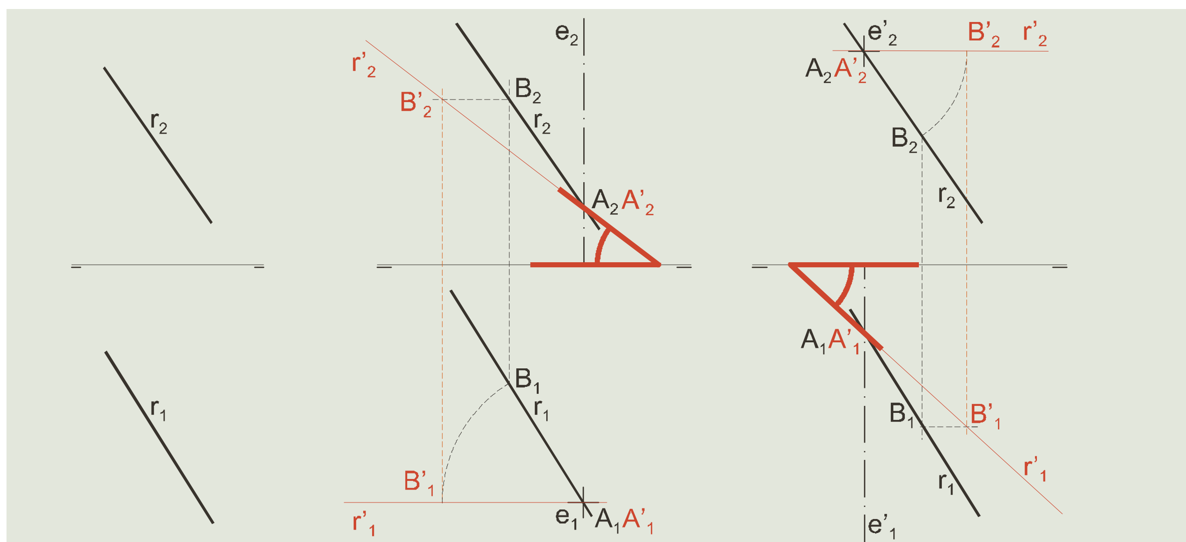
Aplicación

Se desea hallar el ángulo que forma la recta *r* con los planos de proyección.

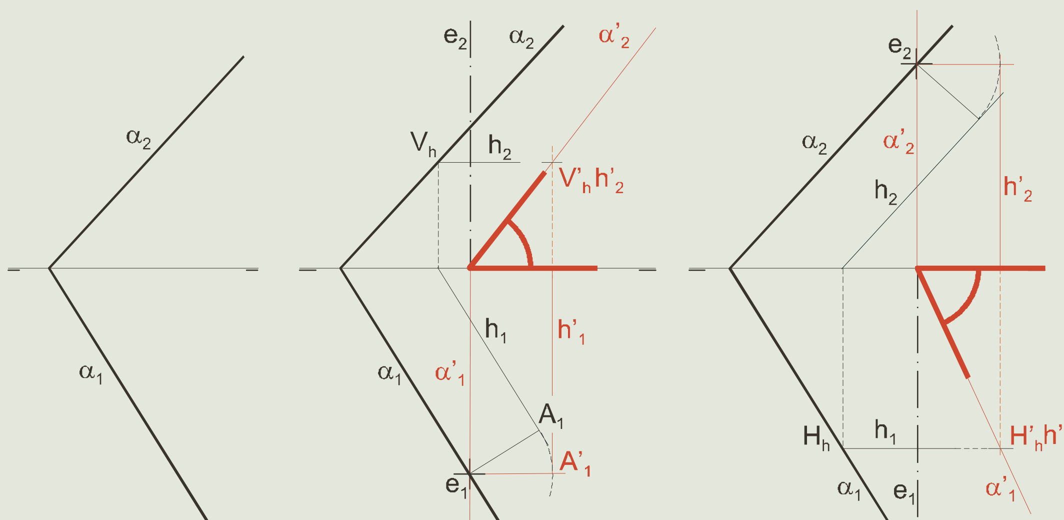
Se puede medir el ángulo que forma con el plano horizontal [en el centro de la Ilustración] si se gira la recta hasta situarla en posición frontal. Al elegir un eje vertical *e*, que pase por un punto cualquiera *A* de la recta *r*, se facilitan los giros.

Se traza la primera proyección en su posición girada r'_1, sin más que dibujarla paralela a *L.T.* pasando por e_1. Un arco de radio cualquiera y centro e_1 corta a r_1 en B_1 y a r'_1 en B'_1. Una paralela a *L.T.* trazada por B_2 cortará a la línea de referencia de B'_1 en B'_2. La segunda proyección r'_2 que pasa por el punto doble A'_2 y por B'_2 forma con la *L.T.* el ángulo pedido.

Para obtener el ángulo que forma con el plano vertical [a la derecha en la Ilustración] se gira la recta hasta que esté en posición horizontal. Se elige un eje horizontal *e*, que pase por un punto cualquiera *A* de la recta *r* y se procede de manera análoga.



Aplicación



Se desea hallar el ángulo que forma el plano α con los planos de proyección.

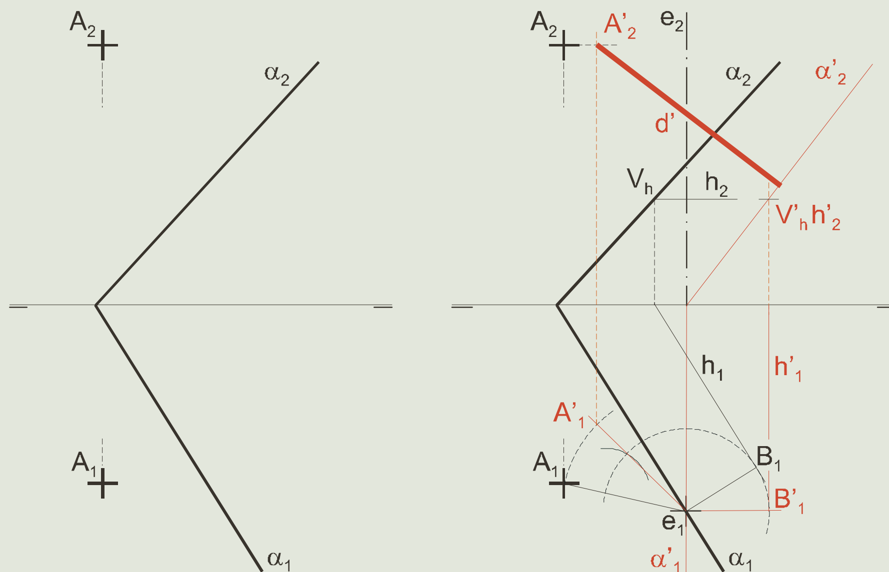
Se puede medir el ángulo que forma con el plano horizontal [en el centro de la Ilustración] si se gira el plano hasta situarlo en posición de canto. Al elegir un eje vertical *e*, que pase por la traza α_1, se facilitan los giros.

La traza α_1, en su posición girada α'_1, quedará perpendicular a *L.T.* pasando por e_1.

Para situar la traza vertical se dibuja una horizontal de plano cualquiera *h* y se gira su primera proyección h_1 hasta que se sitúe paralela a α'_1 en la posición h'_1. Para ello se traza la perpendicular $\overline{e_1A_1}$ a h_1, se gira hasta situarla en la posición $\overline{e_1A'_1}$, paralela a *L.T.*, y se traza h'_1 perpendicular a ella, pasando por A'_1. La segunda proyección h'_2 está en h_2. Por su traza vertical V'_h y por el punto de corte de α'_1 con *L.T.* pasará α'_2, que forma con *L.T.* el ángulo pedido.

Se puede medir el ángulo que forma con el plano vertical [a la derecha en la Ilustración] si se gira el plano hasta situarlo en posición vertical. Se elige un eje horizontal *e*, que pase por la traza α_2, y se procede de manera análoga.

Aplicación



Se desea hallar la distancia del punto *A* al plano α.

Se puede medir la distancia *d*, en proyección vertical, si se giran el punto y el plano hasta situar este último en posición de canto. Se elige el eje vertical *e* pasando por la traza α_1, y se gira ésta y una horizontal de plano *h* hasta situarlas perpendiculares a *L.T.*. La traza vertical V'_h determina la del plano α'_2.

El ángulo de giro de la primera proyección del punto A debe coincidir con el resultante de colocar la traza α_1 o la horizontal de plano *h* en sus nuevas posiciones. Éste es $B'_1e_1B_1$, que transportado con vértice en e_1 a partir de $\overline{e_1A_1}$, facilita la recta de posición de A'_1, el cual se encuentra en el punto de corte con el arco de centro e_1 y radio $\overline{e_1A_1}$. Obtenido A'_2 sobre la paralela trazada desde A_2, se traza desde él y perpendicular a la traza α'_2 la distancia *d*.

3. Cambios de plano

3.1. Nuevas proyecciones del punto y la recta en el cambio de plano vertical

Cuando se cambian los planos de proyección por otros nuevos, de modo que en las nuevas proyecciones del objeto representado las rectas y planos se sitúan en posiciones particulares, operaciones como medir distancias y ángulos, seccionar, obtener una nueva vista, etc. pueden ser más sencillas. En ocasiones es necesario completar la representación del objeto en el sistema de planos inicial, dibujando las modificaciones introducidas.

El plano de proyección que se pretende cambiar puede ser el vertical o el horizontal, aunque a veces es preciso cambiar sucesivamente ambos. Para identificar los sucesivos sistemas de planos se introducen estas modificaciones en la notación:

- A la línea de tierra de cada sistema se le añade un segmento perpendicular en su extremo derecho con las letras *V*, *H* de los planos de proyección.
- Cada vez que se introduce un nuevo sistema se añade una línea corta y gruesa en cada extremo de su línea de tierra, identificando el plano que cambia *V* o *H* mediante una prima.
- Las nuevas proyecciones o trazas de puntos, rectas y planos de cada sistema llevan primas o segundas según se trate del primer o segundo cambio de plano. Las proyecciones o trazas que no se modifican mantienen su notación.

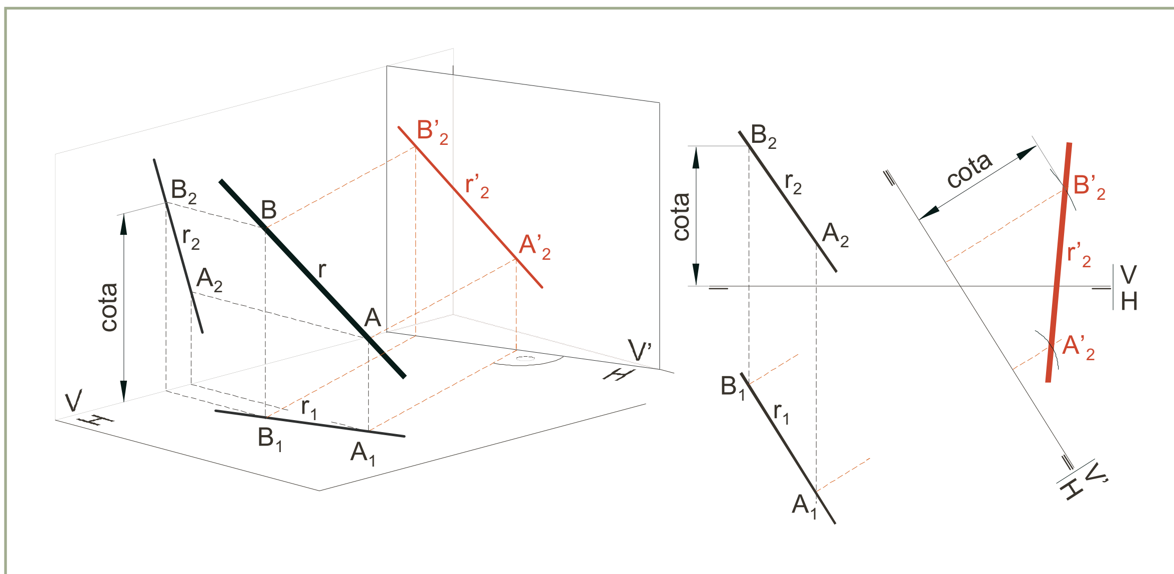


Ilustración 10

Sean A_1B_1, A_2B_2 las proyecciones de una recta *r* en un sistema de planos {*VH*} y {*V'H*} el nuevo sistema [Ilustración 10].

En un cambio de plano vertical la cota y la primera proyección de los puntos no se modifica [Ilustración 10 izquierda].

Las primeras proyecciones de los puntos *A*, *B* se mantienen en el nuevo sistema como A_1, B_1. Las segundas A'_2, B'_2 se obtienen [Ilustración 10 derecha, en rojo] transportando sus cotas, sobre las líneas de referencia perpendiculares a la nueva *L.T.*, a partir de ella.

Las nuevas proyecciones r_1, r'_2 de la recta *r* son A_1B_1 y $A'_2B'_2$.

3.2. Nuevas proyecciones del punto y la recta en el cambio de plano horizontal

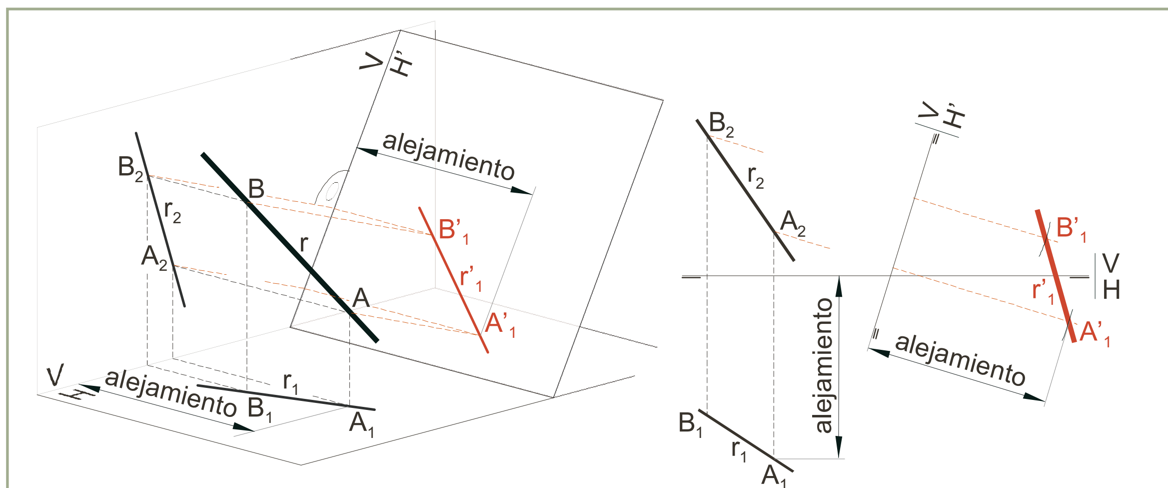


Ilustración 11

Sean A_1B_1, A_2B_2 las proyecciones de una recta *r* en un sistema de planos *{VH}* y *{VH'}* el nuevo sistema [Ilustración 11].

En un cambio de plano horizontal el alejamiento y la segunda proyección de los puntos no se modifica [Ilustración 11 izquierda].

Las segundas proyecciones de los puntos *A*, *B* se mantienen en el nuevo sistema como A_2, B_2. Las primeras A'_1, B'_1 se obtienen [Ilustración 11 derecha, en rojo] transportando sus alejamientos sobre las líneas de referencia perpendiculares a la nueva *L.T.*, a partir de ella.

Las nuevas proyecciones r'_1, r_2 de la recta *r* son $A'_1B'_1$ y A_2B_2.

3.3. Nuevas trazas del plano en el cambio de plano vertical

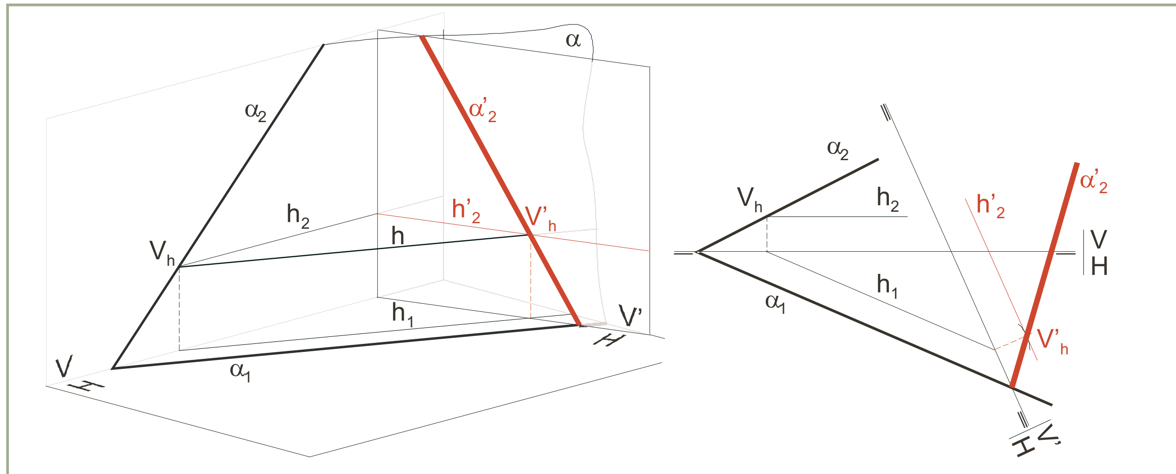


Ilustración 12

Sean α_1, α_2 las trazas de un plano α en un sistema de planos {*VH*} y {*V'H*} el nuevo sistema [Ilustración 12].

En un cambio de plano vertical, la traza horizontal α_1 de un plano α no se modifica y la vertical α'_2 pasa por la nueva traza vertical V'_h de una horizontal de plano *h* [Ilustración 12 izquierda].

La traza horizontal se mantiene en el nuevo sistema como a_1. La vertical se obtiene [Ilustración 12 derecha, en rojo] mediante una horizontal de plano *h*, cuya proyección horizontal h_1 se mantiene. Al estar formada la horizontal *h* por puntos que tienen la misma cota y permanecer ésta invariable en el cambio de plano vertical, su segunda proyección h'_2 mantiene su distancia y paralelismo a la *L.T.*. Obtenida V'_h, la traza a'_2 pasa por ella y por el punto de concurrencia de las trazas en la *L.T.*.

3.4. Nuevas trazas del plano en el cambio de plano horizontal

Sean α_1, α_2 las trazas de un plano α en un sistema de planos {*VH*} y {*VH'*} el nuevo sistema [Ilustración 13].

En un cambio de plano horizontal, la traza vertical α_2 de un plano α no se modifica y la horizontal α'_1 pasa por la nueva traza horizontal H'_f, de una frontal de plano *f* [Ilustración 13 izquierda].

La traza vertical se mantiene en el nuevo sistema como α_2. La horizontal se obtiene [Ilustración 13 derecha, en rojo] mediante una frontal de plano *f*, cuya proyección vertical f_2 se mantiene. Al estar formada la frontal *f* por puntos que tienen el mismo alejamiento y permanecer éste invariable en el cambio de plano horizontal, su primera proyección f'_1 mantiene su distancia

y paralelismo a la *L.T.*. Obtenida H'_f, la traza α'_1 pasa por ella y por el punto de concurrencia de las trazas en la *L.T.*.

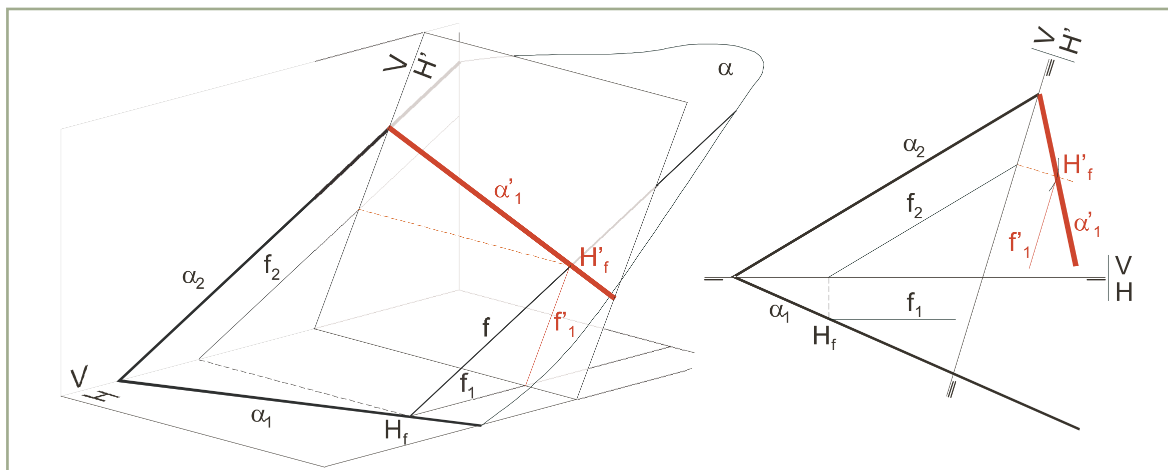


Ilustración 13

3.5. Cambio de plano que convierte una recta oblicua en vertical

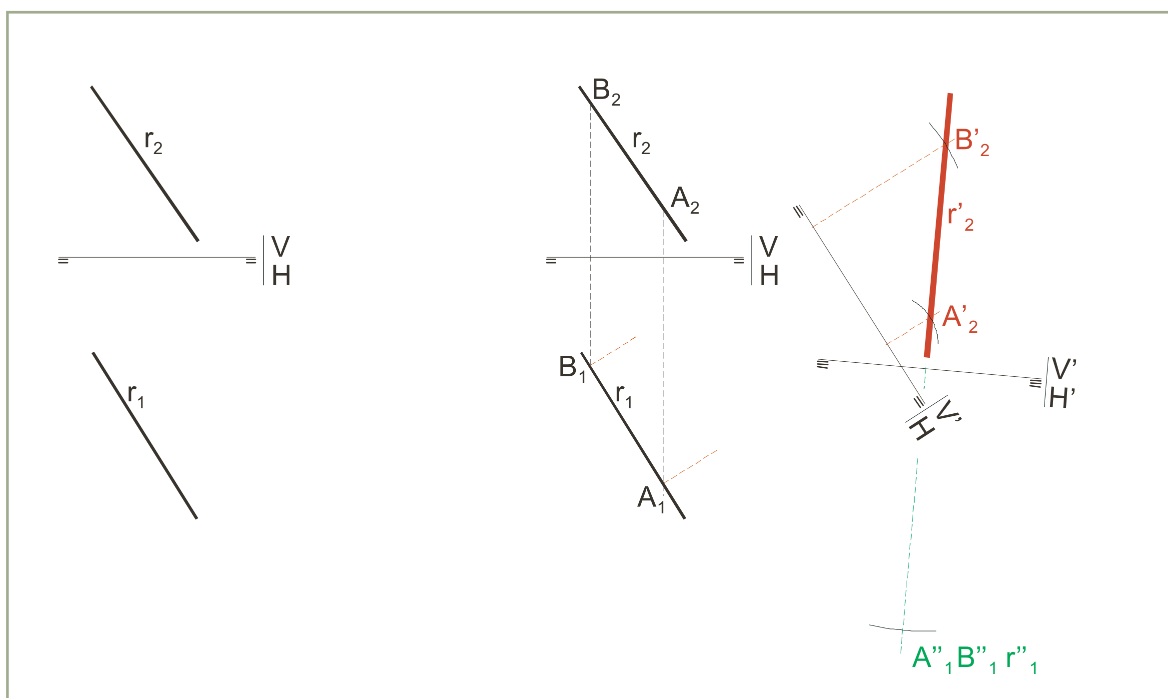


Ilustración 14

Sean r_1, r_2 las proyecciones de una recta oblicua *r* en un sistema de planos {*VH*} [Ilustración 14].

Una recta oblicua se sitúa en posición frontal mediante un cambio de plano vertical, en el que la línea de tierra sea paralela a su primera proyección.

La línea de tierra del nuevo sistema {*V'H*} se elige paralela a r_1, que se mantiene. La segunda proyección r'_2 pasa por las segundas proyecciones A'_2, B'_2 de dos puntos *A*, *B* de la recta, que se obtienen transportando sus cotas sobre líneas de referencia perpendiculares a la nueva *L.T.*, a partir de ella.

Una recta frontal se sitúa en posición vertical mediante un cambio de plano horizontal, en el que la línea de tierra sea perpendicular a su segunda proyección.

La línea de tierra del nuevo sistema {*V'H'*} se elige perpendicular a r'_2, que se mantiene. La primera proyección r''_1 coincide con A''_1, B''_1 y se obtiene transportando su alejamiento sobre la línea de referencia perpendicular a la nueva *L.T.*, a partir de ella.

3.6. Cambio de plano que convierte un plano oblicuo en horizontal

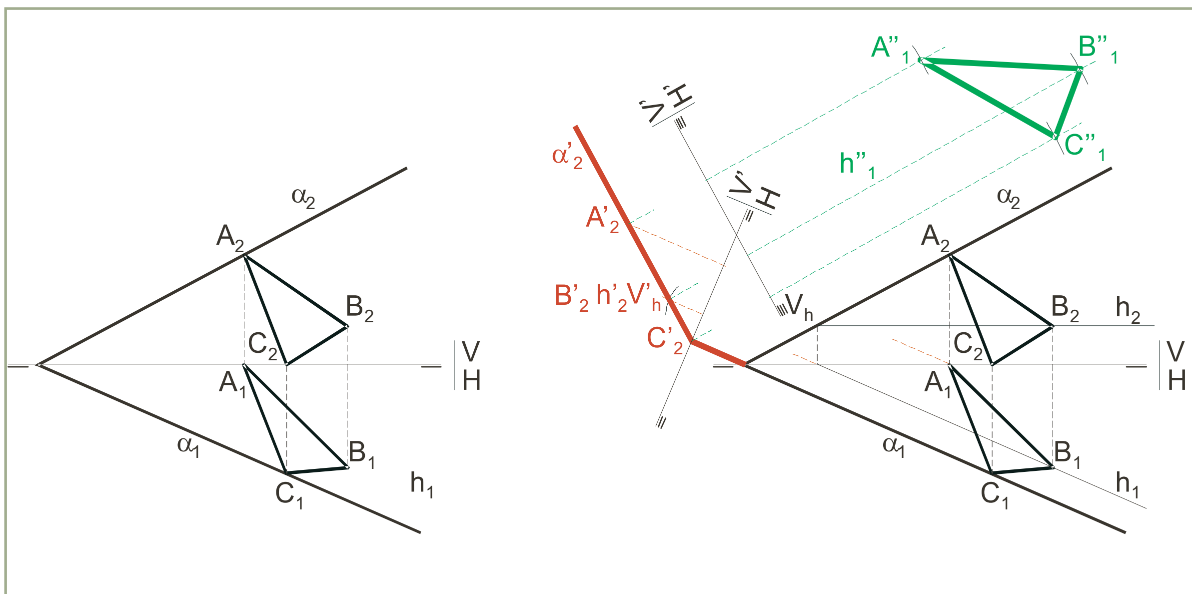


Ilustración 15

Sean α_1, α_2 las trazas de un plano α en un sistema de planos {*VH*} y $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ las proyecciones de un triángulo contenido en él [Ilustración 15].

Un plano oblicuo se sitúa en posición de canto mediante un cambio de plano vertical, en el que la línea de tierra sea perpendicular a su traza horizontal.

La línea de tierra del nuevo sistema {*V'H*} se elige perpendicular a α_1, que se mantiene. La traza vertical α'_2 se obtiene mediante una horizontal de plano *h*, que se sitúa en posición

de punta. La proyección horizontal h_1 se mantiene y la segunda proyección h'_2 coincide con V'_h, que está situada en la línea de referencia de h_1 a una distancia de *L.T.* igual a la cota. La traza α'_2 pasa por V'_h y por el punto de concurrencia de las trazas en la *L.T.*.

Las proyecciones $A'_2B'_2C'_2$ de los vértices del triángulo estarán situadas en la traza α'_2 al tratarse de un plano de canto.

Un plano de canto se sitúa en posición horizontal mediante un cambio de plano horizontal, en el que la línea de tierra sea paralela a su traza vertical.

La línea de tierra del nuevo sistema {*V'H'*} se elige paralela a α'_2, que se mantiene. No existe traza horizontal, y las proyecciones $A''_1B''_1C''_1$ de los vértices del triángulo estarán situadas en las líneas de referencia trazadas desde $A'_2B'_2C'_2$, a una distancia de L.T. igual al alejamiento.

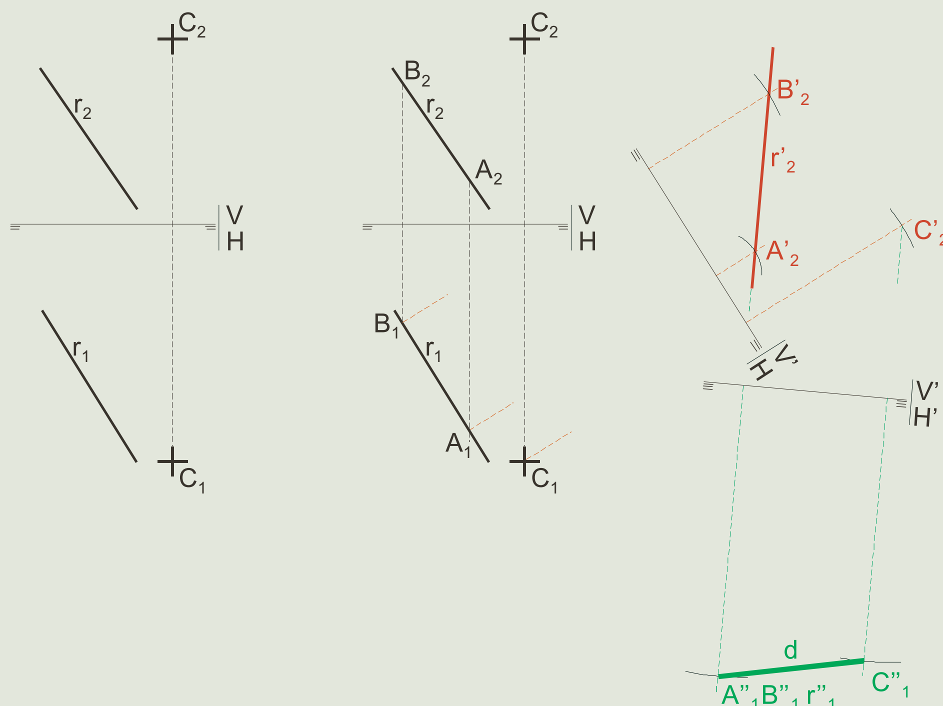
Aplicación

Se desea hallar la distancia entre los planos α *y* β.

Un cambio de plano vertical sitúa a los dos planos en posición de canto, coincidiendo la distancia entre sus trazas verticales *d* con la que existe entre ellos.

La línea de tierra del nuevo sistema {*V'H*} se elige perpendicular a α_1, β_1. La traza vertical α'_2 se obtiene mediante una horizontal de plano *h*, que se sitúa en posición de punta. La proyección horizontal h_1 se mantiene y la segunda proyección h'_2 coincide con V'_h, que está situada en la línea de referencia de h_1 a una distancia de *L.T.* igual a la cota. La traza α'_2 pasa por V'_h y por el punto de concurrencia de las trazas en la *L.T.*. La traza β'_2 es paralela a ella y pasa por el punto de corte de β_1 con *L.T.*.

Aplicación



Se desea hallar la distancia del punto *C* a la recta *r*.

Dos cambios de plano sucesivos, primero vertical y después horizontal, colocan la recta en posición vertical. De este modo la distancia entre el punto y la recta coincide con la que existe entre sus primeras proyecciones *d*.

La línea de tierra del sistema *{V'H}* se elige paralela a r_1. La segunda proyección r'_2 pasa por las segundas proyecciones A'_2, B'_2 de dos puntos *A*, *B* de la recta, que se obtienen transportando sus cotas sobre líneas de referencia perpendiculares a la nueva *L.T.*, a partir de ella.

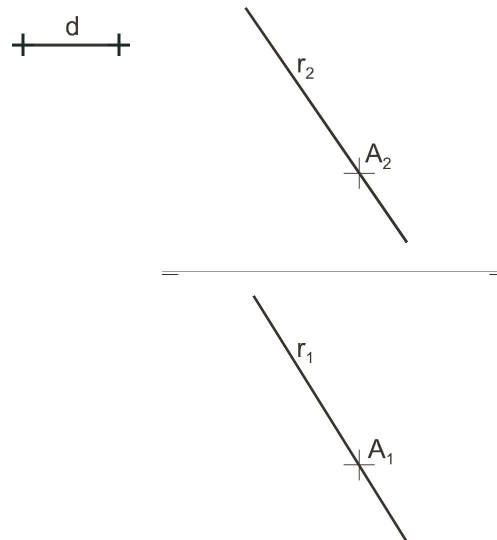
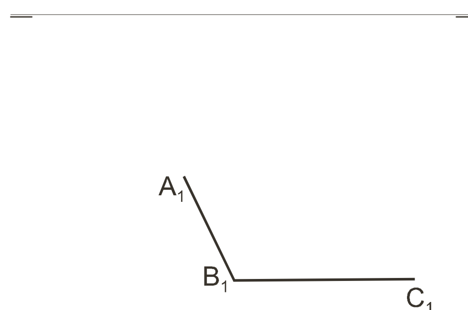
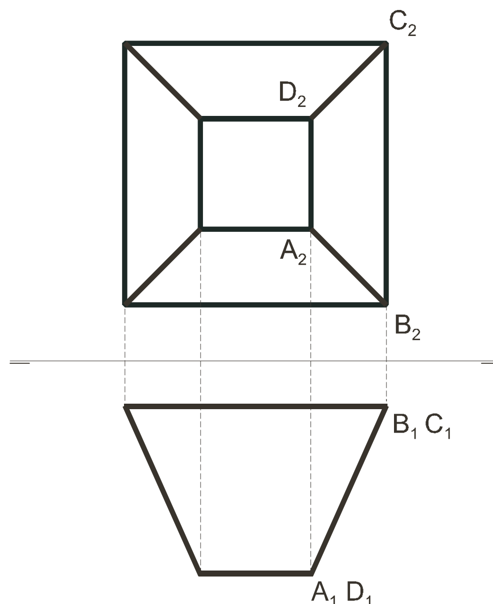
La línea de tierra del sistema *{V'H'}* se elige perpendicular a r'_2. La primera proyección r''_1 coincide con A''_1, B''_1 y se obtiene transportando su alejamiento, sobre la línea de referencia perpendicular a la nueva *L.T.*, a partir de ella.

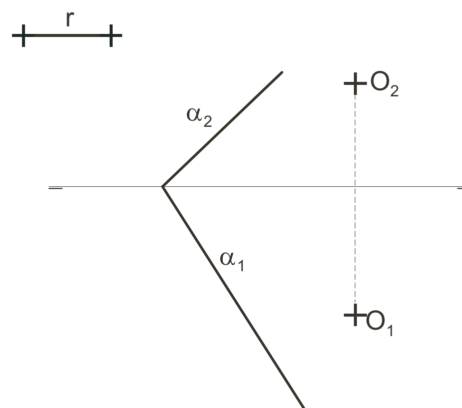
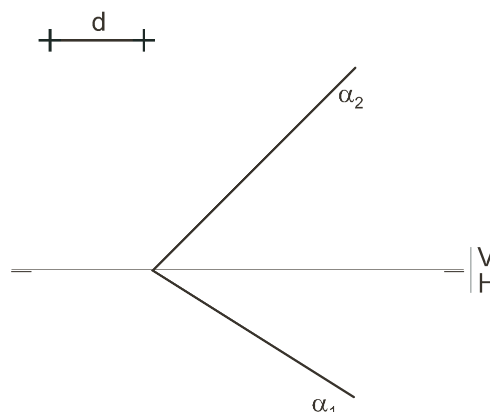
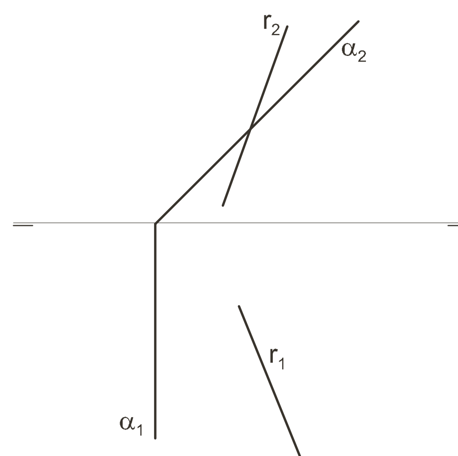


Recuerda

- Entre la proyección de una figura contenida en un plano oblicuo y su abatimiento sobre el Plano Horizontal existe una afinidad en la que el eje es la traza horizontal y la dirección de afinidad coincide con la de abatimiento.
- Para representar una figura plana situada en un plano dado, se abaten las trazas de éste, se dibuja la figura sobre el plano abatido y se obtiene su afín, que será la proyección en el plano de abatimiento.
- El giro de una recta oblicua alrededor de un eje vertical, hasta que su primera proyección sea paralela a la línea de tierra, la sitúa en posición frontal.
- El giro de una recta frontal alrededor de un eje horizontal, hasta que su segunda proyección sea perpendicular a la línea de tierra, la sitúa en posición vertical.
- El giro de un plano oblicuo alrededor de un eje vertical, hasta que su traza horizontal sea perpendicular a la línea de tierra, lo sitúa en posición de canto.
- El giro de un plano de canto alrededor de un eje horizontal, hasta que su traza vertical sea paralela a la línea de tierra, lo sitúa en posición horizontal.
- En un cambio de plano vertical la cota y la primera proyección de los puntos no se modifica.
- En un cambio de plano horizontal el alejamiento y la segunda proyección de los puntos no se modifica.
- Una recta oblicua se sitúa en posición frontal mediante un cambio de plano vertical, en el que la línea de tierra sea paralela a su primera proyección.
- Una recta frontal se sitúa en posición vertical mediante un cambio de plano horizontal, en el que la línea de tierra sea perpendicular a su segunda proyección.
- Un plano oblicuo se sitúa en posición de canto mediante un cambio de plano vertical, en el que la línea de tierra sea perpendicular a su traza horizontal.
- Un plano de canto se sitúa en posición horizontal mediante un cambio de plano horizontal, en el que la línea de tierra sea paralela a su traza vertical.

Actividades

1. Situar los puntos *C*, *D* sobre la recta *r*, a una distancia *d* del punto *A*, mediante giro.	
2. Hallar las proyecciones de los segmentos perpendiculares $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ conocidas sus primeras proyecciones y que *A*, *C* son puntos del plano horizontal.	
3. Mediante un giro obtener la verdadera magnitud de la cara *ABCD* del sólido.	

4. Hallar la proyección horizontal de un octógono regular contenido en el plano α, conocido el radio *r* de su circunferencia circunscrita y las proyecciones de su centro *O*.	
5. Obtener uno de los puntos de la línea de tierra que está situado a la distancia *d* del plano α.	
6. Hallar la verdadera magnitud del ángulo que forman la recta *r* y el plano α. Efectuar primero un cambio de plano horizontal que sitúe el plano α en posición horizontal y a continuación un cambio de plano vertical.	

6 Sistema diédrico: poliedros regulares y pirámides

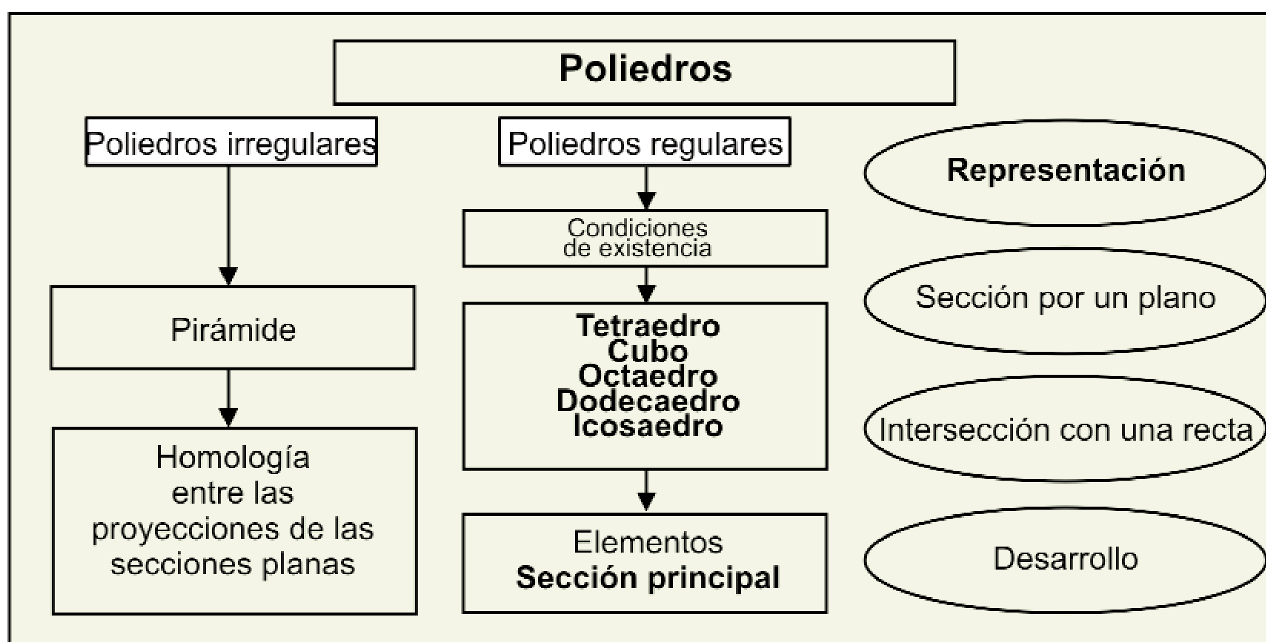
● *Icosaedro (modificación de la fotografía: Eneágono del Banco de imágenes del ISFTIC)*

La representación de los poliedros debe abordarse desde la comprensión de sus propiedades. Después de definir los poliedros, sus características y elementos, se plantea el estudio de los poliedros regulares: sus condiciones de existencia, sección principal y representación en distintas posiciones.

La representación de los poliedros regulares se realiza obteniendo primero la proyección horizontal, hallando, a continuación, la cota de los vértices mediante el abatimiento de la sección principal y trazando, por último, líneas de referencia hasta dichas cotas para obtener la segunda proyección de los vértices. El trazado de las aristas debe realizarse cara a cara , comenzando por las más próximas al observador, que serán vistas, y terminando con las más alejadas, que pueden ser ocultas.

Con el estudio de esta Unidad nos proponemos alcanzar los siguientes **objetivos**:

1. Utilizar las propiedades de los poliedros regulares para representarlos en distintas posiciones, en diédrico.
2. Realizar construcciones basadas en las relaciones entre los poliedros regulares y en el conocimiento de sus elementos y propiedades.
3. Realizar secciones de poliedros por planos e intersecciones por rectas.
4. Obtener el desarrollo de cualquier poliedro regular y de la pirámide.



ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. Tetraedro, octaedro e icosaedro

1.1. Superficie poliédrica y poliedro. Los poliedros regulares: condiciones de existencia

Poliedro es el sólido terminado por superficies planas. Dos superficies contiguas del poliedro se encuentran en una arista. Tres o más superficies y sus aristas comunes se encuentran en un vértice. La superficie que lo limita se llama **poliédrica** y está formada por un número finito de polígonos llamados caras, dispuestos de tal modo que cada uno de sus lados pertenece a dos polígonos que están en distinto plano [Ilustración 1].

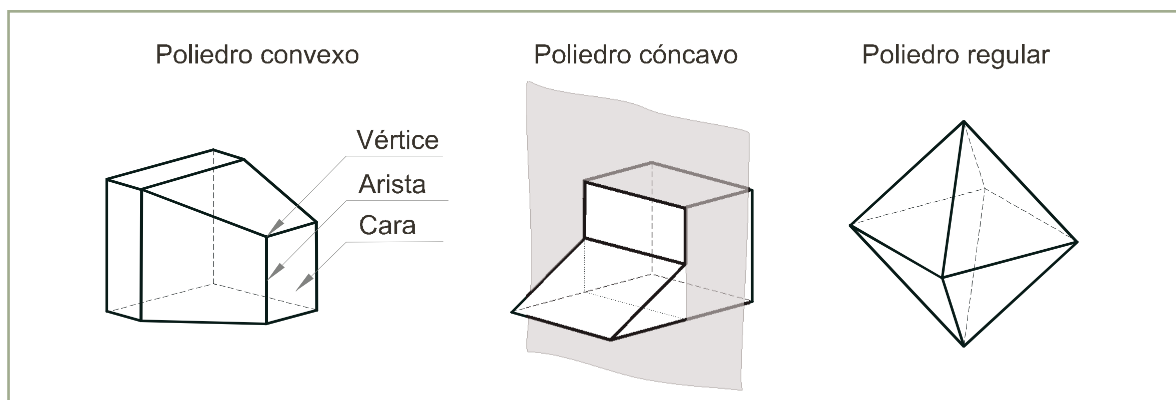


Ilustración 1

Un poliedro es convexo si el plano de cada cara deja a las demás en un mismo semiespacio, de los dos en que el plano divide el espacio. Será cóncavo en caso contrario.

Se llama regular a un poliedro convexo cuyas caras son polígonos regulares iguales y en cuyos vértices concurren el mismo número de ellas. Irregular es cualquier poliedro que no sea regular.

En un **poliedro** convexo los puntos del espacio comprendidos entre los planos que concurren en un vértice forman un **ángulo poliedro**. En un poliedro regular, la suma de los ángulos de los polígonos regulares que concurren en un vértice debe ser menor que 360º para formar el ángulo poliedro, lo que limita la existencia de los poliedros regulares a cinco [Ilustración 2]:

- Cuando las caras son triángulos equiláteros se puede formar un **tetraedro regular** si concurren 3 caras en un vértice, un **octaedro regular** si lo hacen 4 y un **icosaedro regular** con 5, pero 6 caras darían un ángulo poliedro de 6 × 60º = 360º.
- Cuando las caras son cuadrados se puede formar un **cubo** o hexaedro regular si concurren 3 caras en un vértice, pero 4 darían un ángulo poliedro de 4 × 90º = 360º.
- Cuando las caras son pentágonos regulares se puede formar un **dodecaedro regular** si concurren 3 caras en un vértice, pero 4 darían un ángulo poliedro de 4 × 108º > 360º.

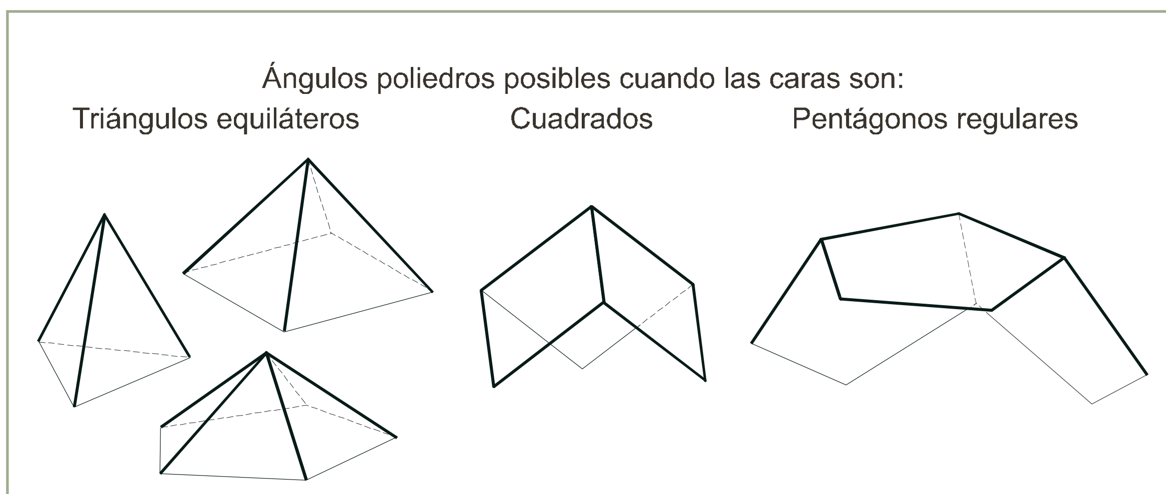


Ilustración 2

- Cuando las caras son hexágonos regulares y concurren 3 en un vértice darían un ángulo poliedro de 3 × 120º = 360º, no pudiendo formarse ningún poliedro, ni tampoco con polígonos regulares de 7, 8, ... lados.

1.2. Propiedades de los poliedros regulares

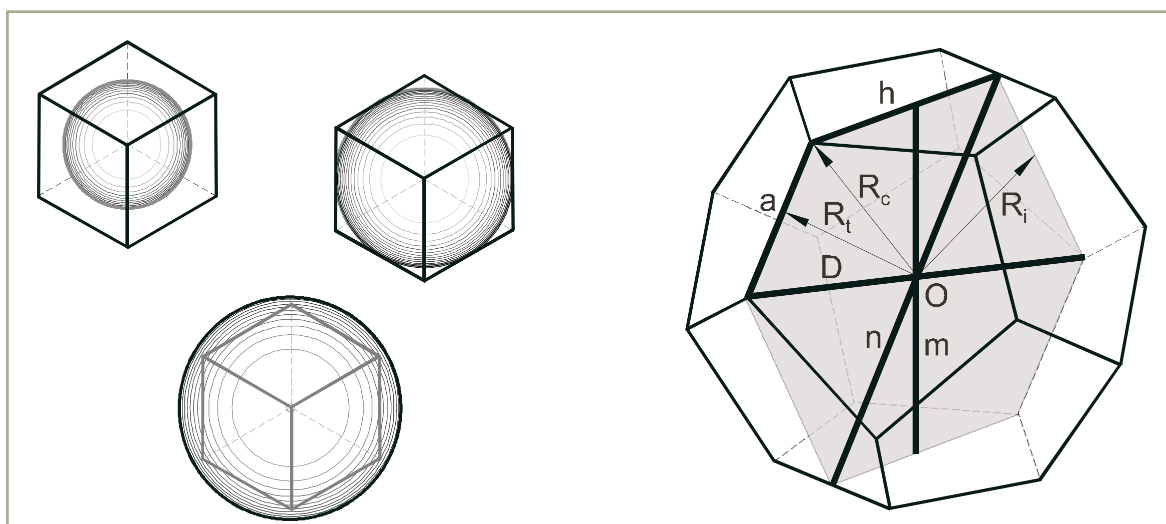


Ilustración 3 Animación

Los **poliedros regulares** tienen un centro que, a su vez, es el centro de las esferas [Ilustración 3 izquierda]:

- Inscrita, tangente a las caras en su centro.
- Tangente a las aristas en su punto medio.
- Circunscrita, que pasa por los vértices.

Se llama sección principal del poliedro regular [Ilustración 3 derecha] a la realizada por un plano de simetría que contenga la mayor cantidad posible de sus principales magnitudes:

- Centro *O* y radios R_i, R_t, R_c de las tres esferas: inscrita, tangente a las aristas y circunscrita.
- Arista del poliedro *a*, que es también el lado de una cara.
- Diagonal del poliedro *D* y de una cara *d* (la sección principal del dodecaedro de la figura no la contiene).
- Altura del poliedro (la tienen sólo el tetraedro y el cubo por ser además pirámide y prisma) y de una cara *h*.
- Distancia entre caras *m* o aristas opuestas *n*.

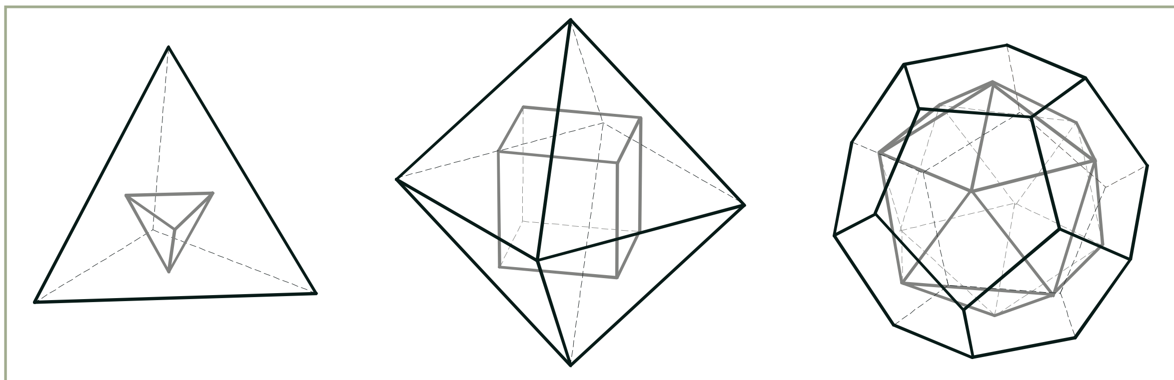


Ilustración 4

Se llaman **poliedros regulares conjugados** a aquellos poliedros que se obtienen, uno a partir del otro, uniendo los centros de sus caras [Ilustración 4]:

- El tetraedro es conjugado de sí mismo.
- El octaedro lo es del cubo.
- El icosaedro lo es del dodecaedro.

1.3. Sección principal y desarrollo del tetraedro

La **sección principal** del tetraedro se obtiene al cortarlo por un plano que contiene una arista y el punto medio de la opuesta. Es un triángulo isósceles de base la arista y lados la altura de la cara. En la Ilustración 5 aparecen las principales magnitudes:

- Centro *O* y radios $\overline{OP}$, $\overline{ON}$, $\overline{OB}$ de las esferas inscrita, tangente a las aristas y circunscrita.
- Arista del tetraedro $\overline{AB}$.
- Altura del tetraedro $\overline{BP}$ y de una cara $\overline{BM}$.
- Distancia entre aristas opuestas $\overline{MN}$.

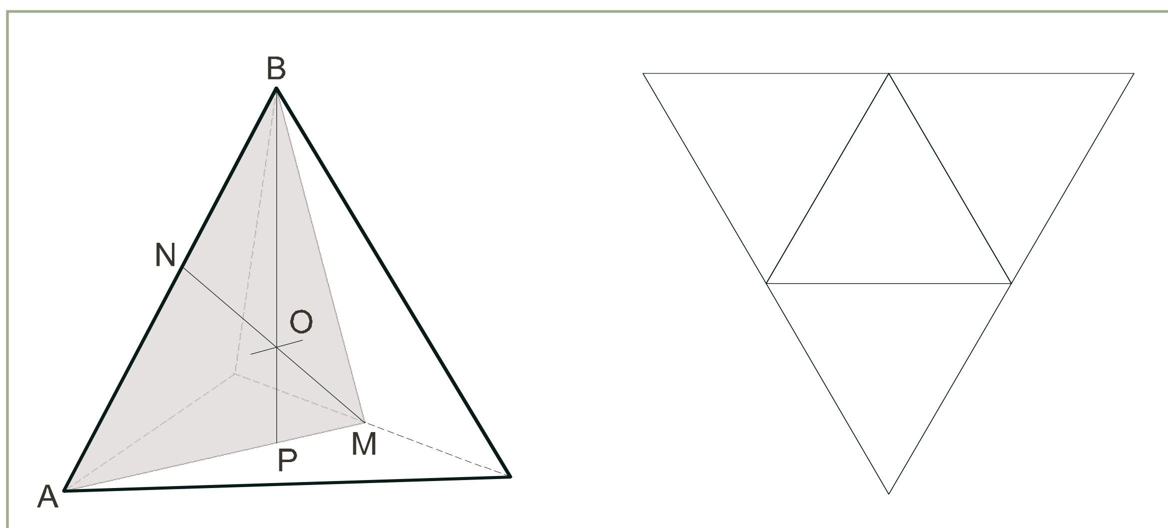


Ilustración 5 Animación

El desarrollo del tetraedro está formado por 4 triángulos equiláteros de lado igual a la arista [Ilustración 5 derecha].

1.4. Tetraedro con una cara contenida en el plano horizontal

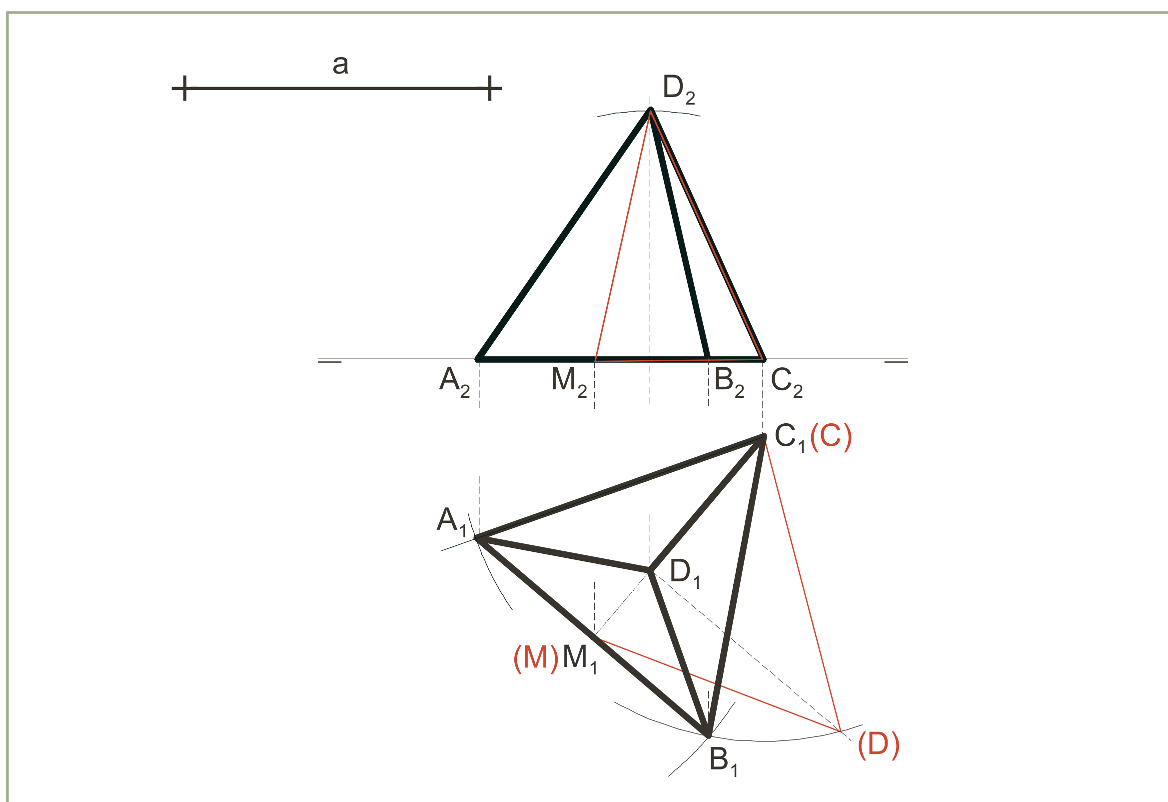


Ilustración 6

Sea *a* la arista [Ilustración 6].

La primera proyección está formada por la cara contenida en el plano horizontal dividida en tres triángulos isósceles iguales, que son proyección de las otras tres.

La primera proyección de la cara contenida en el plano horizontal se construye trazando el lado $A_1C_1 = a$ con la inclinación que se desee respecto a *l. t.* y los arcos de radio *a* y centros en A_1 y C_1. Las perpendiculares desde cada vértice a su lado opuesto se cortan en la primera proyección D_1 del vértice superior, que se une con A_1, B_1 y C_1.

Se abate la sección principal *CDM* sobre el plano horizontal tomando como charnela el lado $CM = C_1M_1$. Los vértices $C = C_1$, $M = M_1$ son puntos dobles y el tercero *D*, en su posición abatida *(D)*, es el punto de corte del arco de centro C_1 y radio *a* con su dirección de abatimiento, que es la perpendicular a C_1M_1 desde D_1. La distancia $\overline{D_1(D)}$ es la altura del tetraedro, que coincide con la cota del vértice *D*.

Se trazan líneas de referencia desde A_1, B_1 y C_1 hasta *l. t.* y desde D_1 hasta la cota $\overline{D_1(D)}$, obteniendo A_2, B_2, C_2 y D_2 respectivamente, que unidos entre sí dan las segundas proyecciones de las aristas del tetraedro.

1.5. Tetraedro apoyado por una arista en el plano horizontal

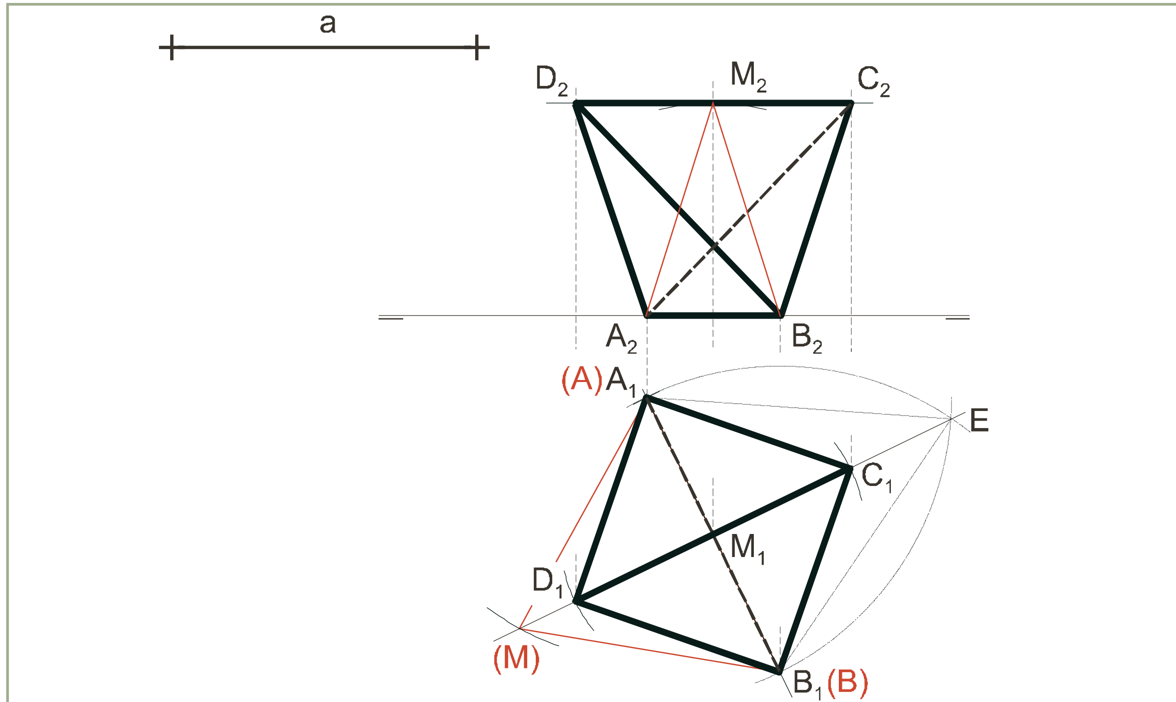


Ilustración 7

Sea *a* la arista [Ilustración 7].

La primera proyección está formada por el cuadrado cuya diagonal es la arista contenida en el plano horizontal, que es proyección de las dos caras ocultas que concurren en ella, y la diagonal que es proyección de la arista opuesta, en la que se unen las otras dos caras.

Se traza con línea discontinua la diagonal $A_1B_1 = a$ y la mediatriz que la corta en su centro M_1. Se trazan arcos de centro M_1 y radio M_1A_1, que cortan a la mediatriz en los extremos de la otra diagonal C_1D_1, que se dibujará con línea continua, así como los lados del cuadrado.

Se abate la sección principal *ABM* sobre el plano horizontal tomando como charnela el lado $AB = A_1B_1$. Para ello, se precisa conocer la altura de una cara que puede obtenerse construyendo el triángulo equilátero A_1B_1E. Al abatir, los vértices A_1, B_1 son puntos dobles y el tercero *M*, en su posición abatida *(M)*, es el punto de corte del arco de centro A_1 y radio $\overline{M_1E}$ con su dirección de abatimiento, que es la perpendicular a A_1B_1 desde M_1. La distancia $\overline{M_1(M)}$ es la cota del punto *M* y de la arista *CD*.

Se trazan líneas de referencia desde A_1, B_1 hasta *l. t.* y desde C_1, D_1 hasta la cota $\overline{M_1(M)}$, obteniendo A_2, B_2, C_2 y D_2 respectivamente, que unidos entre sí, dan las segundas proyecciones de las aristas del tetraedro. En la primera proyección puede verse cómo las caras *DCB* y *DAB*, más próximas al observador, al realizar la proyección vertical, ocultan la arista *AC*.

1.6. Sección principal y desarrollo del octaedro

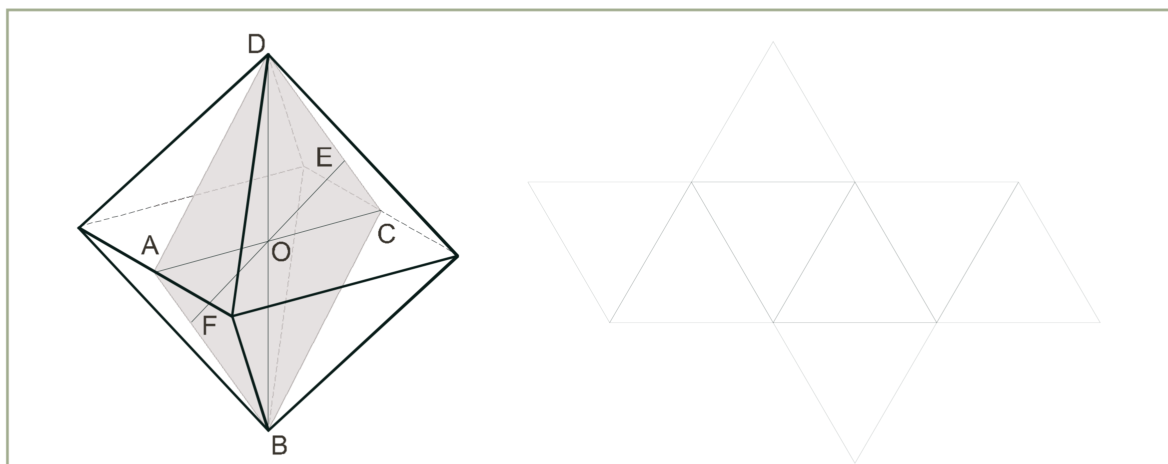


Ilustración 8 Animación

La sección principal del octaedro se obtiene al cortarlo por un plano que contiene una diagonal y es perpendicular a dos aristas opuestas. Es un rombo de lado igual a la altura de una cara y diagonales iguales a la arista y la diagonal del octaedro.

En la Ilustración 8 aparecen las principales magnitudes:

- Centro *O* y radios $\overline{OE}$, $\overline{OC}$, $\overline{OB}$ de las esferas inscrita, tangente a las aristas y circunscrita, respectivamente.
- Diagonal del octaedro $\overline{BD}$.
- Altura de la cara del octaedro $\overline{AD}$.
- Distancia entre caras opuestas $\overline{EF}$ y entre aristas opuestas $\overline{AC}$, que coincide con la longitud de la arista del octaedro.

El desarrollo del octaedro está formado por 8 triángulos equiláteros de lado igual a la arista [Ilustración 8 derecha].

1.7. Octaedro con una diagonal perpendicular al plano horizontal

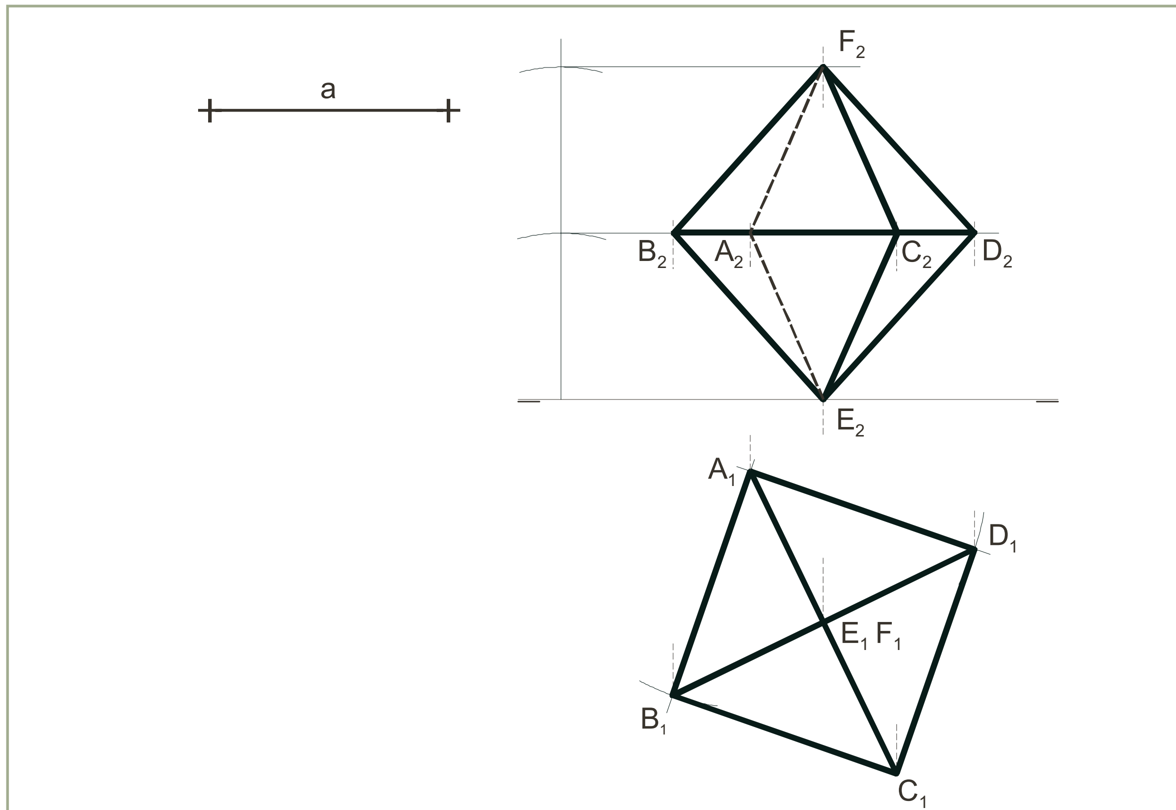


Ilustración 9

Sea *a* la arista [Ilustración 9].

La primera proyección está formada por un cuadrado, de lado igual a la arista, dividido en cuatro triángulos isósceles, que son proyección de cuatro caras vistas y otras cuatro ocultas que se confunden al proyectarlas.

Se transporta la arista $a = A_1B_1$ y se construye el cuadrado $A_1B_1C_1D_1$ tomándola como lado. Las diagonales se cortan en las primeras proyecciones E_1, F_1 del vértice superior *F* e inferior *E*.

Las primeras proyecciones A_1C_1 y B_1D_1 de las diagonales *del octaedro* son paralelas al plano horizontal y están, por tanto, en verdadera magnitud. La segunda proyección E_2F_2 de la diagonal *EF* también lo está, lo que facilita la cota de los vértices *E, F*, situándose los demás a media altura.

Se trazan líneas de referencia desde E_1 hasta *l. t.*, desde A_1, B_1, C_1, D_1 hasta la cota igual a $\overline{A_1E_1}$ y desde F_1 hasta la cota igual a $\overline{A_1C_1}$, obteniendo E_2, A_2, B_2, C_2, D_2 y F_2 respectivamente, que unidos entre sí, dan las segundas proyecciones de las aristas del octaedro. En la primera proyección puede verse cómo las caras *BCE* y *CDE*, más próximas al observador al realizar la proyección vertical, ocultan la arista *AC*.

1.8. Octaedro con una cara contenida en el plano horizontal

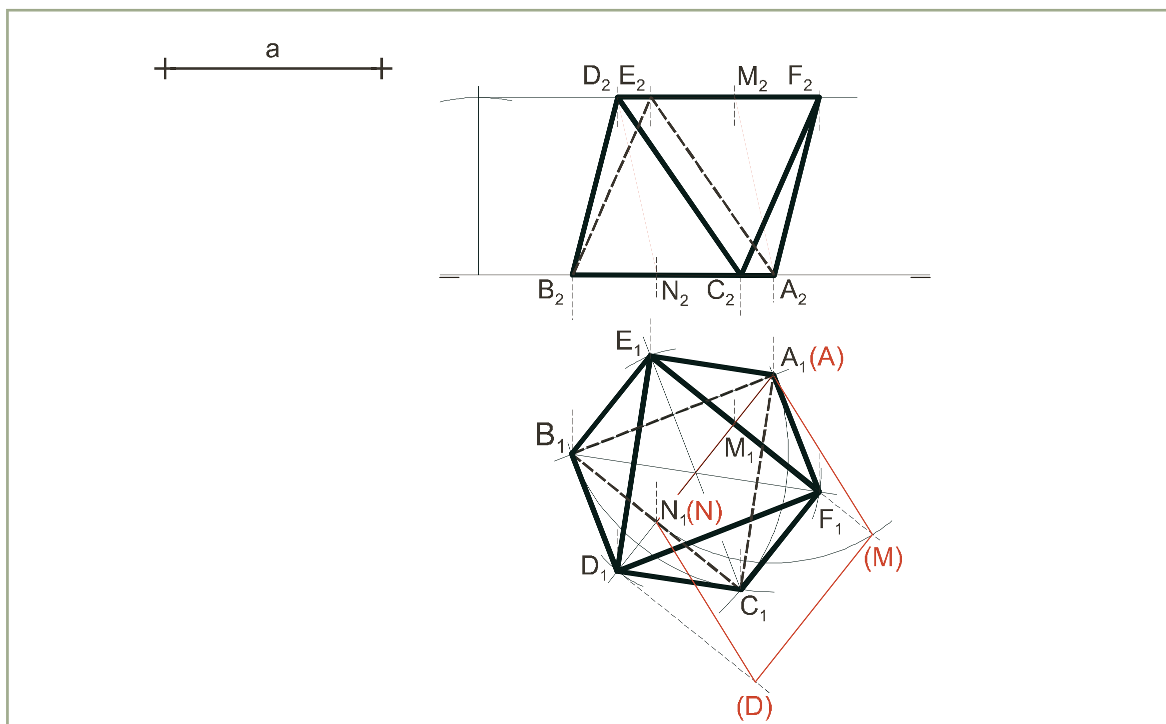


Ilustración 10

Sea *a* la arista [Ilustración 10].

La primera proyección está formada por: la cara oculta $A_1B_1C_1$, contenida en el plano horizontal; el triángulo equilátero $D_1F_1E_1$, simétrico de ella respecto al centro, que es proyección de la cara opuesta y vista; el hexágono regular $A_1B_1C_1D_1F_1E_1$ que es proyección del contorno del octaedro, formado por aristas de las otras seis caras, tres vistas y tres ocultas.

Se construye, con línea discontinua, el triángulo equilátero $A_1B_1C_1$ de lado igual a la arista *a*. El punto de corte de sus alturas es el centro de la circunferencia circunscrita, que las corta en los vértices del triángulo equilátero de la cara superior. El hexágono definido por los vértices de ambos triángulos completa la primera proyección del octaedro.

Se abate la sección principal *ANDM* sobre el plano horizontal, tomando como charnela el lado $AN = A_1N_1$. Al abatir, los vértices $A = A_1$, $N = N_1$ son puntos dobles, y el vértice *M*, en su posición abatida *(M)*, es el punto de corte del arco de centro A_1 y radio la altura de la cara $\overline{A_1N_1}$ con su dirección de abatimiento, que es la perpendicular a A_1N_1 desde M_1. La distancia $\overline{M_1(M)}$ es la cota del punto *M* y de la cara superior *DEF*.

Se trazan líneas de referencia desde A_1, B_1, C_1 hasta *l. t.* y desde D_1, E_1, F_1 hasta la cota $\overline{M_1(M)}$, obteniendo A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2 respectivamente que, unidos entre sí, dan las segundas proyecciones de las aristas del octaedro. En la primera proyección puede verse cómo las caras *DCB*, *CDF*, *CFA*, más próximas al observador, al realizar la proyección vertical ocultan las aristas *BE* y *EA*.

1.9. Sección principal y desarrollo del icosaedro

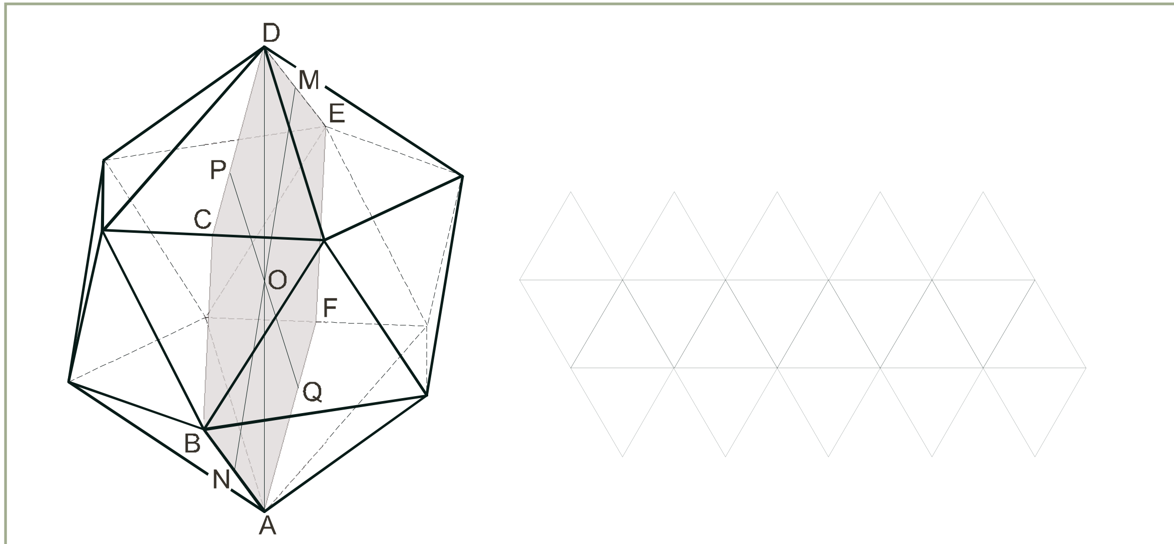


Ilustración 11 Animación

La sección principal del icosaedro se obtiene al cortarlo por un plano que contiene dos aristas opuestas. Es un hexágono irregular con un eje de simetría, dos lados paralelos a él e iguales a la arista, y los otros cuatro iguales a la altura de una cara.

En la Ilustración 11 aparecen las principales magnitudes:

- Centro *O* y radios $\overline{OQ}$, $\overline{ON}$, $\overline{OA}$ de las esferas inscrita, tangente a las aristas y circunscrita, respectivamente.
- Arista del icosaedro $\overline{AB}$.
- Diagonal del icosaedro $\overline{AD}$.
- Altura de la cara del icosaedro $\overline{BC}$.
- Distancia entre caras opuestas $\overline{PQ}$ y entre aristas opuestas $\overline{MN}$.

El desarrollo del icosaedro está formado por 20 triángulos equiláteros de lado igual a la arista [Ilustración 11 derecha].

1.10. Icosaedro con una diagonal perpendicular al plano horizontal

Sea *a* la arista [Ilustración 12].

La primera proyección está formada por: un pentágono regular $A_1B_1C_1D_1E_1$ de lado igual a la arista *a*, dividido en cinco triángulos isósceles que son proyección de las cinco caras inferiores ocultas; la figura simétrica de ésta respecto al centro K_1, que es proyección de las cinco caras superiores; el decágono regular definido por los vértices de ambas figuras, que es proyección del contorno que forman los lados de las diez caras intermedias.

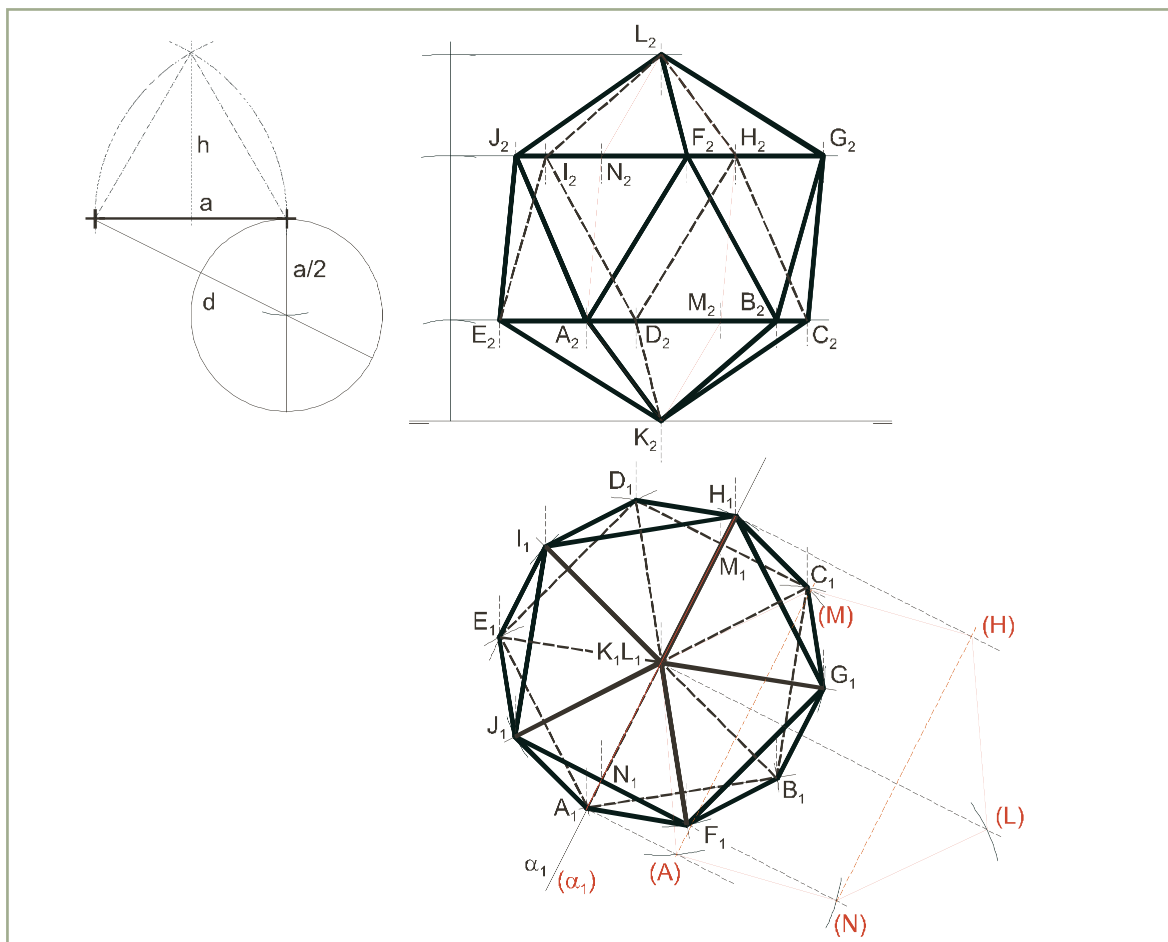


Ilustración 12

Se construye, con línea discontinua, el pentágono regular $A_1B_1C_1D_1E_1$ de lado igual a la arista *a*, y los segmentos de altura que lo dividen en 5 triángulos. Para ello se obtienen sucesivamente: la diagonal *d*, de la cual el lado *a* es sección áurea, el triángulo $A_1B_1D_1$, formado por dos diagonales y un lado, y los vértices C_1, E_1.

Se dibuja con trazo continuo la figura simétrica de la obtenida, respecto a K_1, y el decágono A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1, H_1, I_1, J_1.

Se abate la sección principal *KANLHM* sobre el plano horizontal, tomando como charnela la traza $\alpha_1 = A_1H_1$ del plano vertical que la contiene. Previamente se obtiene, sobre el dato *a*, la altura *h* de una cara, y a continuación se abaten los vértices siguiendo estos pasos:

- *(K)* = K_1 por tratarse de un punto doble y *(A)*, *(N)*, *(L)* se encuentran en el punto de corte de sus direcciones de abatimiento con arcos trazados sucesivamente de centros K_1, *(A)*, *(N)* y radios *a*, *h*, *h*.
- *(M), (H)* son los puntos de corte de sus direcciones de abatimiento con paralelas a α_1 trazadas desde *(A)* y *(H).*

Se trazan paralelas a *l. t.* cuyas cotas sean $\overline{A_1(A)}$, $\overline{N_1(N)}$, $\overline{L_1(L)}$ para obtener las segundas proyecciones de los vértices, mediante líneas de referencia.

Los pentágonos $A_2B_2C_2D_2E_2$ y $F_2G_2H_2I_2J_2$ se proyectan según rectas paralelas a *l. t.* que dividen la segunda proyección del icosaedro en tres zonas, en las que sucesivamente deben trazarse las aristas vistas y ocultas.

2. Cubo y dodecaedro. Intersección de los poliedros regulares con planos y rectas

2.1. Sección principal y desarrollo del cubo

La sección principal del cubo se obtiene al cortarlo por un plano que contiene dos aristas opuestas. Es un rectángulo que tiene dos lados iguales a la arista y los otros dos a la diagonal de una cara.

En la Ilustración 13 aparecen las principales magnitudes:

- Centro *O* y radios $\overline{OE}$, $\overline{OM}$, $\overline{OA}$ de las esferas inscrita, tangente a las aristas y circunscrita, respectivamente.
- Arista, altura del cubo y de una de sus caras $\overline{AD}$.
- Diagonal del cubo $\overline{AC}$ y de una cara $\overline{AB}$.

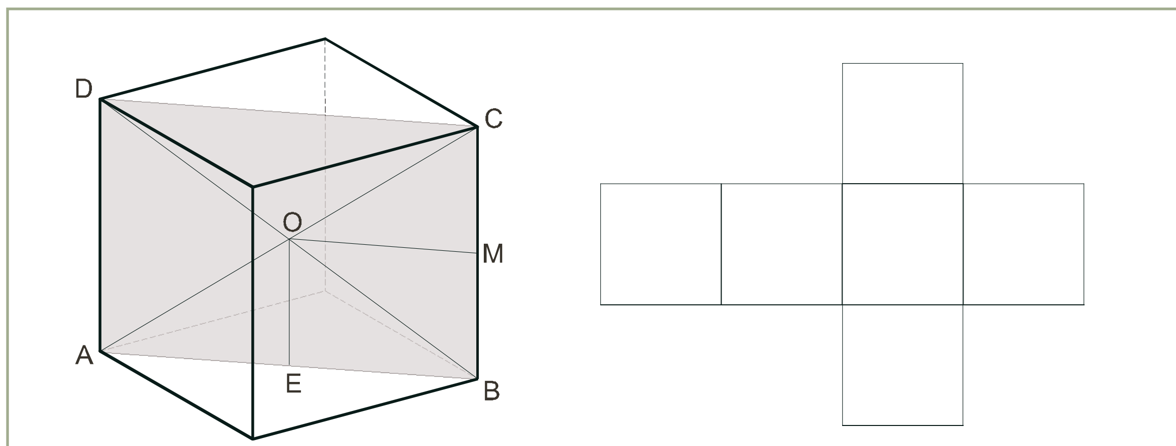


Ilustración 13 Animación

Distancia entre caras opuestas $\overline{AD}$ y entre aristas opuestas $\overline{AB}$.

El desarrollo del cubo está formado por 6 cuadrados de lado igual a la arista [Ilustración 13 derecha].

2.2. Cubo con una cara contenida en el plano horizontal

Sea *a* la arista [Ilustración 14].

La primera proyección es un cuadrado.

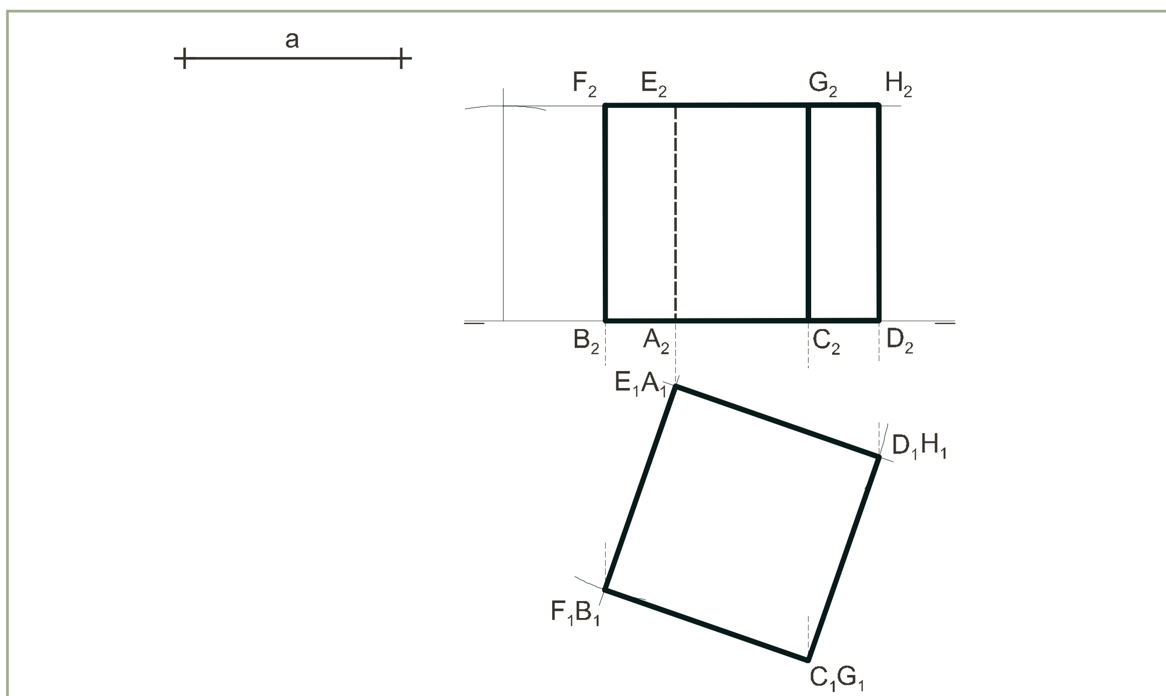


Ilustración 14

La primera proyección de la cara contenida en el plano horizontal se construye trazando el lado $A_1B_1 = a$, con la inclinación que se desee respecto a *l. t.*, el lado A_1D_1 perpendicular a él, y los lados D_1C_1 y B_1C_1, paralelos a ellos. La proyección horizontal de la cara superior $E_1F_1G_1H_1$ coincide con la de la inferior $A_1B_1C_1D_1$.

Se trazan líneas de referencia desde A_1, B_1, C_1, D_1 hasta *l. t.* para obtener A_2, B_2, C_2, D_2, prolongándolas hasta la cota *a,* para obtener E_2, F_2, G_2, H_2. La proyección vertical de la arista *AE* es oculta.

2.3. Cubo con una diagonal perpendicular al plano horizontal

Sea *a* la arista [Ilustración 15].

La primera proyección de las tres caras superiores del cubo son tres rombos que componen un hexágono regular. Su figura simétrica respecto al centro del hexágono es la primera proyección de las tres caras inferiores, que están ocultas.

Se construye, sobre el dato *a,* la diagonal *d* de la cara y la sección principal del cubo, que es un rectángulo de lados *d* y *a*, cuya diagonal es la del cubo *g*.

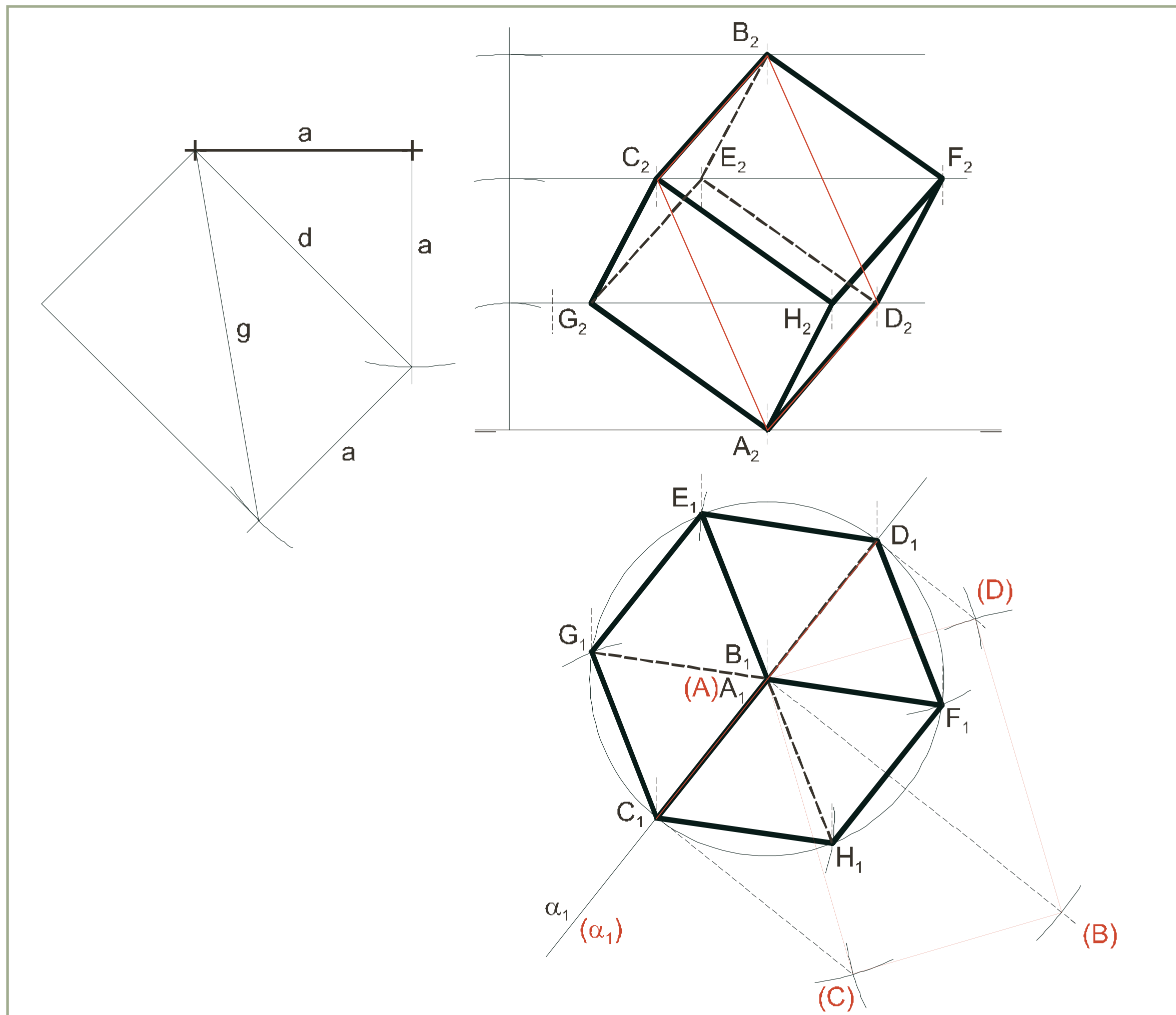


Ilustración 15

Se elige la primera proyección A_1B_1 de la diagonal del cubo, que está en posición vertical, y la de la traza α_1 del plano vertical que contiene a la sección principal *ACBD,* de la cual forma parte.

Se abate la diagonal A_1B_1, de longitud *g*, sobre el plano horizontal, tomando como charnela la traza α_1. Se dibuja la sección principal abatida *(A)(C)(B)(D)* a partir de su diagonal *(A)(B)* mediante arcos de radios *d* y *a*. Se obtiene la primera proyección $A_1C_1B_1D_1$ de la sección principal, la circunferencia de centro A_1 y radio $\overline{A_1C_1}$, y el hexágono regular $C_1G_1E_1D_1F_1H_1$ inscrito en ella. Se completa el trazado de la primera proyección del cubo con la de las aristas vistas B_1C_1, B_1E_1, B_1F_1 y ocultas B_1G_1, B_1D_1, B_1H_1.

Se trazan líneas de referencia desde A_1 hasta *l. t.*, desde G_1, D_1, H_1 hasta la cota $\overline{D_1(D)}$, desde C_1, E_1, F_1 hasta la cota $\overline{C_1(C)}$ y desde B_1 hasta la cota $\overline{B_1(B)}$, obteniendo A_2, G_2, D_2, H_2, C_2, E_2, F_2 , B_2 respectivamente, que unidos entre sí dan las segundas proyecciones de las aristas del cubo. En la primera proyección puede verse cómo las caras *AHCG*, *AHFD*, *BFHC*, más próximas al observador, al realizar la proyección vertical, ocultan las aristas que concurren en *E*.

2.4. Sección principal y desarrollo del dodecaedro

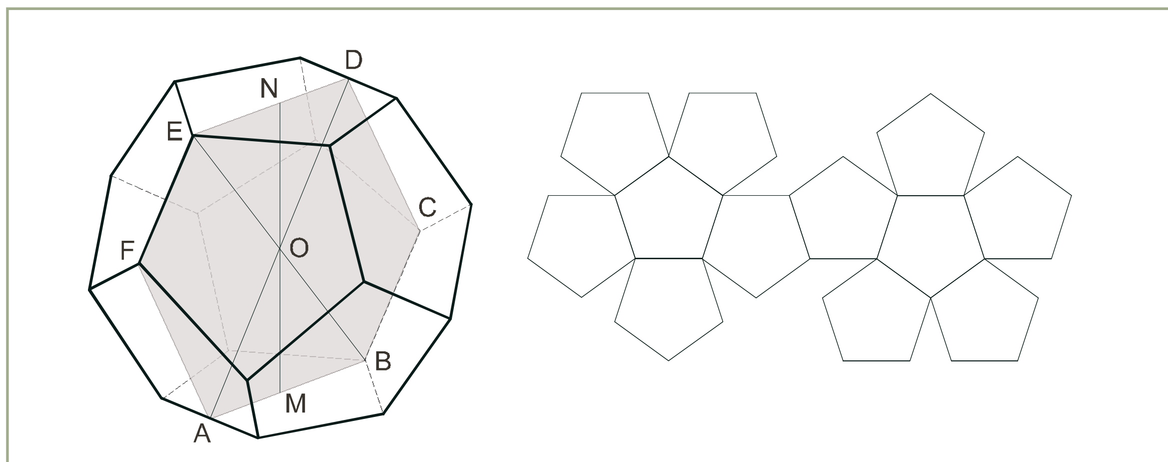


Ilustración 16 Animación

La sección principal del dodecaedro se obtiene al cortarlo por un plano que contiene dos aristas opuestas. Es un hexágono irregular con un eje de simetría, dos lados paralelos a él e iguales a la arista, y los otros cuatro iguales a la altura de una cara.

En la Ilustración 16 aparecen las principales magnitudes:

- Centro *O* y radios $\overline{OM}$, $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ de las esferas inscrita, tangente a las aristas y circunscrita, respectivamente.
- Arista del dodecaedro $\overline{BC}$.
- Diagonal del dodecaedro $\overline{BE}$.
- Altura de la cara del dodecaedro $\overline{AB}$.
- Distancia entre caras opuestas $\overline{MN}$ y entre aristas opuestas $\overline{AD}$.

El desarrollo del dodecaedro está formado por 12 pentágonos regulares de lado igual a la arista [Ilustración 16 derecha].

2.5. Dodecaedro con una cara contenida en el plano horizontal

Sea *a* la arista [Ilustración 17].

La primera proyección de las seis caras superiores del dodecaedro está formada por un pentágono regular, rodeado de cinco pentágonos irregulares adyacentes, cuyos lados libres forman un decágono regular. Su figura simétrica respecto al centro del decágono es la primera proyección de las seis caras inferiores, que están ocultas.

Se construye, con línea discontinua, el pentágono regular $A_1B_1C_1D_1E_1$ de lado igual a la arista *a*, que es la primera proyección de la cara *ABCDE* contenida en el plano α. Para ello se obtiene previamente su diagonal *d*, de la cual el lado *a* es sección áurea.

Para hallar el radio de la circunferencia circunscrita del decágono regular se puede considerar la cara *ABCDE* abatida de la *ABGKF*, siendo α_1 la charnela. La proyección F_1 de *F* será homóloga de su abatida E_1 = (*F*) y se encontrará en el punto de corte de la dirección de afinidad E_1F_1 con el eje de simetría A_1M_1 del dodecaedro.

Las alturas del pentágono proyección de la cara inferior determinan el centro Z_1, de la circunferencia de radio $\overline{Z_1F_1}$, a la cual cortan en los vértices del contorno horizontal F_1, Q_1, J_1, P_1, I_1, O_1, H_1, L_1, G_1, K_1. Se traza el decágono regular que definen con línea continua, y los segmentos $\overline{A_1F_1}$, $\overline{B_1G_1}$, $\overline{C_1H_1}$, $\overline{D_1I_1}$, $\overline{E_1J_1}$ con línea discontinua, para obtener la proyección de las cinco caras unidas a la *ABCDE*.

La figura simétrica de la obtenida respecto a Z_1, trazada con línea continúa, es la proyección de las seis caras restantes.

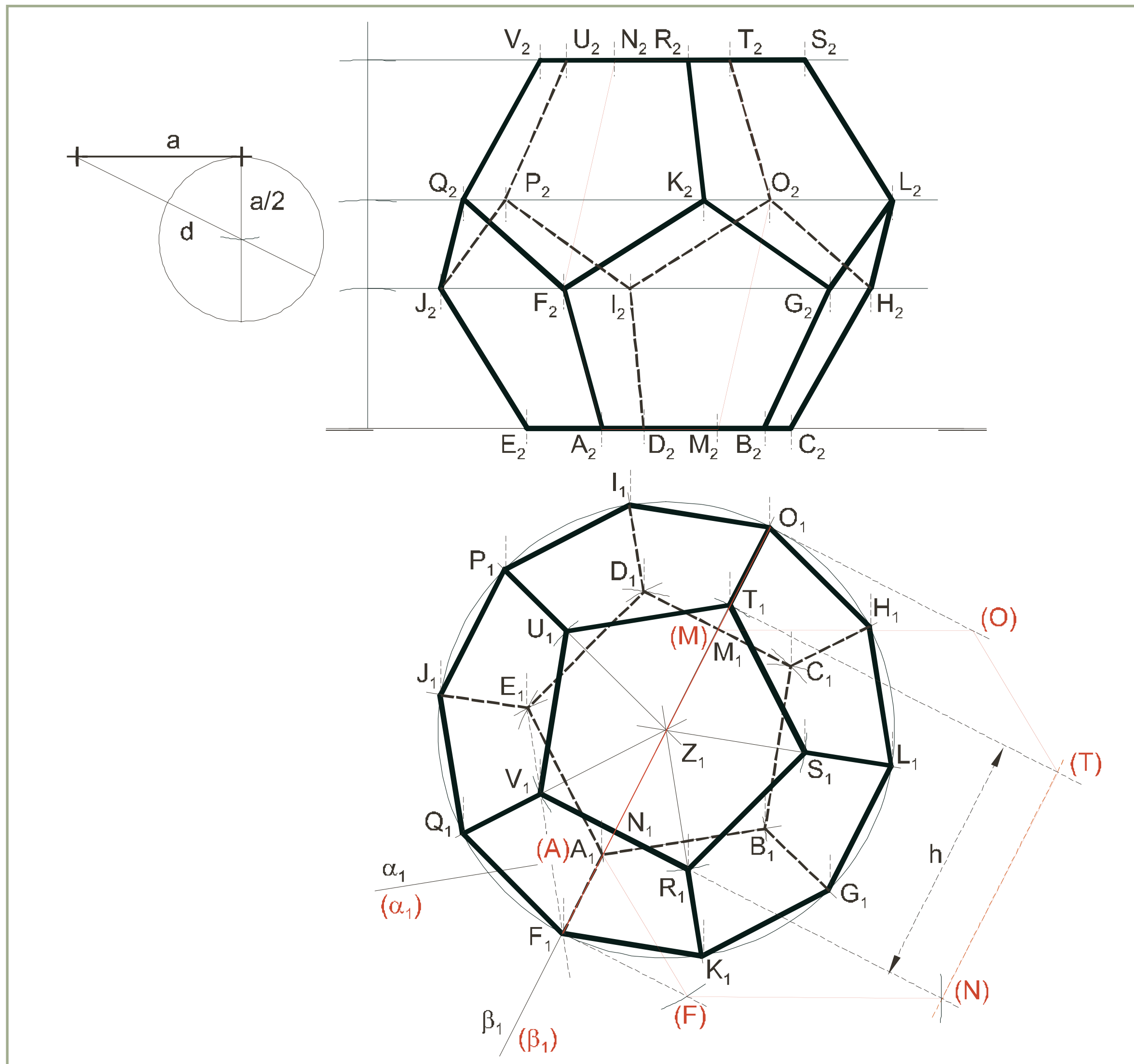


Ilustración 17

Se abate la sección principal *AFNTOM* sobre el plano horizontal, tomando como charnela la traza $\beta_1 = A_1M_1$del plano vertical que la contiene, siguiendo estos pasos:

- $A_1 = (A)$ y $M_1 = (M)$ por tratarse de puntos dobles y *(F)*, *(N)* se encuentran en el punto de corte de sus direcciones de abatimiento con arcos trazados sucesivamente de centros A_1, *(F)* y radios la arista *a* y la altura *h* de la cara.
- $\overline{(M)(O)}$ y $\overline{(O)(T)}$ se trazan paralelas a $\overline{(F)(N)}$ y $\overline{(A)(F)}$.

Se trazan paralelas a *l. t.* cuyas cotas sean $\overline{F_1(F)}$, $\overline{O_1(O)}$, $\overline{T_1(T)}$ para obtener las segundas proyecciones de los vértices mediante líneas de referencia. Para dibujar las segundas proyecciones de las aristas se empieza por las cinco caras unidas a la $A_2B_2C_2D_2E_2$, que se proyectan sobre la *l. t.*.

2.6. Sección de un poliedro regular por un plano oblicuo

Para obtener la sección de un poliedro por un plano oblicuo se realiza un cambio de plano que sitúe al plano en posición de canto.

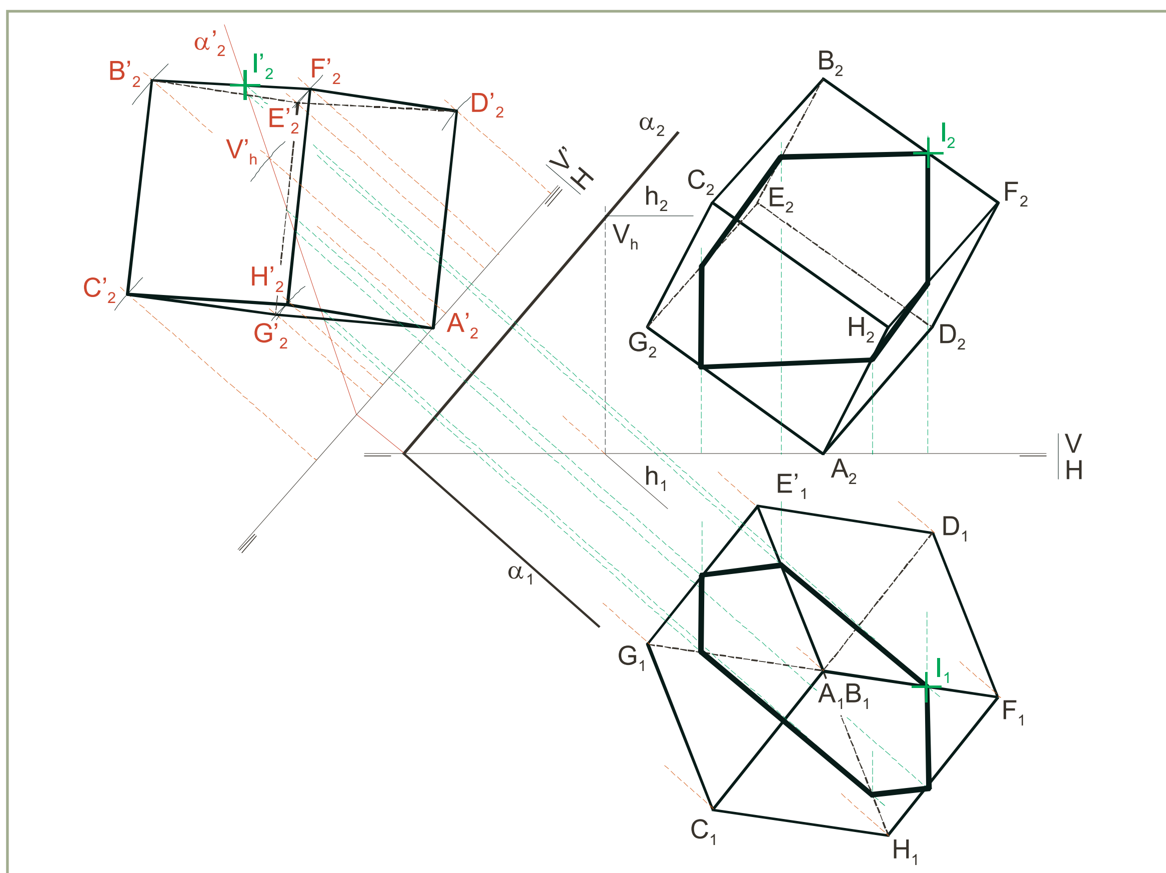


Ilustración 18

Sean α_1, α_2 las trazas del plano, estando el cubo definido por sus proyecciones [Ilustración 18].

Se elige la línea de tierra del nuevo sistema {*V'H*} perpendicular a α_1. La nueva traza vertical α'_2 se obtiene mediante una horizontal de plano *h*. La primera proyección h_1 se mantiene y la segunda h'_2, que coincide con V'_h, es un punto situado a la misma cota que tiene h_2. Se traza α'_2 pasando por V'_h y por el punto de corte de α_1 con *l. t.*.

La segunda proyección de los vértices del cubo en el nuevo sistema se obtiene trazando líneas de referencia desde su proyección primera y llevando la misma cota que tienen en el primer sistema. Para trazar las aristas conviene hacerlo cara a cara, empezando por las más próximas al observador.

La proyección vertical de la sección en el nuevo sistema coincide con la traza α'_2, y la horizontal, igual en ambos sistemas; se obtiene mediante líneas de referencia. Por ejemplo, el punto I'_2 es el punto de corte de la traza α'_2 con la proyección $B'_2F'_2$ de la arista *BF* y su línea de referencia corta a B_1F_1 en I_1.

La proyección vertical de la sección en el primer sistema se obtiene también mediante líneas de referencia. Así, la línea de referencia trazada desde I_1 corta a B_2F_2 en I_2.

2.7. Intersección de un poliedro regular con una recta

Los puntos de intersección de un poliedro con una recta son los de corte con la sección por un plano proyectante que la contenga.

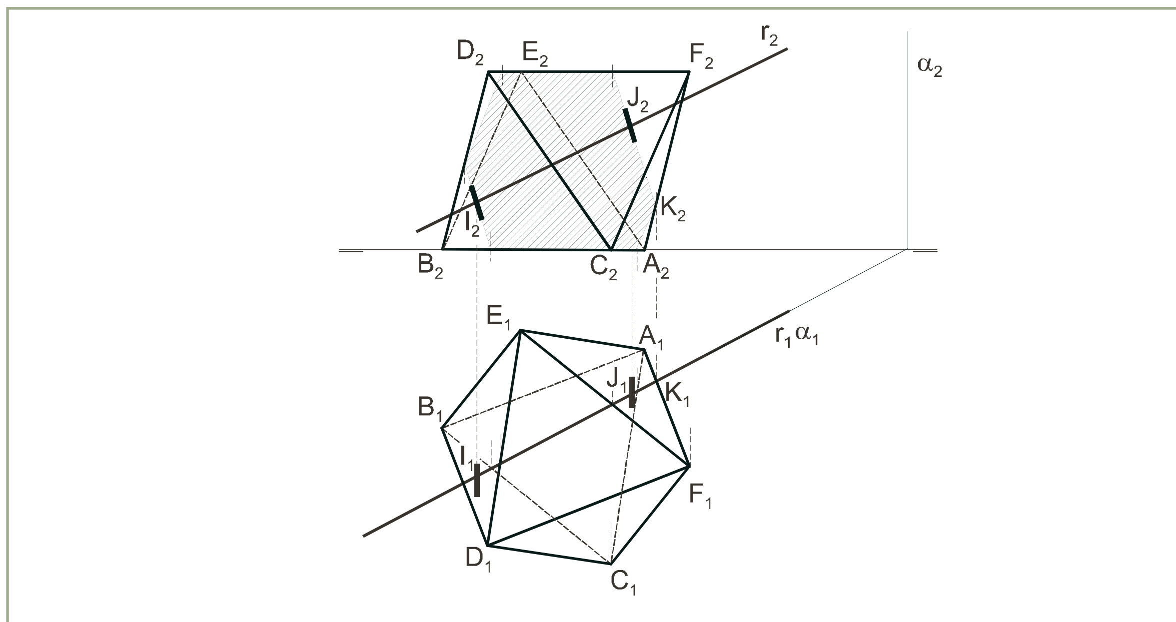


Ilustración 19

Sea el octaedro dado por sus proyecciones y r_1, r_2 las proyecciones de la recta [Ilustración 19].

Se halla la sección del octaedro por el plano vertical α que contiene a *r*. La proyección horizontal coincide con la traza α_1, y la vertical se obtiene mediante líneas de referencia. Por ejemplo, K_1 es el punto de corte de la traza α_1 con la proyección A_1F_1 de la arista *AF* y su línea de referencia corta a A_2F_2 en K_2.

Los puntos de corte I_2, J_2 de r_2 con la segunda proyección de la sección son las segundas proyecciones de los puntos de intersección de recta y octaedro, cuyas primeras proyecciones I_1, J_1 se obtienen mediante líneas de referencia.

3. Pirámide

3.1. Pirámide: definición y clasificación

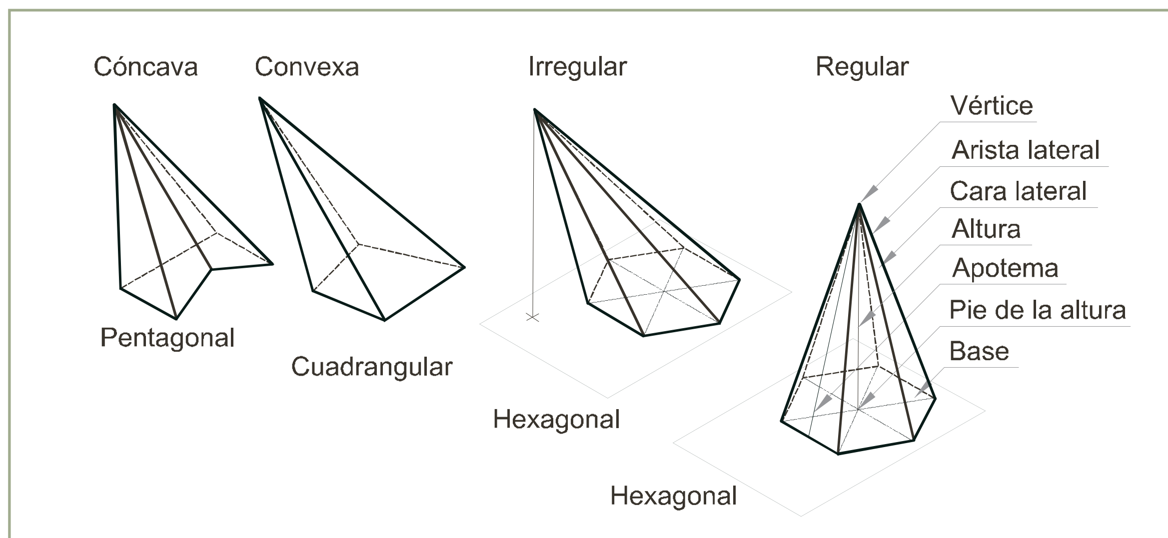


Ilustración 20 Animación

Pirámide es el poliedro cuyas caras son triángulos con un vértice común excepto una, llamada base, que es el polígono formado por los lados opuestos a dicho vértice. La pirámide se llamará triangular, cuadrangular, pentagonal,... según que la base sea un triángulo, cuadrilátero, pentágono... Según sea la base, convexa o cóncava, así será la pirámide [Ilustración 20].

Las caras y aristas que concurren en el vértice común, llamado vértice de la pirámide, reciben el nombre de laterales.

La distancia del vértice al plano que contiene a la base de la pirámide es la altura.

Si la base es un polígono regular y el pie de la altura coincide con su centro, la pirámide se llama regular. Si alguna de dichas condiciones no se cumple la pirámide será irregular.

La altura de las caras laterales de una pirámide regular se llama apotema.

3.2. Pirámide regular apoyada por una cara lateral

Sea *l* el lado de la base y *h* la altura de una **pirámide regular** hexagonal [Ilustración 21].

Se representa la pirámide en un sistema {*VH*} con la base apoyada en el plano horizontal. Para ello, sobre una perpendicular a *l. t.* se transporta el lado *l* de la base y se construye el hexágono regular $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Los seis triángulos isósceles en que las diagonales dividen al hexágono son proyección de sus caras laterales, cuyo vértice común es G_1.

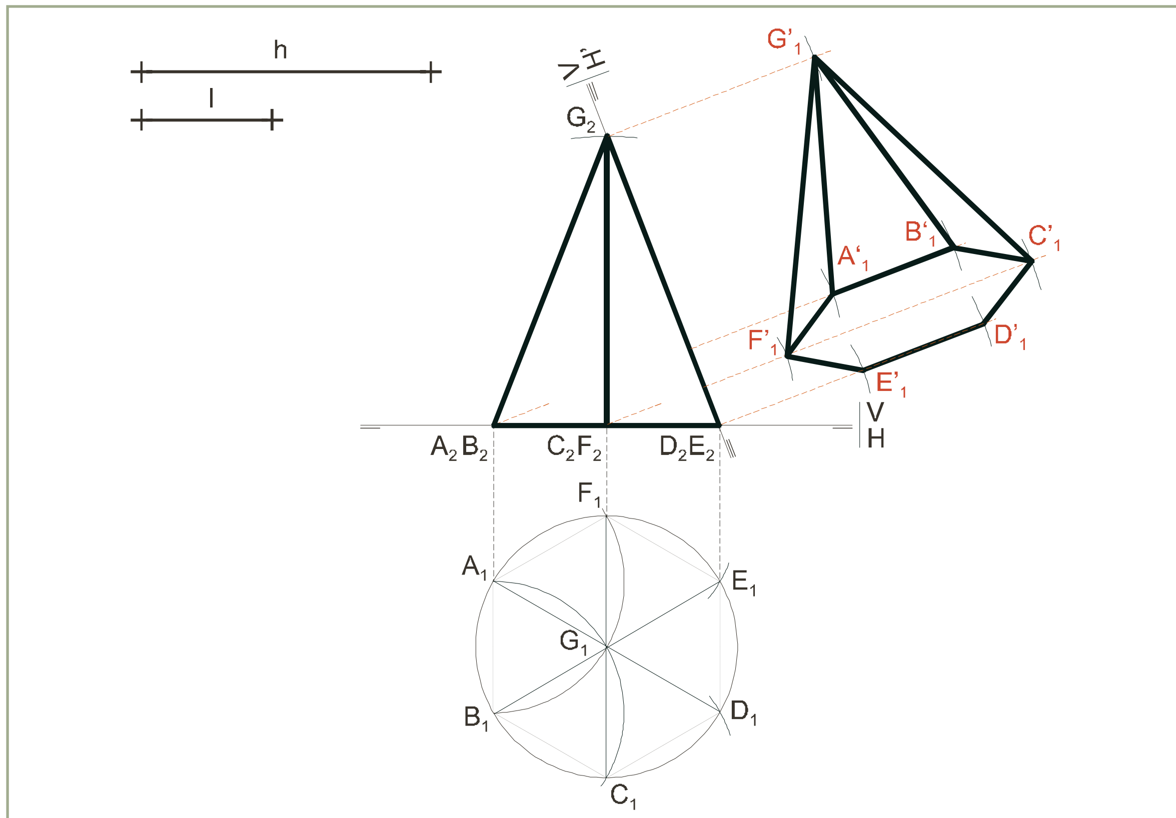


Ilustración 21

Se trazan líneas de referencia desde A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 hasta *l. t.* y desde G_1 hasta la cota *h*, obteniendo A_2, B_2, C_2, D_2, E_2 y G_2 respectivamente, que unidos entre sí, dan las segundas proyecciones de las aristas de la pirámide.

Se efectúa un cambio de plano horizontal, eligiendo éste de modo que coincida con la cara *DEG* de la pirámide. Para ello se elige la línea de tierra del sistema {*VH'*} pasando por D_2, E_2 y G_2. Las primeras proyecciones A'_1, B'_1, ... de los vértices en el sistema {*VH'*} se obtienen transportando sus alejamientos sobre las líneas de referencia perpendiculares a la nueva *l. t.*, a partir de ella. Al unir los vértices para obtener las proyecciones de las aristas conviene empezar por la base.

La representación de la pirámide en el sistema {*VH'*} cumple los objetivos de la construcción.

3.3. Homología entre las proyecciones de las secciones planas de una pirámide

En la Ilustración 22 la base de la pirámide está contenida en el plano horizontal, y se ha efectuado su sección por un plano α. Se puede interpretar este hecho diciendo que una radiación de vértice *V* es seccionada por los planos α y horizontal, produciendo dos figuras homológicas.

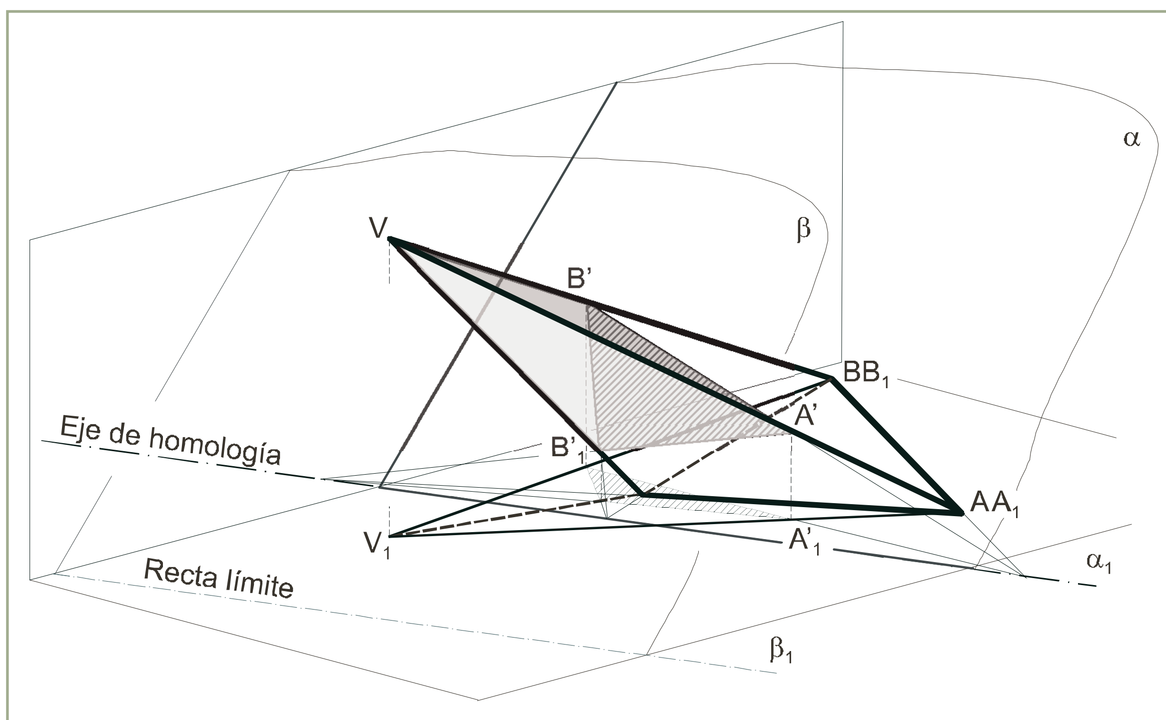


Ilustración 22

Al proyectar el conjunto en el plano horizontal, las primeras proyecciones de la base de la pirámide y de su sección por el plano α serán figuras homológicas. El centro de homología es la proyección primera V_1 del vértice V de la pirámide; el eje de homología es la traza α_1; y la recta límite la traza β_1 del plano β paralelo a α, que pasa por el vértice V.

Así, podemos ver que la recta A_1B_1 es homóloga de la recta $A'_1B'_1$ y los puntos A'_1 y B'_1 son homólogos de los puntos A_1 y B_1 respectivamente.

3.4. Aplicación de la homología a la obtención de secciones planas de una pirámide

Sean α_1, α_2 las trazas del plano, estando la pirámide definida por sus proyecciones [Ilustración 23].

Se halla la sección de la arista GF (o de cualquier otra) con el plano. Para ello se traza el plano de canto β, de modo que su traza vertical β_2 coincida con G_2F_2. Trazada la recta i, de intersección de los planos α y β, se obtiene F'_1 en el punto de corte de las proyecciones primeras i_1 y G_1F_1. La línea de referencia trazada desde F'_1 hasta G_2F_2 dará F'_2.

Se define una homología entre la base de la pirámide A_1, B_1, C_1, ... y la primera proyección de la sección por el plano α en la que F_1 y F'_1 son homólogos, α_1 es el eje de homología y G_1 el centro de homología. Se obtiene el homólogo A'_1 de A_1 en el punto de corte de la recta doble G_1A_1 con la transformada MF'_1 de A_1F_1. Análogamente se obtienen B'_1, C'_1, ...

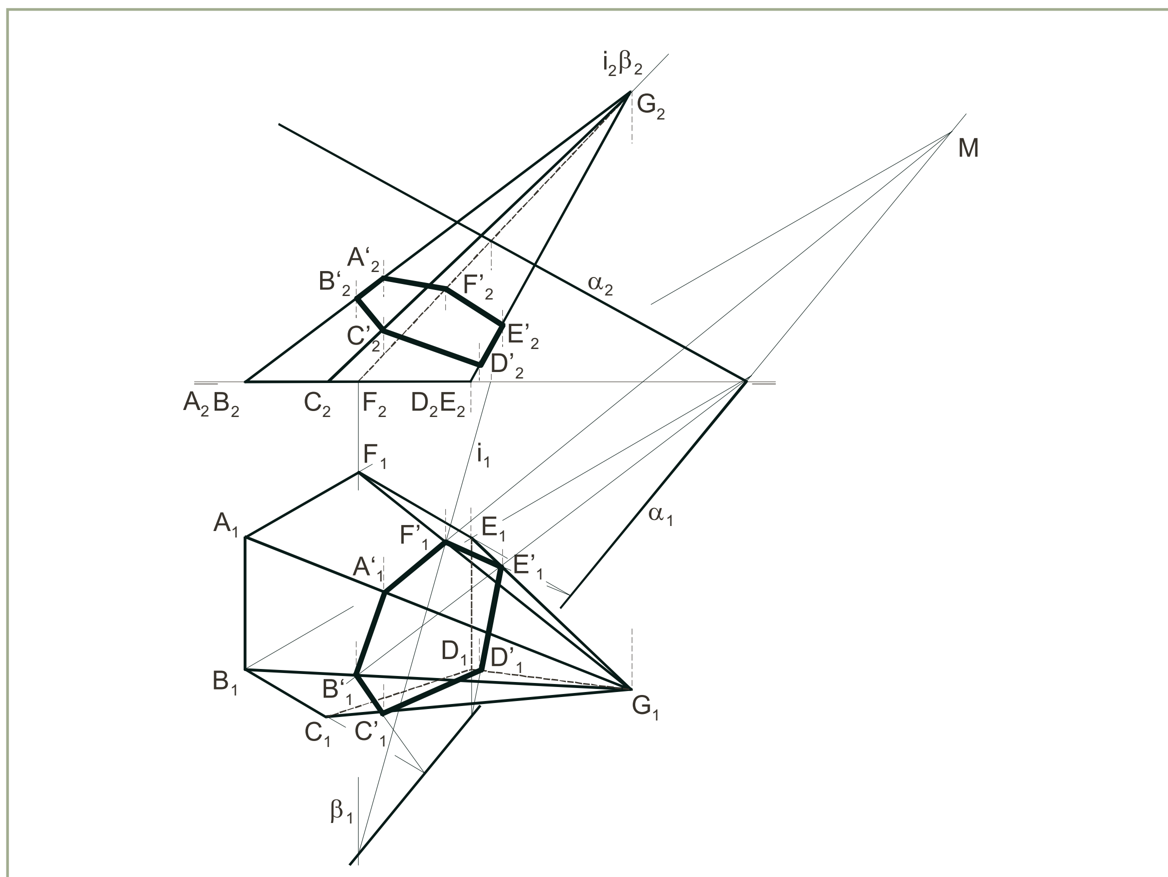


Ilustración 23

La segunda proyección de la sección se obtiene trazando líneas de referencia desde A'_1, B'_1, C'_1, ... hasta las segundas proyecciones de las aristas G_2A_2, G_2B_2, G_2C_2, ..., obteniéndose A'_2, B'_2, C'_2, ...

3.5. Desarrollo de la pirámide

Se define la pirámide por sus proyecciones [Ilustración 24].

La base de la pirámide está en el plano horizontal y, por tanto, en verdadera magnitud. No así las aristas laterales, que es preciso girar alrededor de un eje vertical hasta colocarlas en posición frontal, en la que su proyección vertical no se deforma.

Se elige el eje vertical *e* de modo que su proyección horizontal e_1 coincida con G_1. Al girar las aristas G_1A_1, G_1B_1, G_1C_1, ... el punto G_1 es doble y los puntos A_1, B_1, C_1, ... describen circunferencias en el plano horizontal hasta los puntos de corte A'_1, B'_1, C'_1, ..., con la recta paralela a *l. t.* que pasa por e_1. Líneas de referencia trazadas desde A'_1, B'_1, C'_1, ... hasta *l. t.* permiten obtener A'_2, B'_2, C'_2, ...

La base A_1, B_1, C_1, ... forma parte del desarrollo, debiendo añadírsele las caras laterales que son triángulos cuyos lados se conocen. Mediante dos arcos de centros C_1, D_1 y radios $G'_2C'_2$, $G'_2D'_2$, se construye la cara *GCD*. Análogamente se construyen las demás.

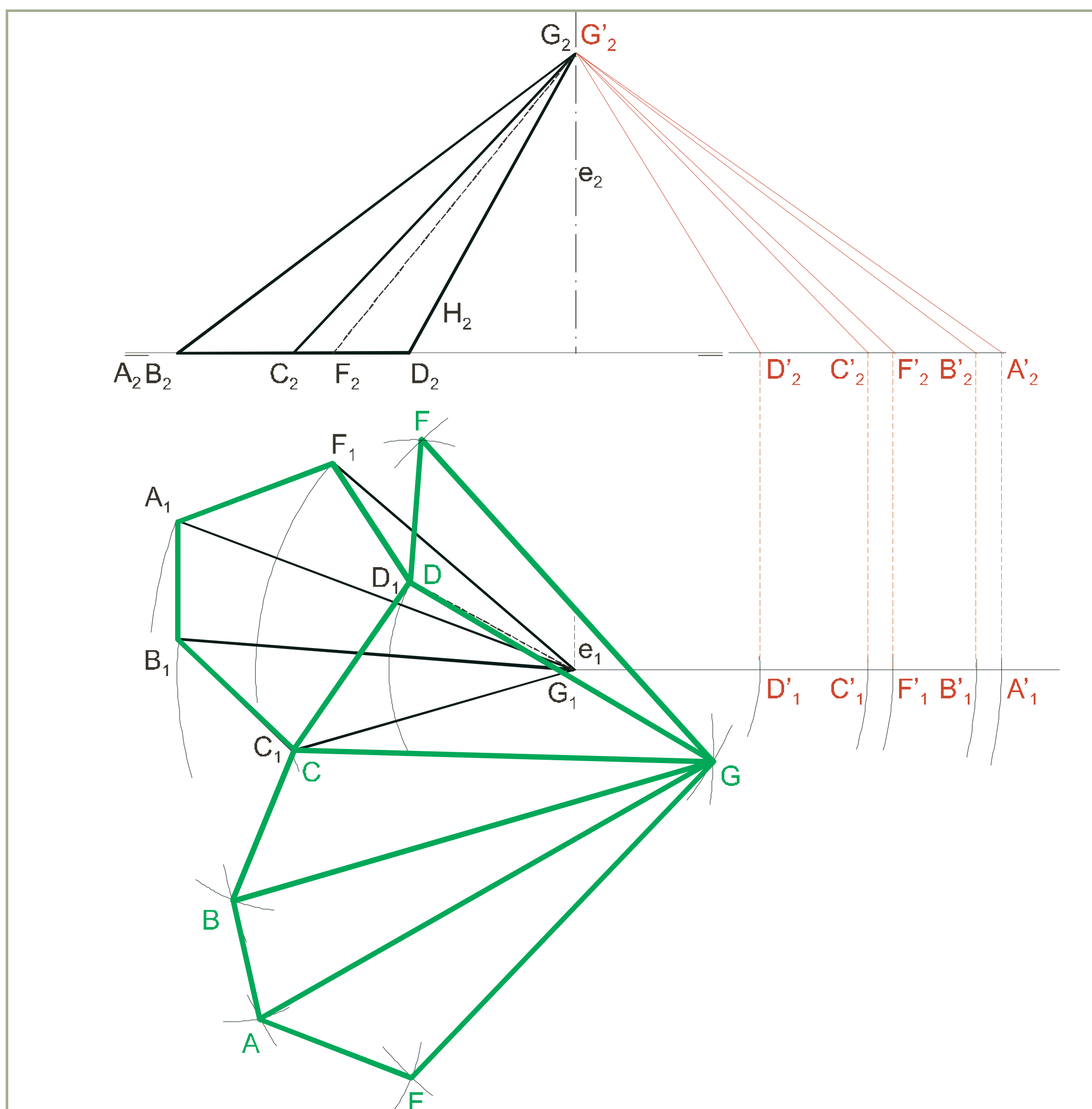


Ilustración 24

3.6. Intersección de la pirámide con una recta

Sean r_1, r_2 las proyecciones de la recta, estando la pirámide definida por las suyas [Ilustración 25].

Un plano de canto α que contenga a la recta *r* produce una sección en la pirámide que es el polígono *A'B'C'D'E'*, cuya proyección vertical $A'_2B'_2C'_2D'_2E'_2$ coincide con la traza α_2. Su proyección horizontal se obtiene trazando líneas de referencia desde A'_2, B'_2, C'_2, ... hasta las aristas correspondientes. Los puntos de corte con ella, de la proyección r_1 de la recta, son las proyecciones horizontales I_1, J_1 de los puntos de intersección de la recta con la pirámide. Sus proyecciones verticales I_2, J_2 se obtienen mediante líneas de referencia.

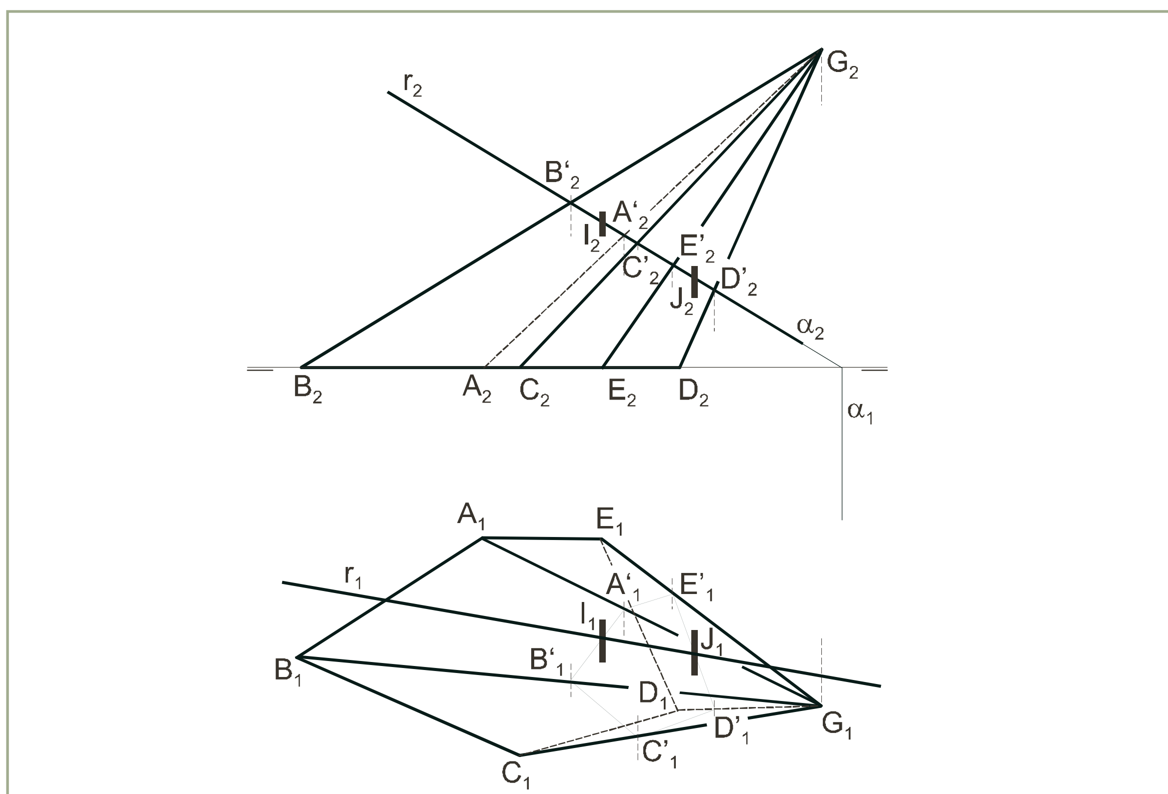


Ilustración 25



Recuerda

- Se llama regular a un poliedro convexo cuyas caras son polígonos regulares iguales y en cuyos vértices concurren el mismo número de ellas.
- Se llama sección principal del poliedro regular a la realizada por un plano de simetría que contenga la mayor cantidad posible de sus principales magnitudes.
- Se llaman conjugados a aquellos poliedros que se obtienen uno a partir del otro uniendo los centros de sus caras.
- La sección principal del tetraedro se obtiene al cortarlo por un plano que contiene una arista y al punto medio de la opuesta.
- La sección principal del octaedro se obtiene al cortarlo por un plano que contiene una diagonal y es perpendicular a dos aristas opuestas.
- La sección principal del icosaedro, cubo, y dodecaedro se obtiene al cortarlos por un plano que contiene dos aristas opuestas.
- Para obtener la sección de un poliedro por un plano oblicuo se realiza un cambio de plano que sitúe al plano en posición de canto.

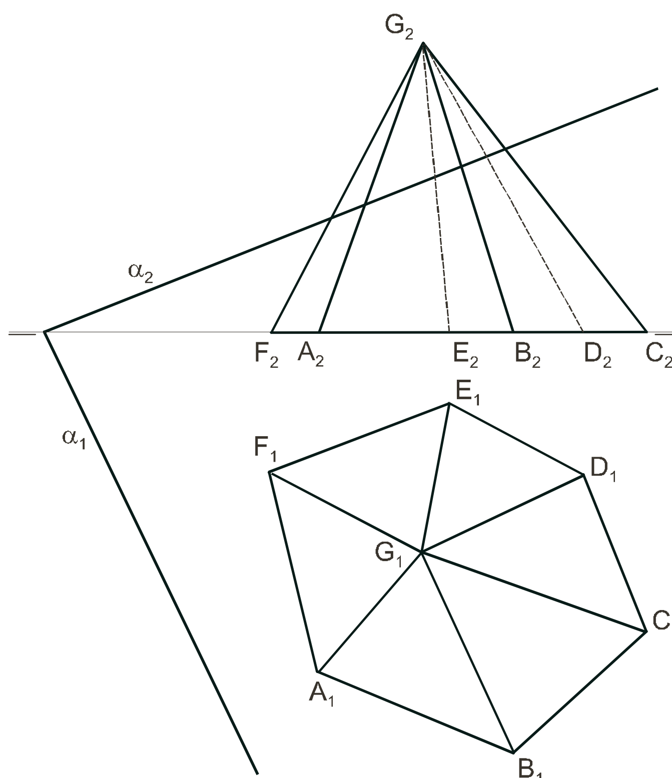
- Los puntos de intersección de un poliedro con una recta son los de corte con la sección por un plano proyectante que la contenga.
- Las primeras proyecciones de la base de la pirámide y de su sección por un plano son figuras homológicas. El centro de homología es la proyección primera del vértice de la pirámide; el eje de homología es la traza horizontal del plano; y la recta límite la traza del plano paralelo al de la sección que pasa por el vértice.

Actividades

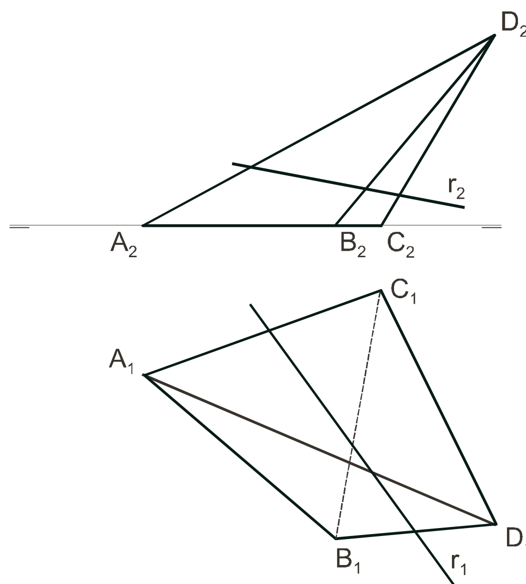
1. Dibujar la sección principal de un octaedro conocida su arista.



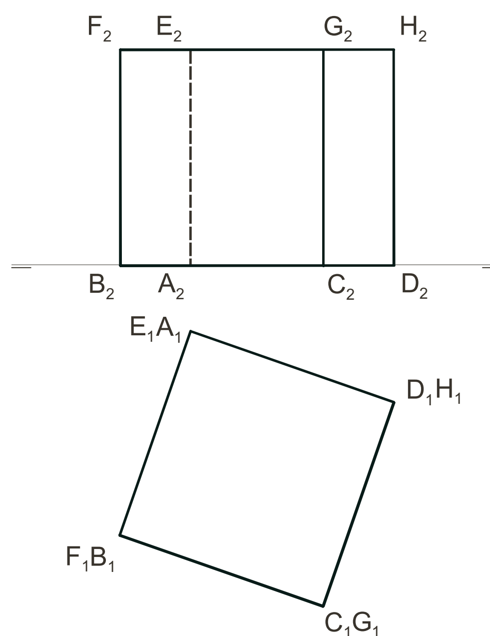
2. Hallar la sección de la pirámide por el plano α.



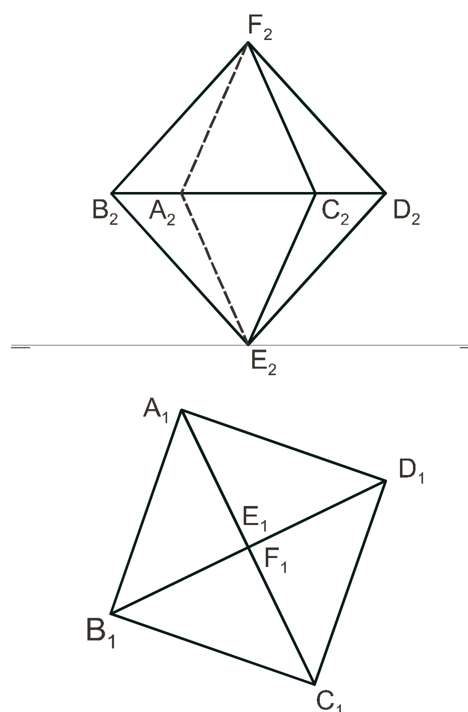
3. Hallar la intersección de la pirámide con la recta *r*.



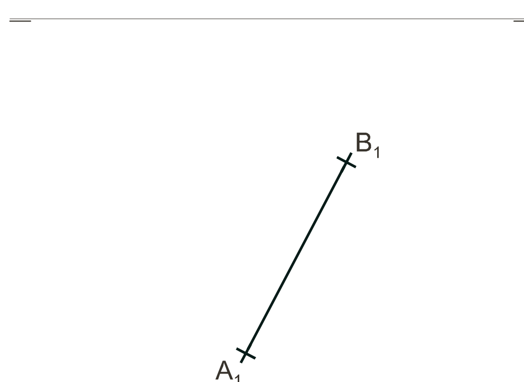
4. Construir la esfera circunscrita al cubo representado.



5. Hallar las proyecciones del octaedro conjugado del cubo representado.



6. Representar el cubo en diédrico, apoyado por una arista *AB* en el plano horizontal, conocida la primera proyección de ésta.



7 Sistema diédrico: prisma, cono y cilindro

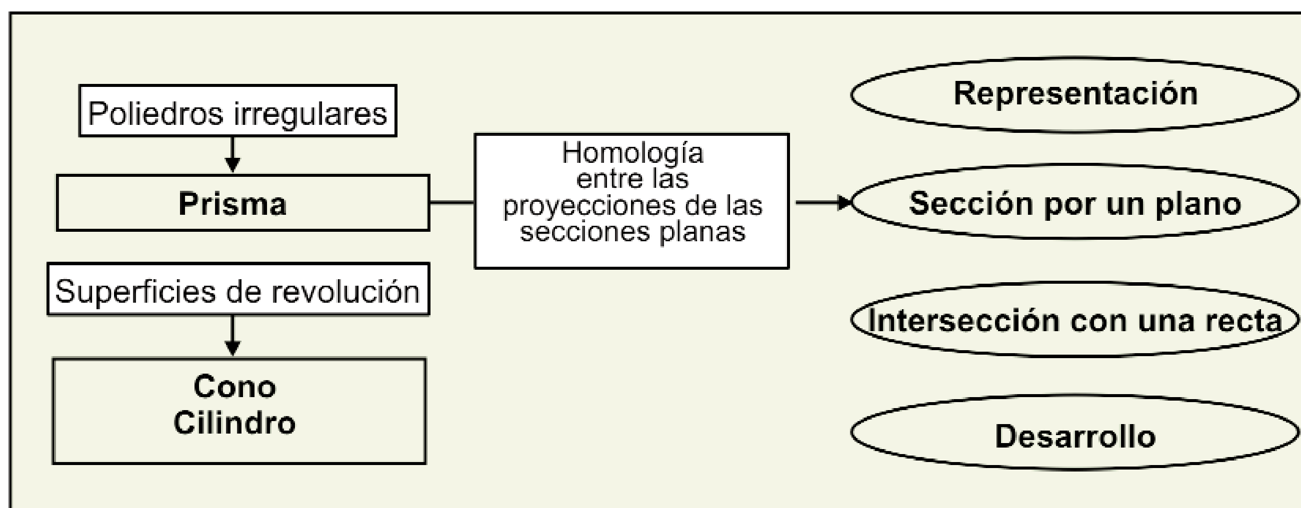
- *Capitel basado en el prisma y el cilindro (Modificación de la fotografía de la Mezquita de las Tornerías, Toledo, de Luana Fischer Ferreira, del Banco de imágenes del ISFTIC).*

En esta Unidad termina el estudio de los poliedros con la representación, desarrollo, sección por planos e intersección con rectas del prisma. La sección por planos se realiza mediante el empleo de la afinidad y el desarrollo mediante cambios de plano.

La representación del cono y cilindro de revolución se realiza obteniendo primero la proyección horizontal, trazando líneas de referencia y llevando las cotas de los elementos que definen las superficies, como: vértices, extremos de diámetros, planos de las bases ... Se atiende especialmente a la representación del contorno aparente, que incluye generatrices no visibles en una superficie curva, salvo cuando forman parte de sus límites visuales.

Con el estudio de esta Unidad nos proponemos alcanzar los siguientes **objetivos**:

1. Representar en diédrico el prisma, y el cono y cilindro de revolución.
2. Realizar secciones por planos e intersecciones por rectas del prisma, y del cono y cilindro de revolución.
3. Obtener el desarrollo del prisma, y del cono y cilindro de revolución.



ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. Prisma

1.1. Prisma: definición y clasificación

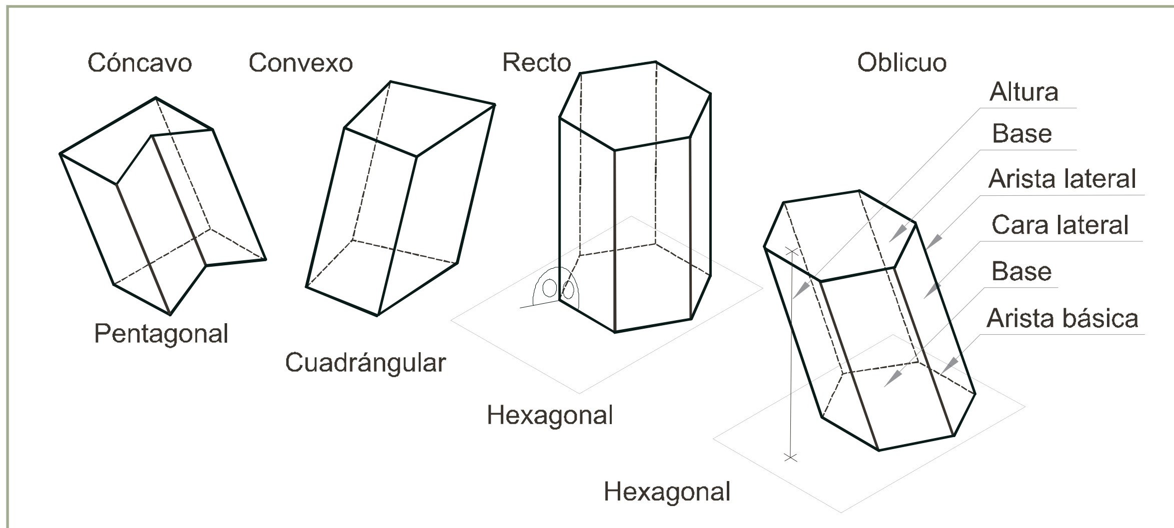


Ilustración 1  Animación 

Prisma es el poliedro que tiene dos caras iguales y paralelas llamadas bases y las demás son romboides que comparten con cada una de ellas uno de sus lados. El prisma se llamará triangular, cuadrangular, pentagonal,... según que las bases sean triángulos, cuadriláteros, pentágonos,... Según sea la base, convexa o cóncava, así será el prisma [Ilustración 1]. Las aristas de la base se llaman básicas.

Las caras situadas entre las bases se llaman laterales y el conjunto de todas ellas forman la superficie lateral del prisma. Sus aristas compartidas se llaman laterales y son paralelas. Cuando éstas son perpendiculares a las bases diremos que se trata de un **prisma recto**, llamándosele oblicuo en el caso contrario.

La distancia entre los planos que contienen a las bases es la altura del prisma.

1.2. Prisma oblicuo apoyado por una base en el plano horizontal

Sea *h* la altura de un prisma pentagonal oblicuo, del que se conocen las primeras proyecciones de la base apoyada en el plano horizontal y de una arista [Ilustración 2].

Las rectas paralelas a A_1E_1 por F_1, y a A_1F_1 por E_1 se cortan en J_1, formando las proyecciones primeras de una arista lateral y otra básica. Repitiendo este procedimiento se trazan el resto de las aristas hasta completar la primera proyección del prisma.

Se trazan líneas de referencia desde A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 hasta *l. t.* y desde F_1,G_1, H_1, I_1, J_1 hasta la cota *h*, obteniendo A_2, B_2, C_2, D_2, E_2 y F_2, G_2, H_2, I_2, J_2 respectivamente, que unidos entre sí dan las segundas proyecciones de las aristas del prisma.

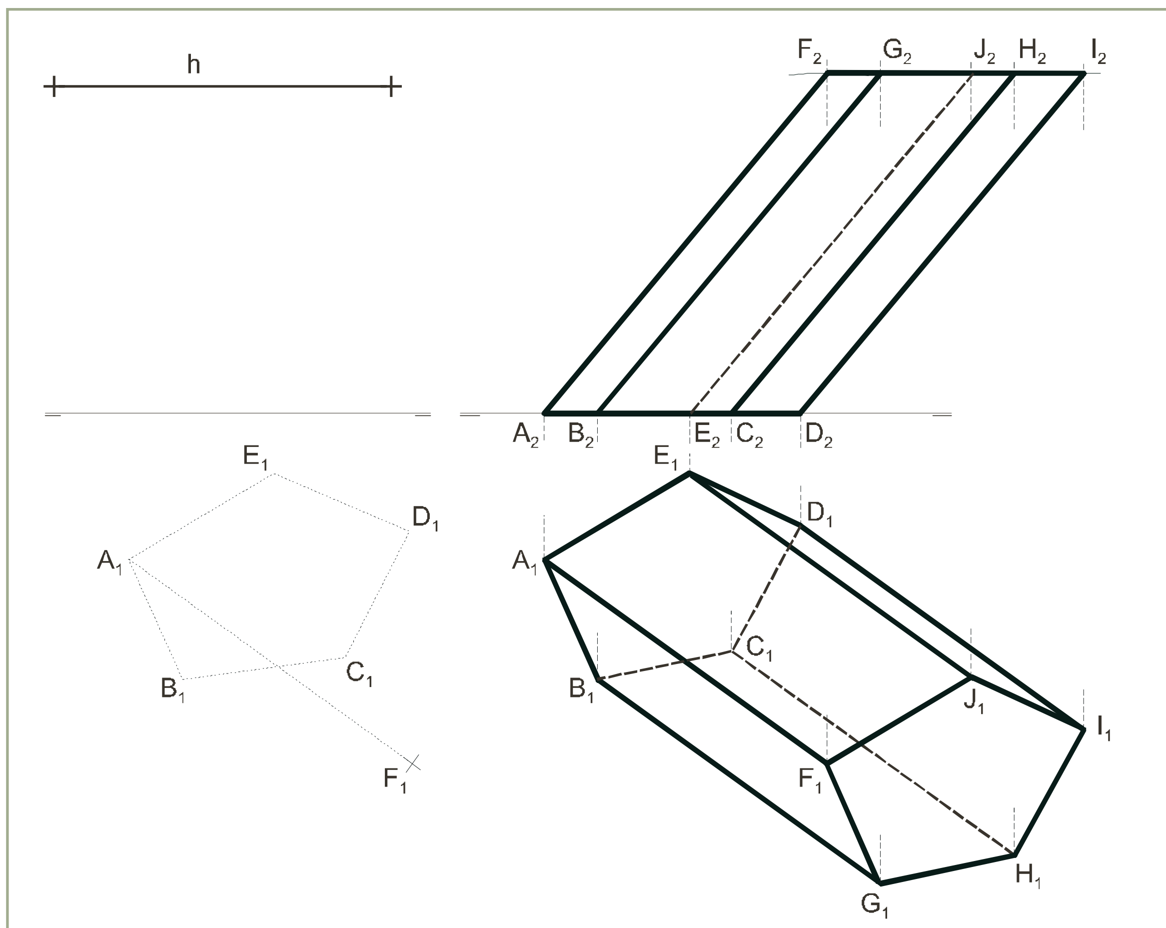


Ilustración 2

Para diferenciar qué aristas son ocultas en la segunda proyección, se observa en la primera que las caras *AFGB*, *BCHG*, *CDIH* están situadas frente al espectador mientras que las caras *AEJF* y *EDIJ* son ocultadas por ellas. La frontera entre ambas zonas es el contorno aparente para la proyección vertical *ADIF*, que se proyecta como $A_2D_2I_2F_2$. Así, la arista *EJ* es oculta. De manera análoga se diferencian las partes vistas y ocultas de la proyección horizontal.

1.3. Afinidad entre las proyecciones de las secciones planas del prisma

En la Ilustración 3 aparece un prisma, cuya base está contenida en el plano horizontal, al que se le ha efectuado una sección por el plano α. Se puede interpretar este hecho diciendo que una radiación, de vértice el punto impropio de las aristas, es seccionada por los planos α y horizontal produciendo dos figuras homológicas.

Al proyectar el conjunto en el plano horizontal, las primeras proyecciones de la base del prisma y de su sección por el plano α también serán figuras homológicas y, más propiamente, afines, al ser el centro de homología un punto impropio. La dirección de afinidad es la de las primeras proyecciones de las aristas, y el eje de afinidad es la traza α_1.

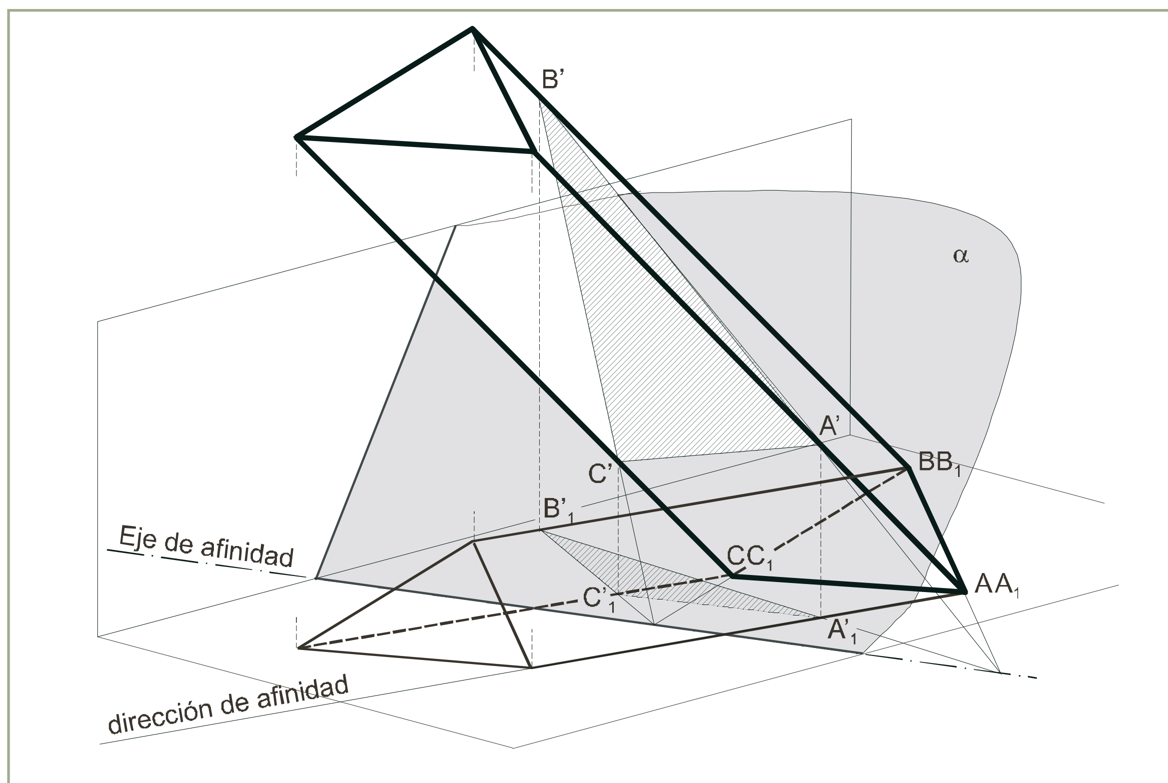


Ilustración 3 Animación

Así, podemos ver que la recta es homóloga de la recta $A'_1B'_1$ y los puntos A'_1 y B'_1 son homólogos de los puntos A_1 y B_1, respectivamente.

1.4. Aplicación de la homología a la obtención de secciones planas del prisma

Sean α_1, α_2 las trazas del plano, estando el prisma definido por sus proyecciones [Ilustración 4].

Se halla la sección de la arista *AF* (o de cualquier otra) con el plano α. Para ello se traza el plano de canto β, de modo que su traza vertical β_2 coincida con A_2F_2. Trazada la recta *i*, de intersección de los planos α y β, se obtiene A'_1 en el punto de corte de las proyecciones primeras i_1 y A_1F_1. La línea de referencia trazada desde A'_1 hasta A_2F_2 dará A'_2.

Se define una afinidad entre la base del prisma A_1, B_1, C_1, ... y la primera proyección de la sección por el plano α en la que A_1 y A'_1 son afines, α_1 es el eje de afinidad y $A_1A'_1$ la dirección de afinidad. Se obtiene el homólogo B'_1 de B_1 en el punto de corte de la recta doble B_1G_1 con la transformada MA'_1 de A_1B_1. Análogamente se obtienen C'_1, D'_1, ...

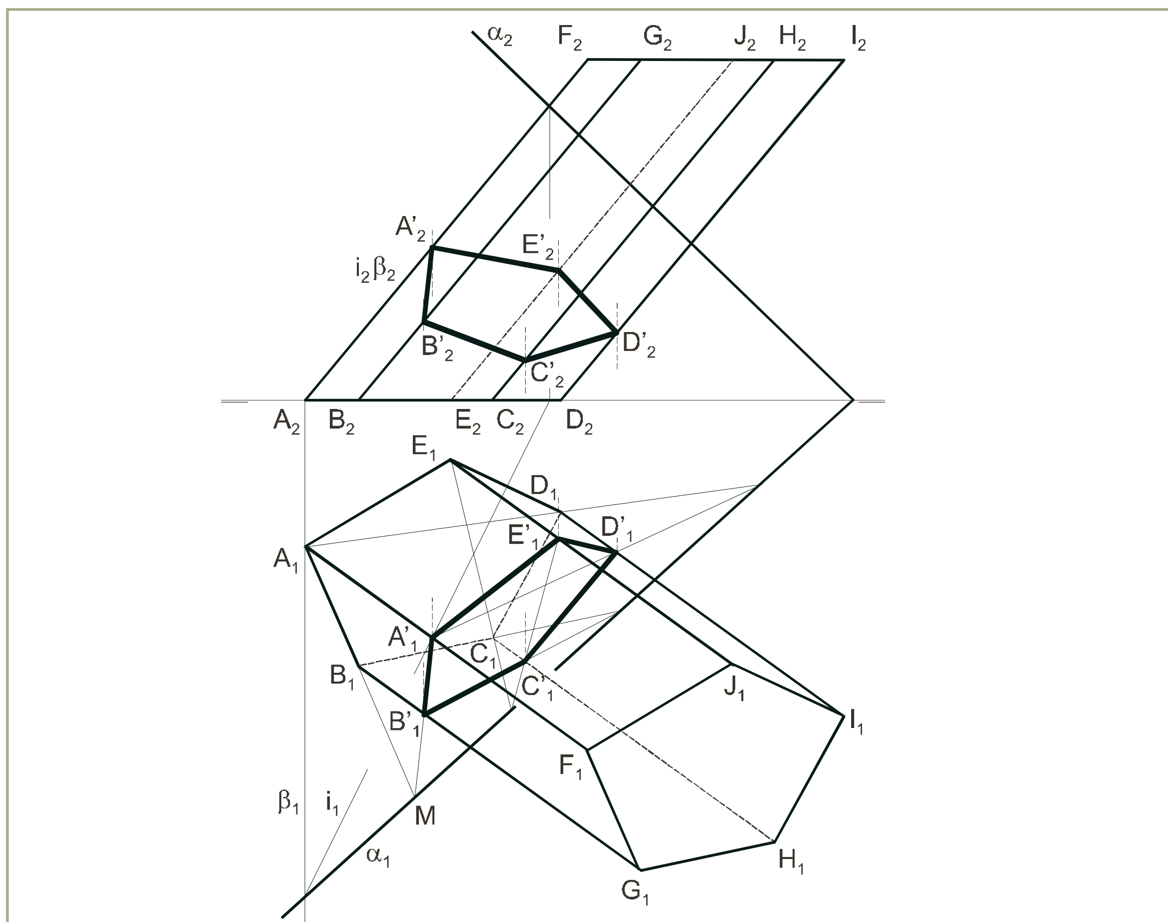


Ilustración 4

La segunda proyección de la sección se obtiene trazando líneas de referencia desde A'_1, B'_1, C'_1, ... hasta las segundas proyecciones de las aristas A_2F_2, B_2G_2, C_2H_2, ..., obteniéndose A'_2, B'_2, C'_2, ...

1.5. Desarrollo del prisma. Sección recta

Sección recta de un prisma es la que produce un plano perpendicular a sus aristas laterales. Sus lados son iguales a las distancias entre ellas.

Se define el prisma oblicuo por sus proyecciones [Ilustración 5].

Las bases del prisma coinciden con sus primeras proyecciones. Para dibujar las caras laterales se necesita conocer la distancia entre las aristas laterales (lados de la sección recta) y su longitud. Un cambio de plano vertical, en el que la nueva *l. t.* sea paralela a la primera proyección de las aristas laterales, facilita la obtención de ambas.

Dibujada la *l. t.* del nuevo sistema {*V'H*} paralela a F_1B_1, se obtienen las segundas proyecciones de los vértices del prisma trazando líneas de referencia desde sus proyecciones primeras y llevando la misma cota que tenían en el primer sistema. Al trazar las aristas se define primero el contorno aparente $A'_2E'_2G'_2C'_2$.

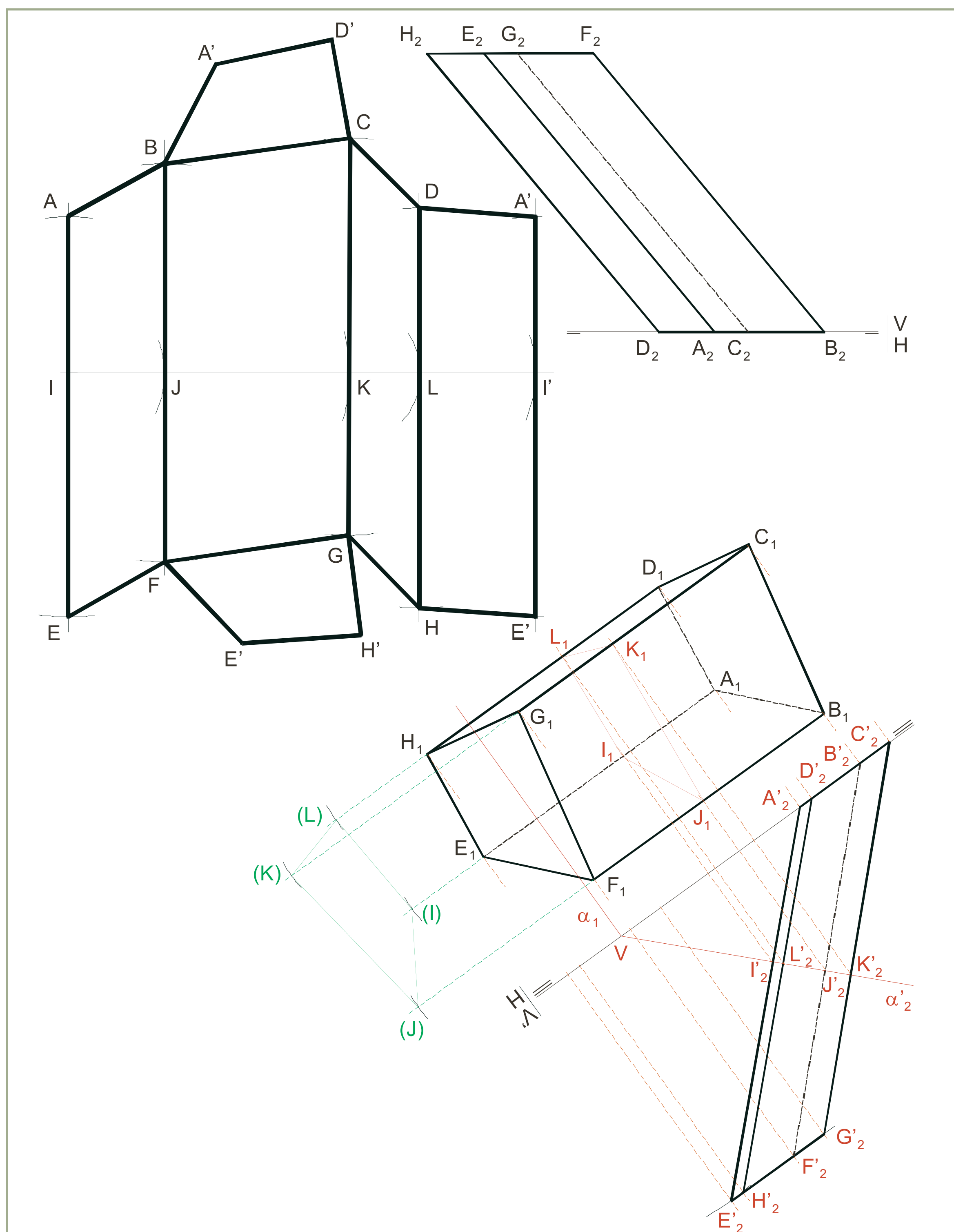


Ilustración 5

Para obtener la **sección recta** se elige un plano de canto α, cuya traza vertical α'_2 corte a las segundas proyecciones de todas las aristas laterales. Su proyección vertical coincide con la traza α'_2, y la horizontal se obtiene mediante líneas de referencia. Por ejemplo, el punto I'_2 es el punto de corte de la traza α'_2 con la proyección $A'_2E'_2$ de la arista *AE* y su línea de referencia corta a A_1E_1 en I_1.

Se obtiene la verdadera magnitud de la sección recta abatiéndola en el plano horizontal, tomando α_1 como charnela. Los vértices abatidos *(I)*, *(J)*, *(K)*, *(L)* están en el punto de corte de sus direcciones de abatimiento con arcos de centro *V* y radios VI'_2, VJ'_2, VK'_2, VL'_2.

Se dibuja el desarrollo llevando sobre una semirrecta los lados *(I)(J)*, *(J)(K)*, ..., para obtener los puntos *I*, *J*, *K*, ... Éstos dividen cada arista en dos segmentos *IA* e *IE*, *JB* y *JF* ... que llevados perpendicularmente a dicha semirrecta, forman la aristas laterales del desarrollo de las caras laterales del prisma, que se completa trazando las poligonales *ABCDA'* y *EFGHE'*. Transportando las bases *ABCD* y *EFGH* con cualquier lado común con dichas poligonales se completa el desarrollo.

1.6. Intersección del prisma con una recta

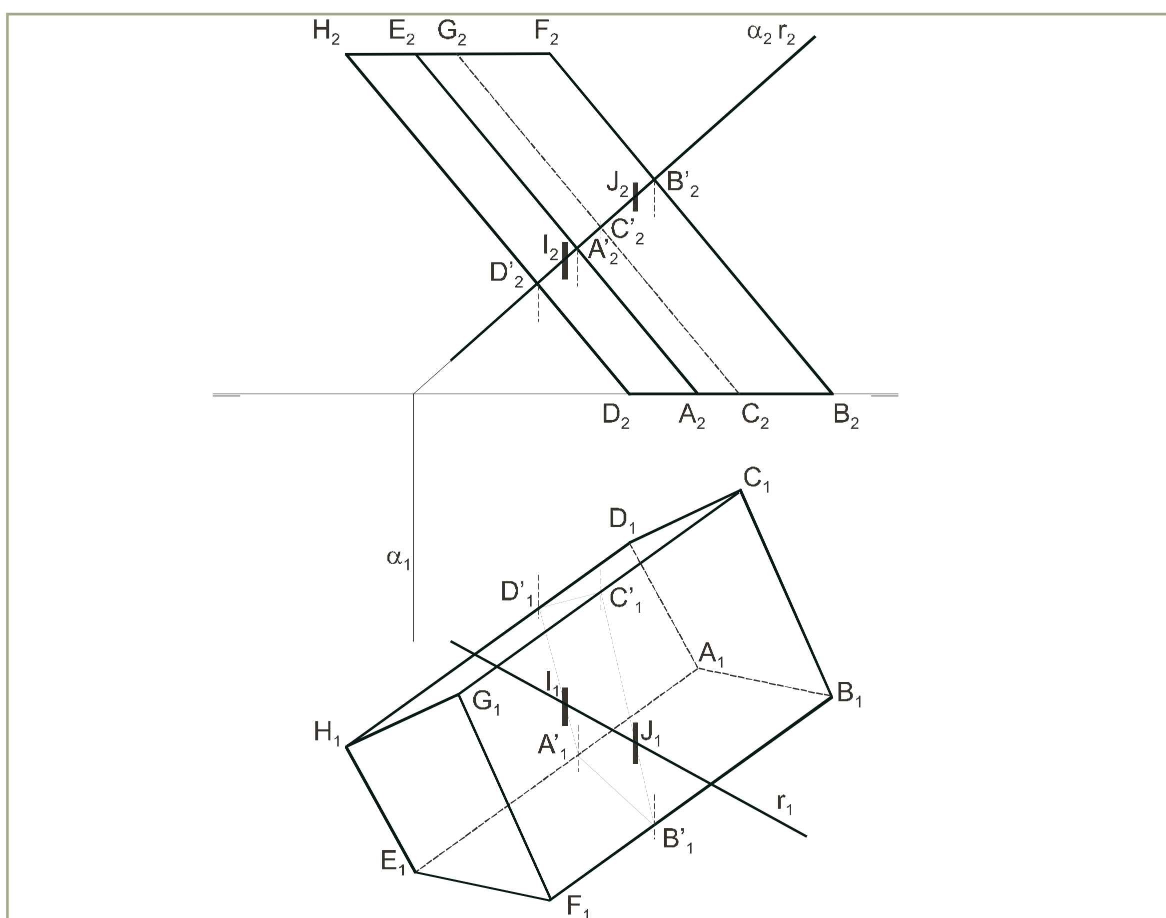


Ilustración 6

Sean r_1, r_2 las proyecciones de la recta, estando el prisma definido por las suyas [Ilustración 6].

Un plano de canto α que contenga a la recta *r* produce una sección en el prisma, que es un polígono *A'B'C'D'*, cuya proyección vertical $A'_2B'_2C'_2D'_2$ coincide con la traza α_2. Su proyección horizontal se obtiene trazando líneas de referencia desde A'_2, B'_2, C'_2, ... hasta las aristas correspondientes. Los puntos de corte con sus lados, de la proyección r_1 de la recta, son las proyecciones horizontales I_1, J_1 de los puntos de intersección de la recta con la superficie lateral del prisma. Sus proyecciones verticales I_2, J_2 se obtienen mediante líneas de referencia.

2. Cono

2.1. Cono: definición y clasificación

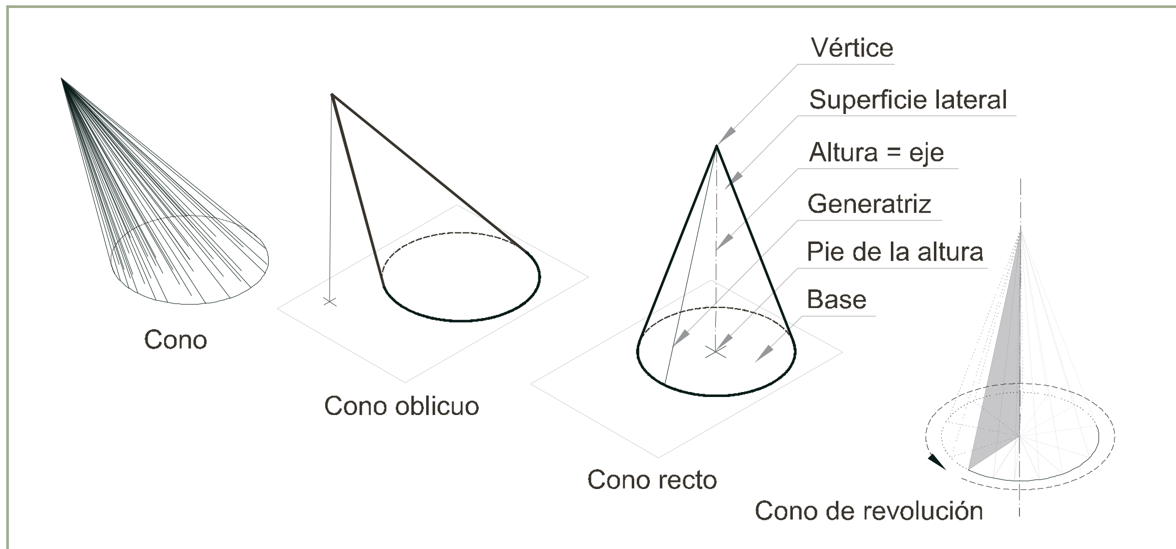


Ilustración 7  Animación 

Cono es el sólido formado por los segmentos que tienen un extremo común, llamado vértice, y el otro es un punto de un círculo llamado base. Los segmentos que tienen por extremos el vértice y un punto de la circunferencia base forman la superficie cónica o lateral, y reciben el nombre de generatrices del cono [Ilustración 7].

Se llama altura del cono a la distancia del vértice al plano de la base. Si el pie de la altura coincide con el centro de la circunferencia base la altura se llama eje, y el cono recto; será oblicuo en caso contrario.

El cono recto se llama también de revolución, ya que puede obtenerse mediante el giro de un triángulo rectángulo, que tiene por catetos la altura y el radio de la base y por hipotenusa una generatriz, alrededor de su altura.

2.2. Cono recto con una generatriz contenida en el plano horizontal

Sea *r* el radio de la base y *h* la altura de un **cono de revolución** [Ilustración 8].

En primer lugar se representa el cono en un sistema {*VH*}, con la base apoyada en el plano horizontal.

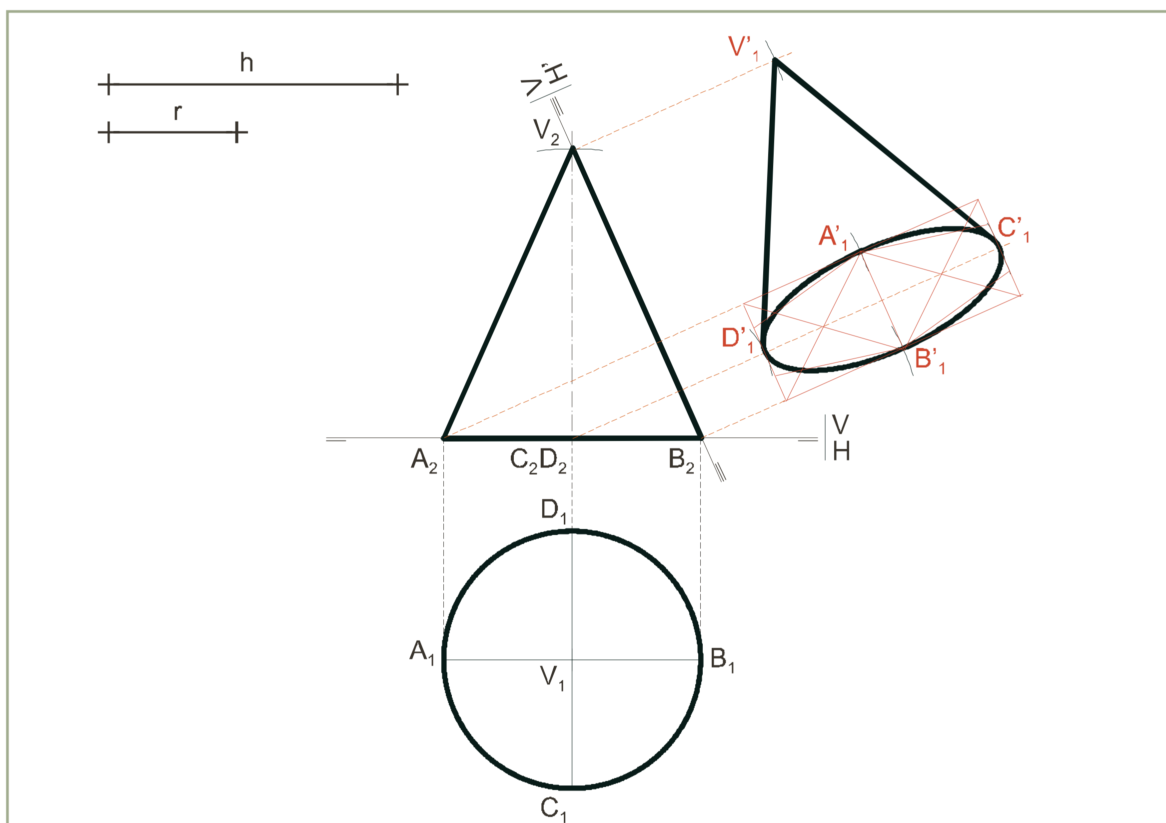


Ilustración 8

El contorno aparente de la primera proyección es la circunferencia de radio r, proyección de la arista que la base forma con la superficie lateral, cuyas generatrices se proyectan, sin dibujarlas, coincidiendo con los radios de aquella, que concurren en la primera proyección V_1 del vértice V.

El contorno aparente de la segunda proyección está formado por las proyecciones verticales $\overline{V_2A_2}$ y $\overline{V_2B_2}$ de las generatrices *VA* y *VB* paralelas al plano vertical, obtenidas después de trazar líneas de referencia desde A_1, B_1 hasta *l. t.* y desde V_1 hasta la cota *h* y el segmento $\overline{A_2B_2}$, proyección segunda de la base.

A continuación se efectúa un cambio de plano horizontal, eligiendo la línea de tierra del nuevo sistema {*VH'*} coincidiendo con la proyección $\overline{V_2B_2}$ de la generatriz del cono. La nueva primera proyección de la base será una elipse, y los diámetros perpendiculares *AB* y *CD* se proyectarán como principales de ella.

Se obtienen A'_1, B'_1, C'_1, D'_1, V'_1 transportando sus alejamientos sobre líneas de referencia perpendiculares a la nueva *l. t.*, a partir de ella; se dibuja la elipse mediante haces proyectivos; y se trazan las tangentes desde V'_1 a la elipse, que son proyección de las dos generatrices que forman parte del nuevo contorno aparente horizontal.

2.3. Sección del cono recto por un plano proyectante

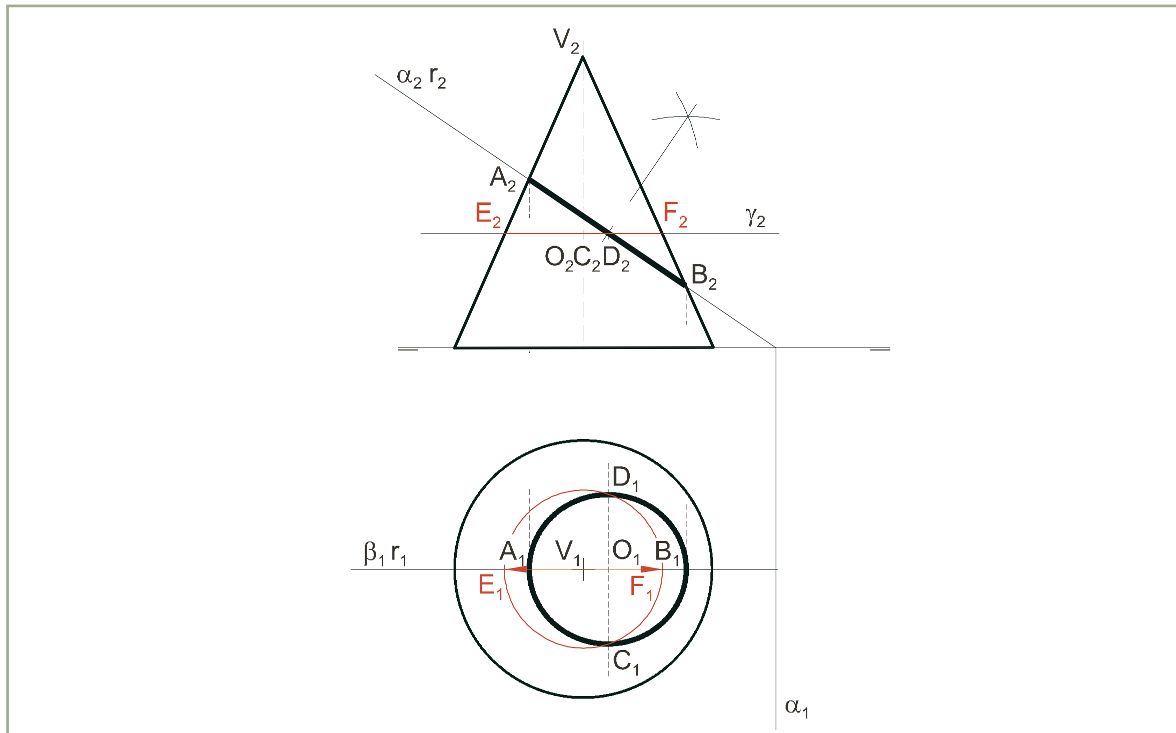


Ilustración 9

Sean α_1, α_2 las trazas del plano, estando el **cono recto** definido por sus proyecciones [Ilustración 9].

La sección de la superficie lateral del cono por un plano que corte a todas sus generatrices es una elipse, y como el plano frontal β es de simetría del cono y del plano α simultáneamente, su línea de máxima pendiente *r* contendrá el diámetro principal mayor *AB*. La proyección vertical de dicha elipse y de su diámetro principal *AB* coincide con r_2, estando sus extremos en las generatrices del contorno aparente vertical. La primera proyección $\overline{A_1B_1}$ se obtiene mediante líneas de referencia.

El diámetro principal menor *CD* es una recta de punta cuya segunda proyección $\overline{C_2D_2}$ coincide con el punto medio de $\overline{A_2B_2}$, que es la segunda proyección O_2 del centro *O* de la elipse.

El plano horizontal γ contiene el diámetro *CD* y corta al cono según la circunferencia de diámetro *EF* y centro situado en el eje del cono, cuya primera proyección determina los extremos C_1, D_1 de aquel sobre la línea de referencia trazada desde O_2. La elipse se traza mediante cualquier método a partir de los diámetros principales $\overline{A_1B_1}$ y $\overline{C_1D_1}$ (no aparece en la construcción).

2.4. Sección del cono recto por un plano oblicuo

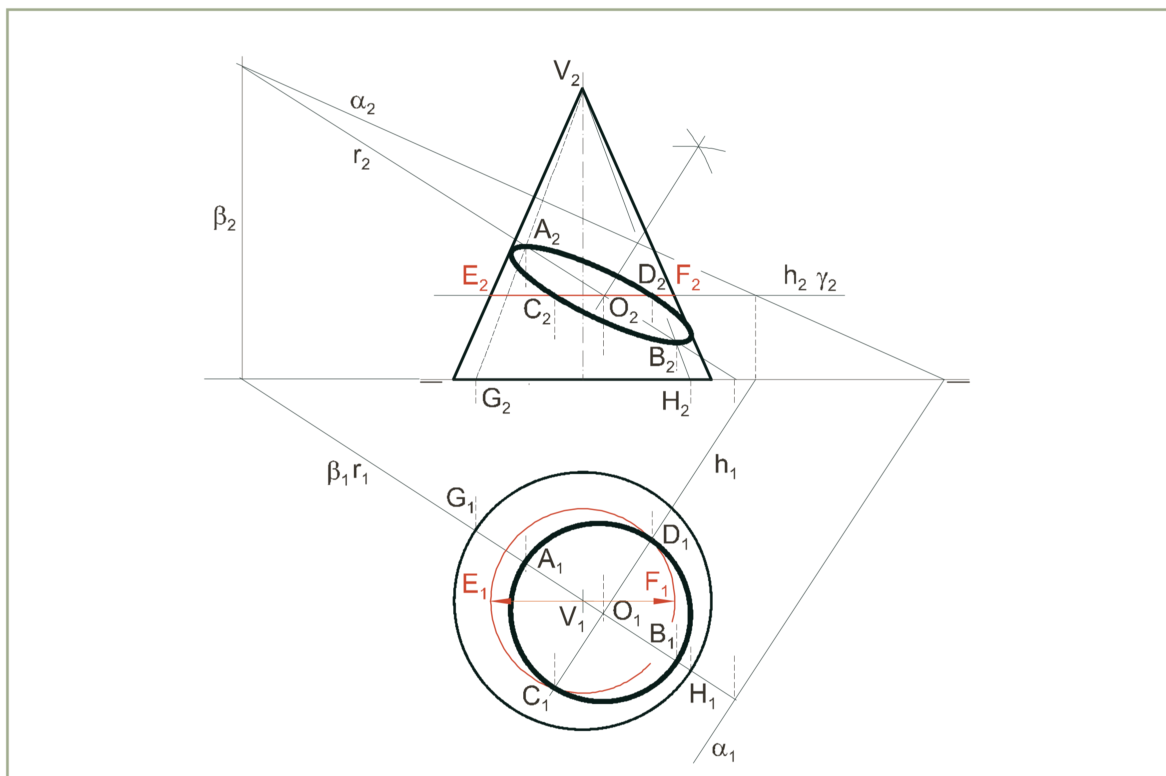


Ilustración 10

Sean α_1, α_2 las trazas del plano, estando el cono definido por sus proyecciones [Ilustración 10].

La sección de la superficie lateral del cono es una elipse, cuyo diámetro principal mayor *AB* está contenido en la línea de máxima pendiente *r*, del plano α, que pasa por el eje del cono. El plano vertical β, que la contiene, corta al cono según las generatrices *GV* y *HV*, estando G_1, H_1 en la intersección de β_1 con la primera proyección de la base del cono y G_2, H_2 en *l. t.*. $\overline{G_2V_2}$ y $\overline{H_2V_2}$ cortan a r_2 en los extremos A_2, B_2 del diámetro *AB*. Líneas de referencia trazadas hasta r_1 dan A_1, B_1.

El diámetro principal menor *CD* es una horizontal *h* del plano α, cuya segunda proyección h_2 pasa por el punto medio de $\overline{A_2B_2}$, que es segunda proyección del centro O_2 de la elipse. Una línea de referencia permite obtener O_1 sobre r_1.

El plano horizontal γ contiene el diámetro *CD* y corta a la superficie lateral del cono según la circunferencia de diámetro *EF* y centro situado en el eje del cono, cuya primera proyección determina los extremos C_1, D_1 de aquel sobre la primera proyección h_1, trazada por O_1 paralela a α_1, de la horizontal de plano *h*.

La primera proyección de la elipse se traza mediante cualquier método a partir de los diámetros principales $\overline{A_1B_1}$ y $\overline{C_1D_1}$ (no aparece en la construcción). Para dibujar la segunda proyección se tienen los diámetros conjugados $\overline{A_2B_2}$ y $\overline{C_2D_2}$.

2.5. Desarrollo del cono recto

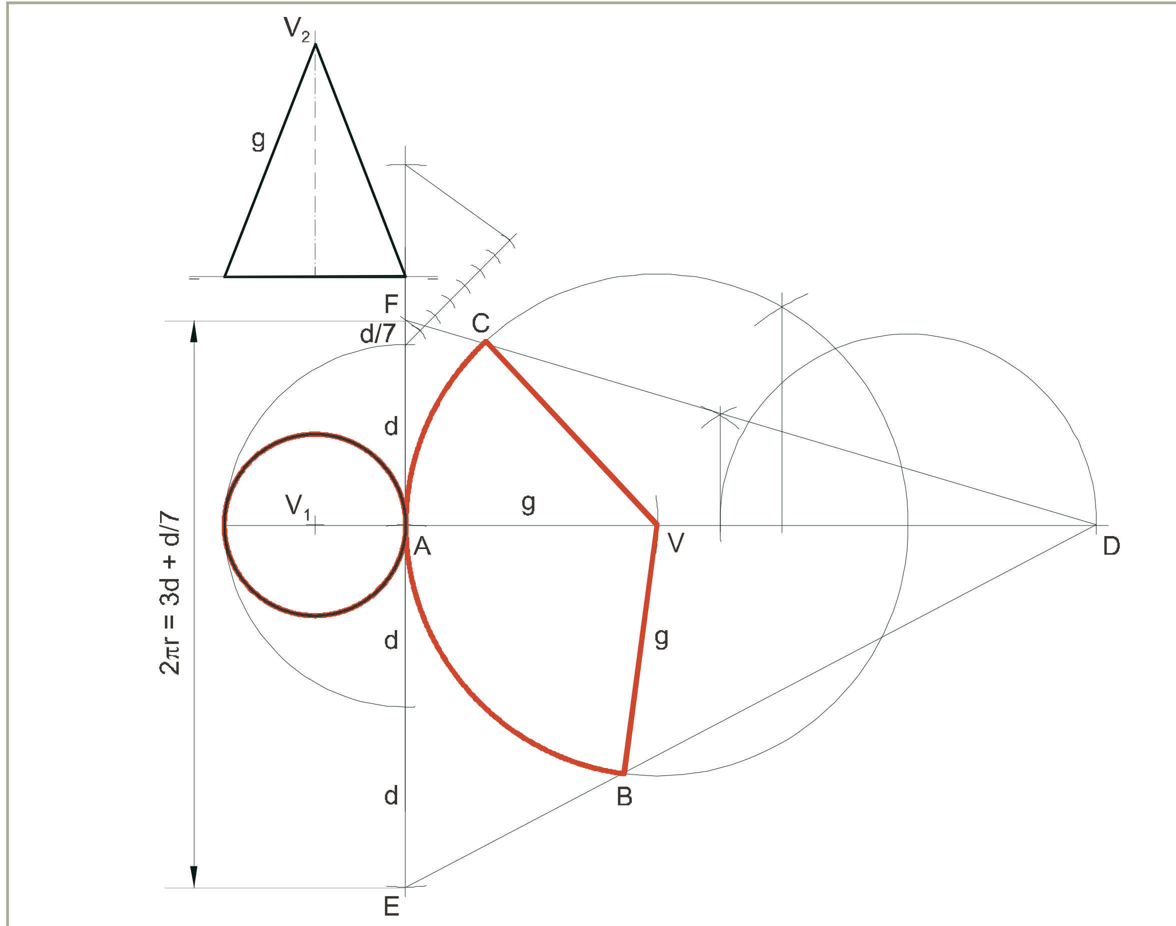


Ilustración 11

Se define el cono por sus proyecciones [Ilustración 11].

El desarrollo de la base coincide con la primera proyección del cono, que está en verdadera magnitud.

El desarrollo de la superficie lateral es un sector circular de radio la generatriz del cono *g* (en verdadera magnitud en el contorno aparente de la segunda proyección), y arco de longitud igual al de la circunferencia de la base.

Tomando la primera proyección del cono como desarrollo de la base, se rectifica ésta llevando la longitud de su diámetro *d* tres veces sobre su tangente en *A* y una cuarta vez para obtener $d/7$. A continuación se traza la circunferencia tangente en *A* de radio *g*, cuyo centro será el vértice *V*.

Se efectúa la construcción inversa a la rectificación de un arco de circunferencia menor de 90º, para obtener los arcos *AB* y *AC* de longitudes iguales a $2d$ y $d + d/7$. Para ello se obtiene el punto *D* situado a $g + 3g/4$ de *V*, y se trazan desde él las secantes *DE* y *DF*, que determinan los extremos del arco *CB* del sector circular que es desarrollo de la superficie lateral.

2.6. Intersección del cono con una recta

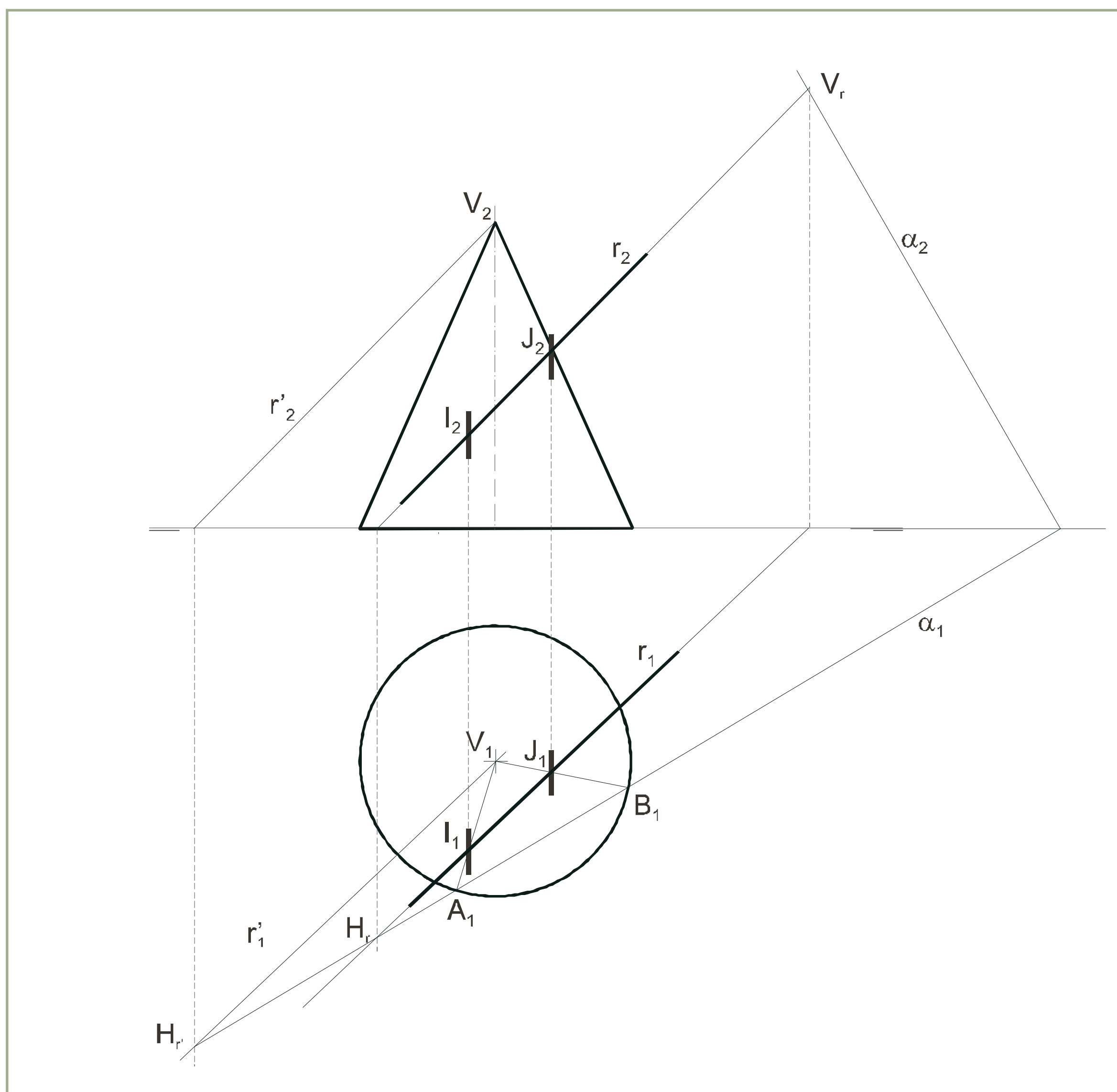


Ilustración 12

Sean r_1, r_2 las proyecciones de la recta, estando el cono definido por las suyas [Ilustración 12].

Un plano α que contenga la recta *r* y el vértice *V* corta a la superficie lateral del cono según dos generatrices. Dicho plano está definido por la recta *r* y su paralela *r'* trazada por *V*. Su traza horizontal α_1 pasa por H_r, $H_{r'}$ y corta a la circunferencia de la base en A_1, B_1. Las primeras proyecciones $\overline{A_1V_1}$ y $\overline{B_1V_1}$, de las generatrices intersección del plano α con la superficie lateral, cortan a r_1 en las proyecciones horizontales I_1, J_1 de los puntos de intersección de la recta con ellas. Las segundas proyecciones I_2 y J_2 se obtienen mediante líneas de referencia.

3. Cilindro

3.1. Cilindro: definición y clasificación

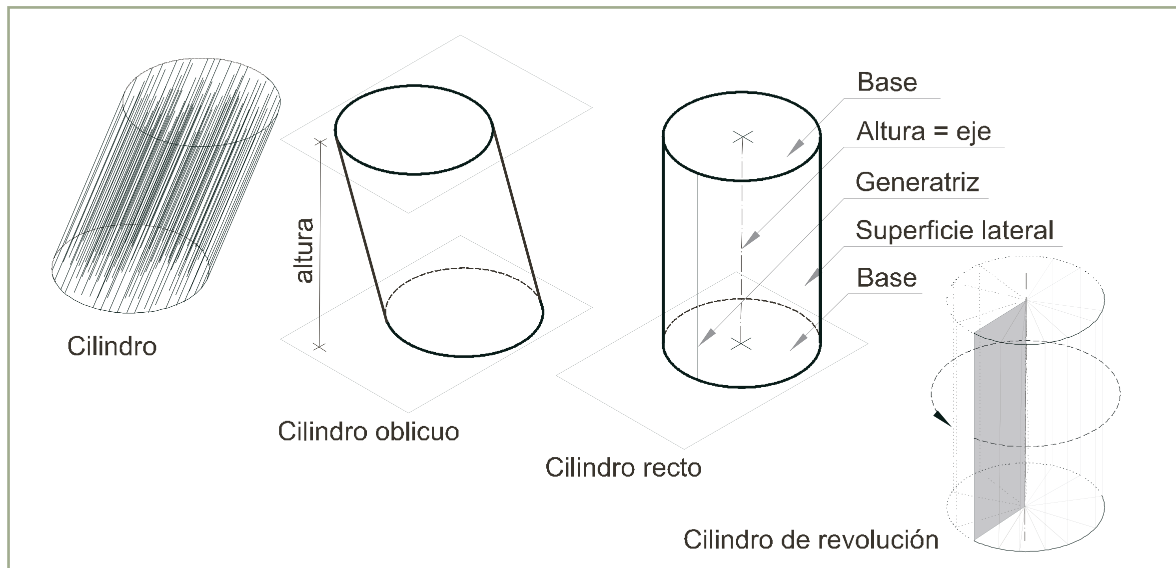


Ilustración 13  Animación 

Cilindro es el sólido formado por segmentos paralelos al eje que pasa por los centros de dos círculos llamados bases y que tienen sus extremos en ellas. Los segmentos que tienen por extremos puntos de las circunferencias base, forman la superficie cilíndrica o lateral y reciben el nombre de generatrices del cilindro [Ilustración 13].

Se llama altura del cilindro a la distancia entre los planos de las bases. Si el eje es perpendicular a las bases el cilindro se llamará recto, y oblicuo en caso contrario.

El cilindro recto se llama también de revolución, al ser posible generarlo mediante el giro alrededor de su eje de un rectángulo que tiene por lados una generatriz, el eje y dos radios de las bases.

3.2. Cilindro recto con una generatriz contenida en el plano horizontal

Sea *r* el radio de la base y *h* la altura de un **cilindro de revolución** que tiene una generatriz contenida en el plano horizontal [Ilustración 14].

La primera proyección de las generatrices está en verdadera magnitud por ser paralelas al plano horizontal y las bases se hallan situadas en planos verticales.

Así, el contorno aparente de la primera proyección es el rectángulo de lados 2*r* y *h*, que se construye partiendo de una semirrecta cualquiera de origen *A*, sobre la que se transporta dos veces el radio *r* para obtener el primer lado A_1B_1.

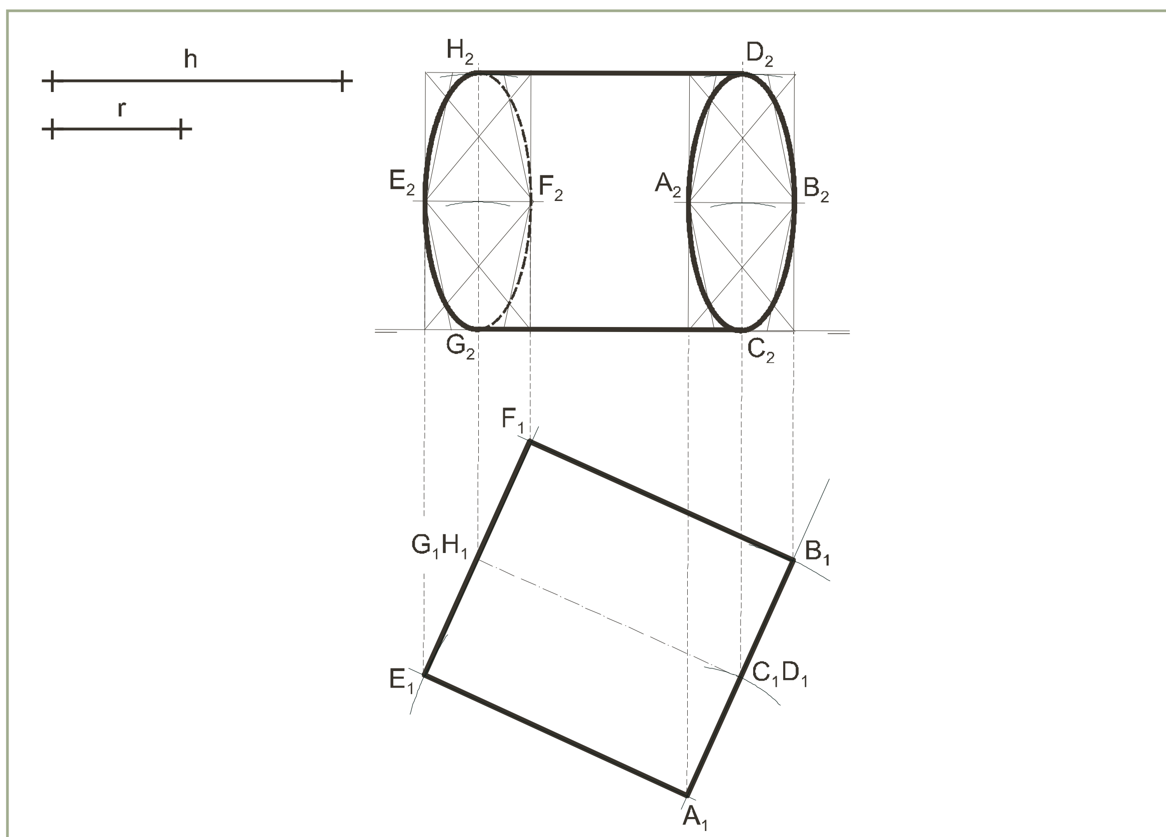


Ilustración 14

Cada una de las bases está definida por dos diámetros *AB*, *CD* y *EF*, *GH* paralelos o perpendiculares al plano horizontal, que se proyectan sobre él en verdadera magnitud ($\overline{A_1B_1}$ y $\overline{E_1F_1}$) o en un punto (C_1 y G_1) respectivamente.

La segunda proyección de las bases son las elipses cuyos diámetros principales A_2B_2, C_2D_2 y E_2F_2, G_2H_2 se obtienen como segundas proyecciones de los diámetros *AB*, *CD* y *EF*, *GH*, llevando cotas iguales a *0*, *r*, 2*r* sobre líneas de referencia trazadas desde A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1, H_1. Las elipses se construyen mediante haces proyectivos.

El contorno aparente de la segunda proyección está formado por las proyecciones verticales $\overline{C_2G_2}$ y $\overline{D_2H_2}$ de las generatrices *CG* y *DH* situadas a cotas *0* y 2*r*, y por media elipse de cada base. De las otras dos medias elipses será oculta la $H_2F_2G_2$, que queda tapada por la superficie lateral.

3.3. Sección del cilindro recto por un plano proyectante

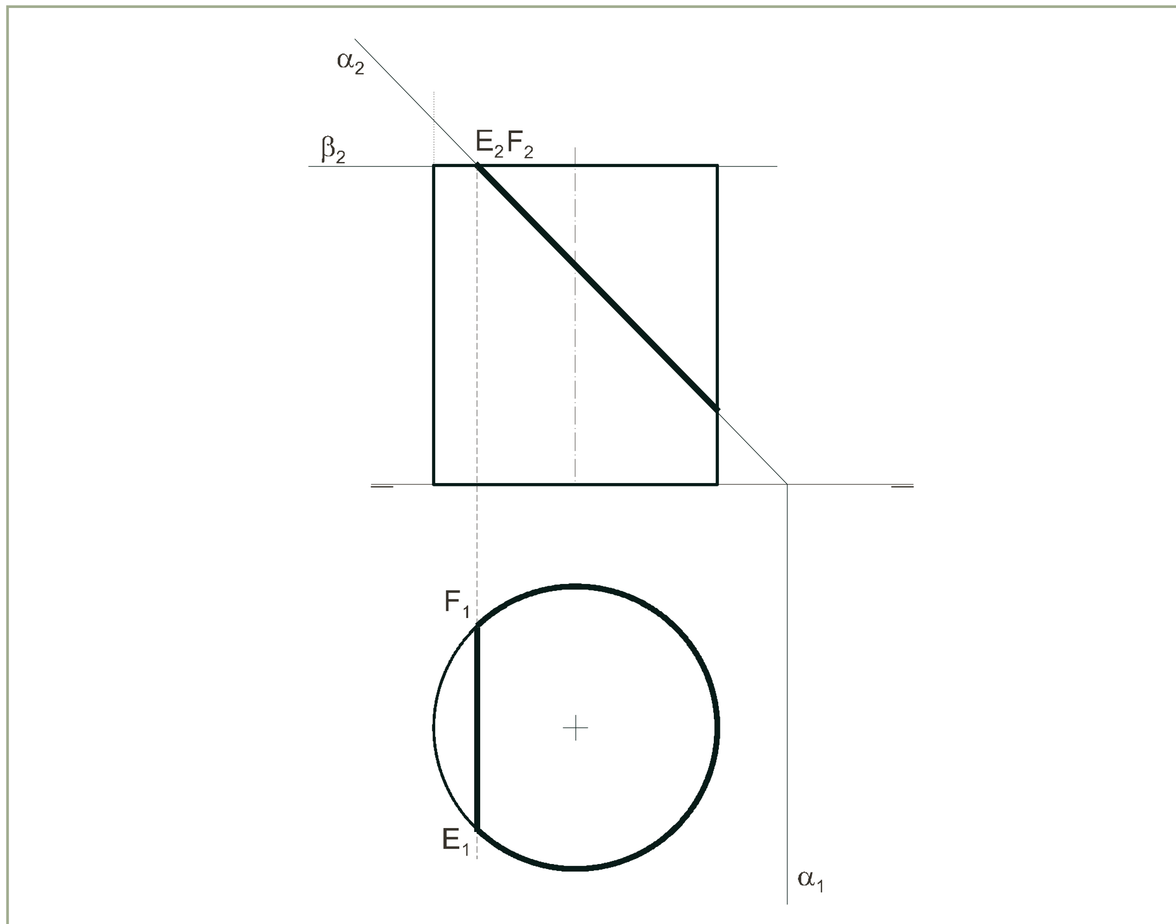


Ilustración 15

Sean α_1, α_2 las trazas del plano, estando el **cilindro recto** definido por sus proyecciones [Ilustración 15].

La sección de la superficie lateral del cilindro por un plano que corte a todas sus generatrices es una elipse, o un arco de ella en este caso. La sección de la base superior es una cuerda.

La primera proyección de la sección está delimitada por un arco de circunferencia coincidente con la proyección horizontal de la base y por la primera proyección E_1F_1 del segmento contenido en la base superior de la recta *EF*, intersección del plano β que la contiene con α, situada en posición de punta.

La segunda proyección de la sección es el segmento de la traza α_2 que coincide con la proyección vertical del cilindro.

3.4. Sección del cilindro recto por un plano oblicuo

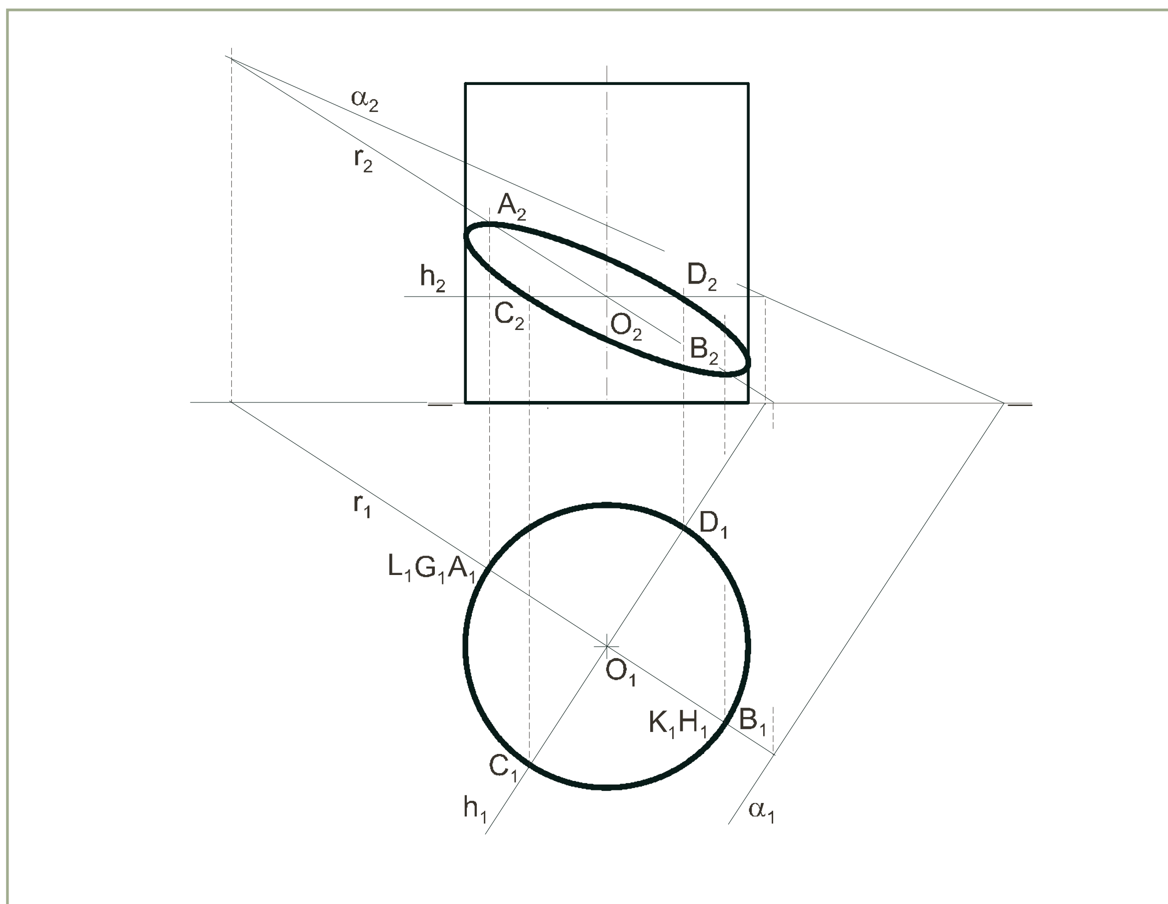


Ilustración 16

Sean α_1, α_2 las trazas del plano, estando el cilindro definido por sus proyecciones [Ilustración 16].

La sección del cilindro es una elipse, cuyos diámetros principales *AB* y *CD* están contenidos en las líneas de máxima pendiente *r*, y horizontal *h* del plano α, que pasan por el eje del cono.

La primera proyección de la sección es la circunferencia de la base, siendo los diámetros $\overline{A_1B_1}$ y $\overline{C_1D_1}$ perpendicular y paralelo a la traza α_1, proyección de los diámetros principales de la elipse.

Líneas de referencia trazadas desde A_1, B_1, C_1, D_1 hasta las segundas proyecciones r_2 y h_2 de *r* y *h* permiten obtener las proyecciones verticales $\overline{A_2B_2}$ y $\overline{C_2D_2}$ de los diámetros principales de la elipse sección, que son diámetros conjugados de su segunda proyección. Dicha elipse se construye por cualquier método a partir de sus diámetros conjugados.

3.5. Desarrollo del cilindro recto

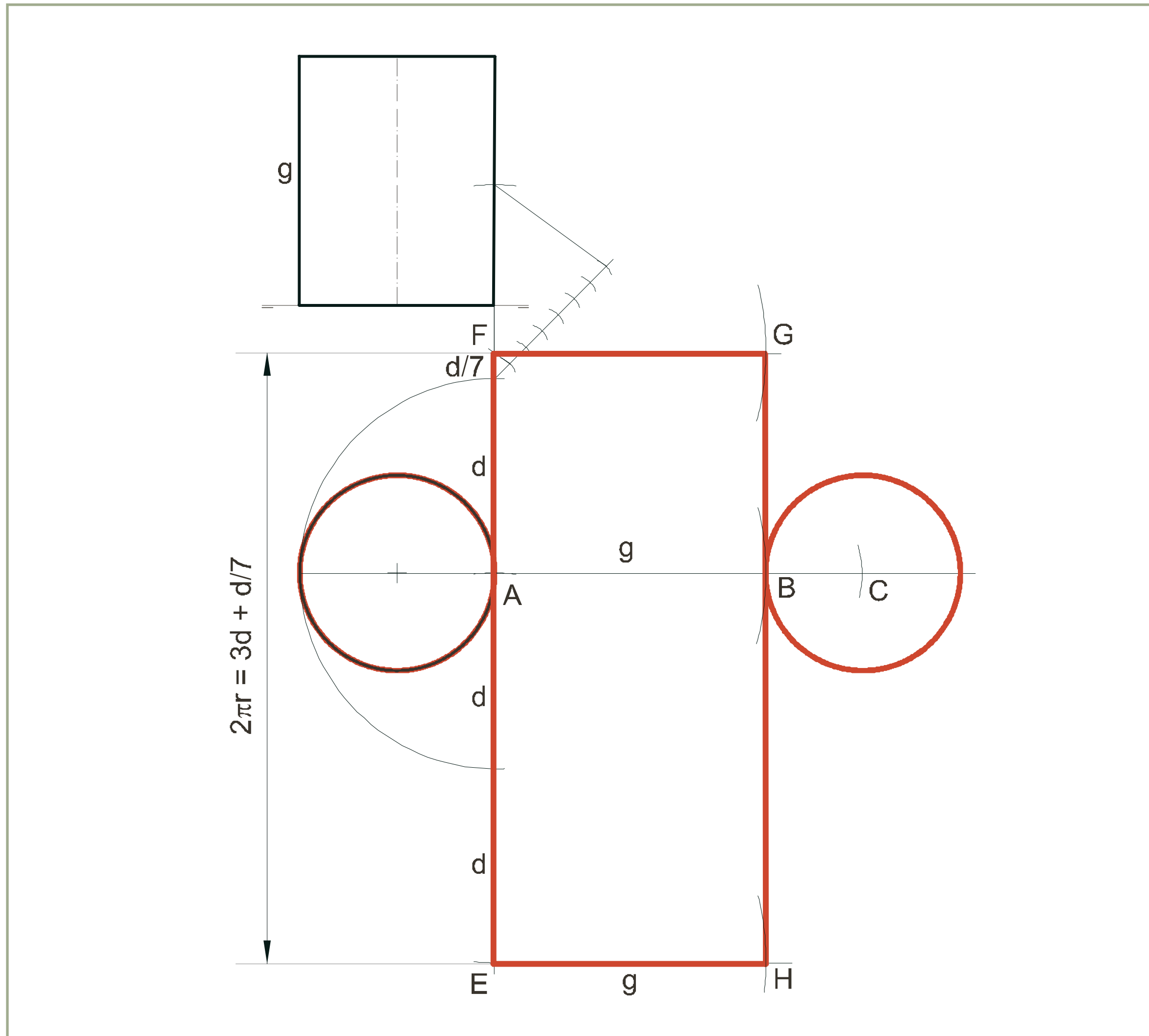


Ilustración 17

Se define el cilindro por sus proyecciones [Ilustración 17].

El desarrollo de cada una de las bases coincide con la primera proyección del cilindro, que está en verdadera magnitud.

El desarrollo de la superficie lateral es un rectángulo que tiene dos de sus lados iguales a la generatriz del cilindro *g*, y el otro tiene una longitud igual a la de la circunferencia de la base.

Tomando la proyección horizontal del cilindro como desarrollo de una base, se rectifica ésta llevando la longitud de su diámetro *d* tres veces sobre su tangente en *A* y una cuarta vez para obtener *d*/7. En sus extremos se trazan perpendiculares dos lados de longitud g, cuyos extremos se unen para completar el rectángulo. El desarrollo se completa con la otra base, situada tangente en B.

3.6. Intersección del cilindro con una recta

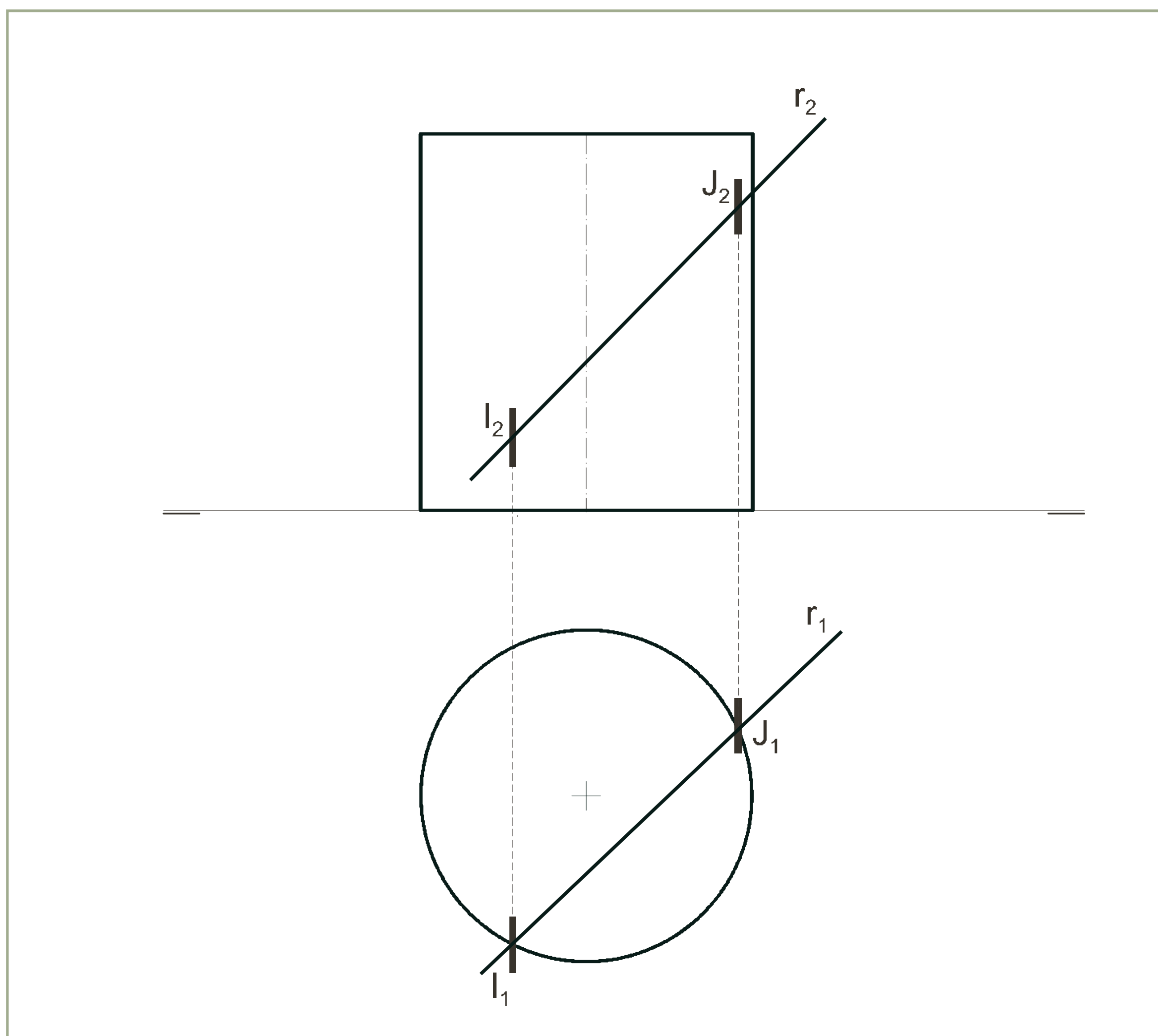


Ilustración 18

Sean r_1, r_2 las proyecciones de la recta, estando el cilindro definido por las suyas [Ilustración 18].

La superficie lateral del cilindro representado está situada en posición vertical, por lo que es proyectante en el plano horizontal. Así, las primeras proyecciones I_1, J_1 de los puntos de intersección con la superficie lateral son los de corte de r_1 con la circunferencia de la base.

Las segundas proyecciones I_2, J_2 se obtienen trazando líneas de referencia desde I_1, J_1 hasta r_2.



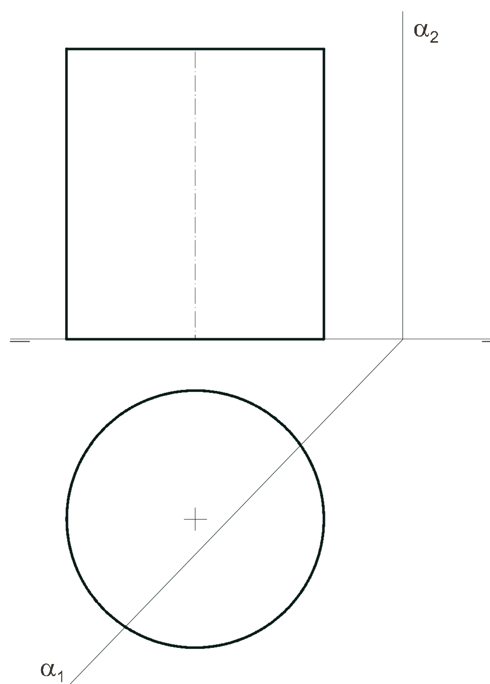
Recuerda

- ✓ La representación de poliedros o superficies se inicia habitualmente por su proyección horizontal, obteniéndose la vertical mediante líneas de referencia y cotas.
- ✓ La diferenciación de las aristas vistas y ocultas en una proyección se realiza viendo en la otra qué caras o superficies están más próximas al observador.

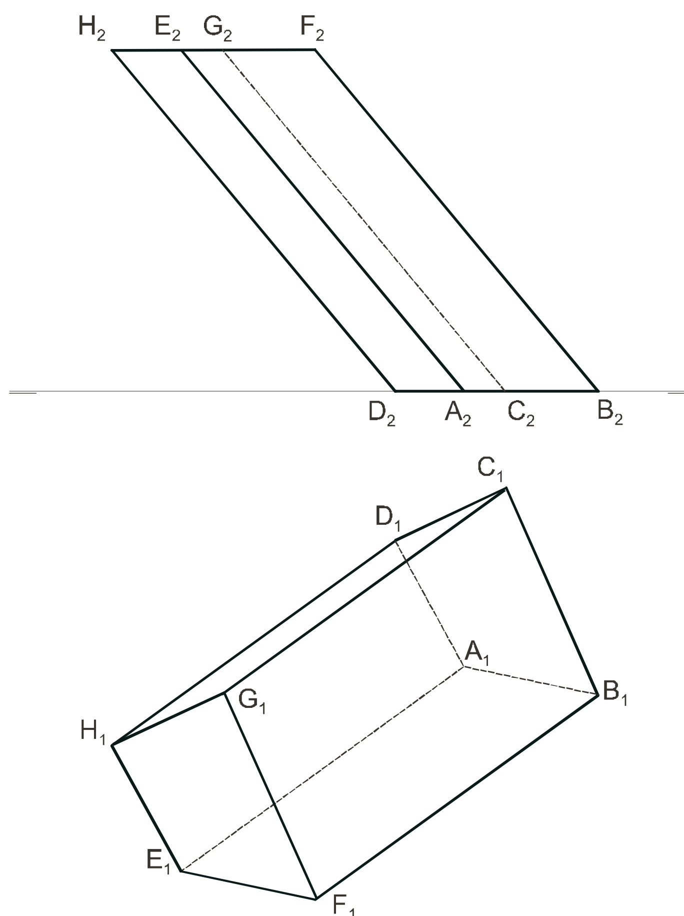
  En los poliedros los contornos aparentes se corresponden siempre con aristas reales.
- ✓ En los contornos aparentes del cono y del cilindro pueden aparecer rectas que son proyección de generatrices de las superficies laterales.
- ✓ Las primeras proyecciones de la base de un prisma, que tiene su base contenida en el plano horizontal, y de su sección por un plano, son figuras afines, siendo el eje la traza horizontal y la dirección de afinidad la primera proyección de las aristas laterales.
- ✓ El desarrollo del prisma oblicuo precisa de la obtención de la sección recta, que es la que produce un plano perpendicular a las aristas laterales.
- ✓ Para obtener la intersección de un cono con una recta se traza un plano que contenga a la recta y pase por el vértice.

Actividades

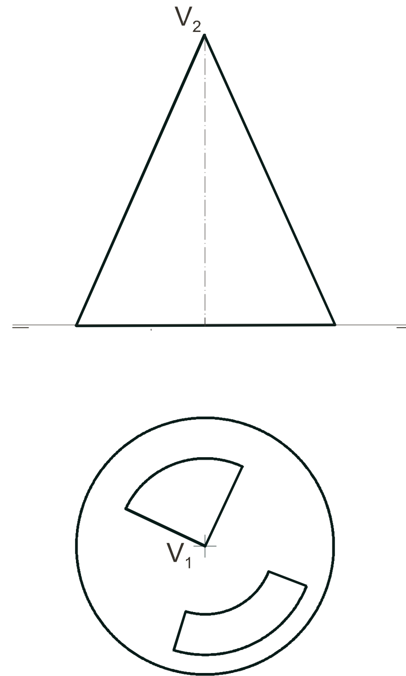
1. Hallar la sección del cilindro por el plano α.



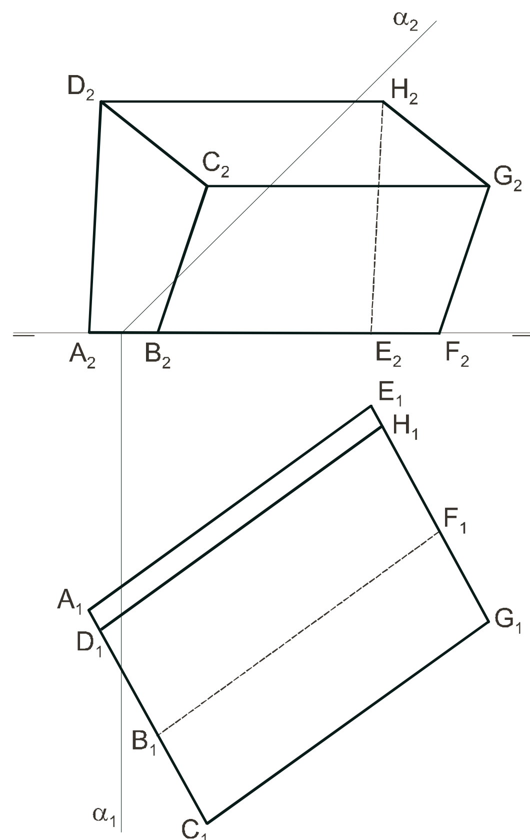
2. Hallar las dos proyecciones de la sección recta del prisma representado



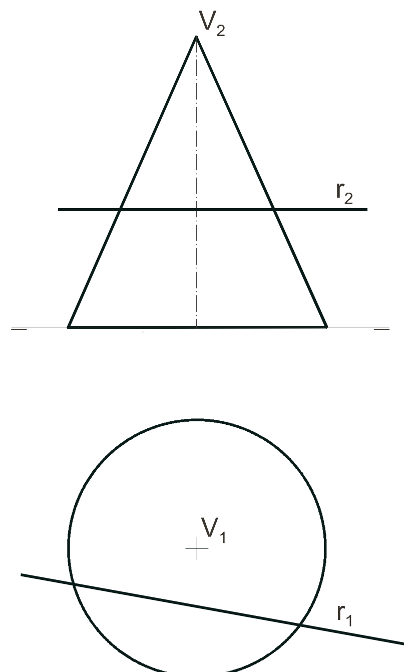
3. Se han dibujado unas figuras en la proyección horizontal de la superficie lateral del cono representado. Obtener su proyección vertical.



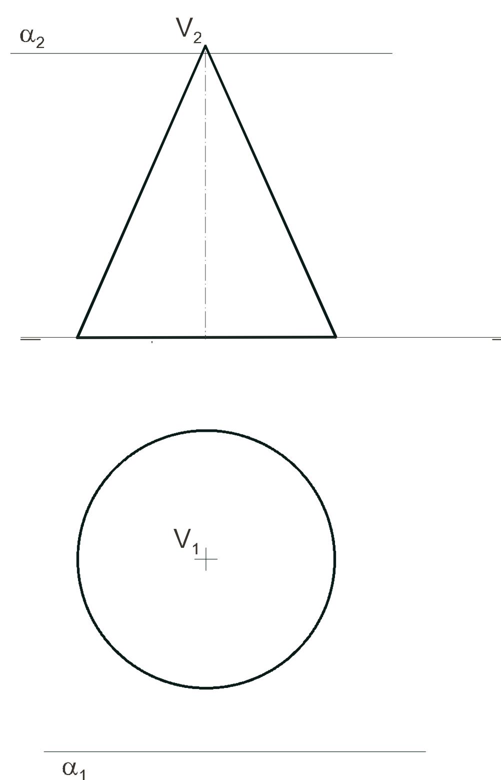
4. Efectuar la sección del prisma por el plano α.



5. Hallar la intersección del cono con la recta *r*.



6. Hallar las proyecciones de la sección del cono por el plano α.



8 Sistema diédrico: la esfera. Representación normalizada

• *Tambor y cúpula del Capitolio de Texas, Austin, Texas (ISFTIC. Banco de imágenes).*

Se inicia la Unidad con el estudio de la esfera, que presenta la particularidad, frente a las demás superficies de revolución, de que sus dos proyecciones son iguales.

Conocida la representación diédrica de los cuerpos poliédricos y de revolución, se está en condiciones de representar objetos formados por sus adiciones y sustracciones.

La norma UNE 1032, editada por el Instituto Español de Normalización (IRANOR), define los principios generales de representación aplicables a los dibujos técnicos realizados según los métodos de proyección ortogonales. Establece, entre otras, directrices sobre elección y disposición de vistas, sus tipos, los cortes, y las secciones.

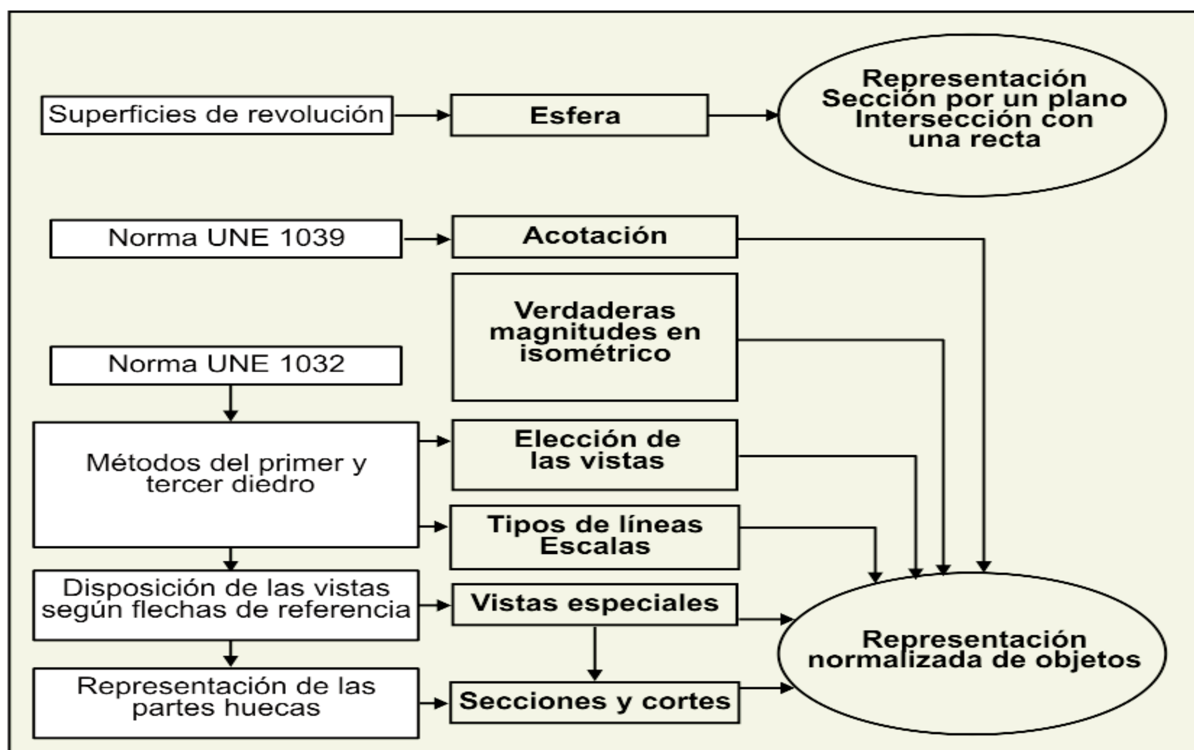
La norma UNE 1039 define los principios generales de acotación de dibujos técnicos.

La representación de objetos se fundamenta en la representación diédrica, que se enriquece con las prescripciones de las normas para realizar dibujos técnicos más claros y legibles.

En primer lugar deben estudiarse las prescripciones de las normas que se recogen en los apartados 1, 2, 3 y 4. A continuación se realizarán las actividades, que consisten en la representación parcial o completa de un objeto, buscando en los subapartados las especificaciones que le afecten. Así se adquirirá soltura en el manejo de la normativa.

Con el estudio de esta Unidad nos proponemos alcanzar los siguientes **objetivos**:

1. Representar en diédrico la esfera, hallar su sección por un plano y su intersección con una recta.
2. Conocer las especificaciones de la norma UNE 1032 sobre líneas, vistas, cortes y secciones y de la norma UNE 1039 sobre acotación.
3. Representar piezas, mediante dibujos realizados en sistema diédrico, que cumplan con las normas UNE 1032 y 1039.



ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. Esfera

1.1. Definición, representación, planos secantes y tangentes

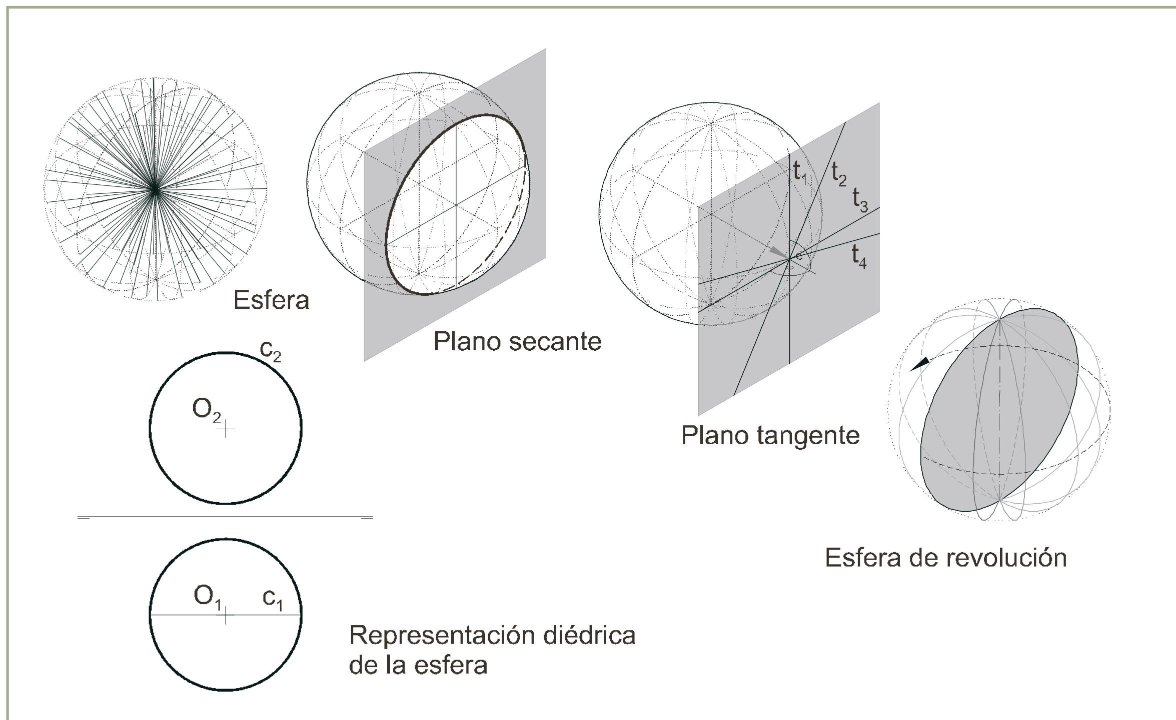


Ilustración 1

Esfera es el sólido formado por los segmentos de igual longitud que comparten un extremo. La superficie determinada por el otro extremo se llama esférica y puede definirse como el lugar geométrico de los puntos situados a una distancia fija, llamada radio, de un punto fijo llamado centro [Ilustración 1].

Un plano que corte a la esfera se llama **secante** y su sección es un círculo. Si además pasa por el centro se llama **diametral** y determina sobre la esfera un círculo máximo. Si el plano tiene un único punto en común con la superficie esférica se dice que es **tangente**, y resulta ser perpendicular al radio en dicho punto. El plano tangente en un punto contiene a todas las rectas tangentes a la esfera en dicho punto.

La esfera es una **superficie de revolución**, al ser posible generarla mediante el giro de un círculo alrededor de uno de sus diámetros.

La proyección cilíndrica ortogonal de la esfera en un plano es un círculo máximo; su representación diédrica queda determinada mediante la proyección del centro y la de sus contornos aparentes horizontal y vertical. Éstos son círculos de radio igual al de la esfera, proyección de los círculos máximos paralelos al plano de proyección considerado. En la

Ilustración 1, c_1 es la proyección primera del circulo máximo, cuya segunda proyección c_2 es el contorno aparente vertical.

En la ilustración 1 abajo puede verse como la proyección vertical de la esfera es la circunferencia c_2 (contorno aparente vertical), proyección del círculo máximo paralelo al plano vertical, que se proyecta en el horizontal como el diámetro c_1 de la primera proyección de la esfera.

1.2. Sección de la esfera por un plano proyectante

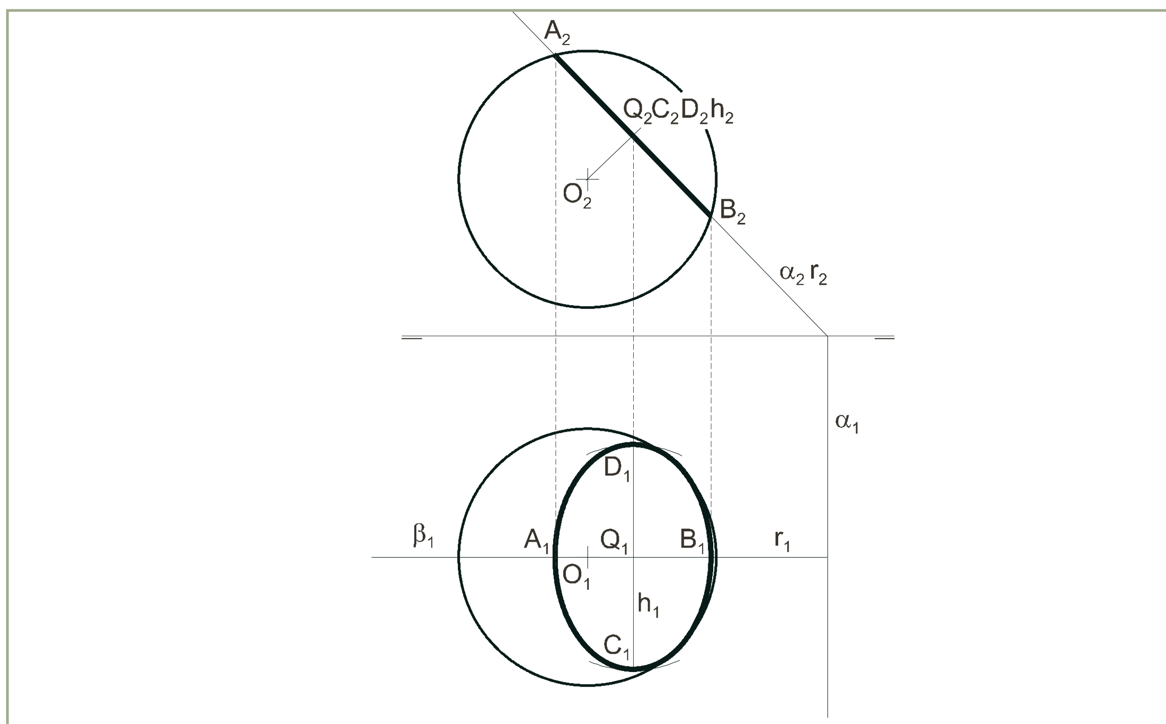


Ilustración 2

Sean α_1, α_2 las trazas del plano, estando la **esfera** definida por sus proyecciones [Ilustración 2].

La sección de la superficie esférica por un plano es una circunferencia. Si trazamos un plano frontal β, de simetría de la esfera y del plano α simultáneamente, podemos elegir dos diámetros perpendiculares *AB* y *CD* de la circunferencia sección, situados respectivamente en la recta *r* de intersección de ambos planos, que es frontal y de máxima pendiente de α, y en una horizontal del plano α.

La proyección vertical de dicha circunferencia coincide sobre α_2 con la de su diámetro *AB* en verdadera magnitud, estando sus extremos A_2, B_2 en el contorno aparente vertical. La perpendicular desde O_2 a α_2 determina las segundas proyecciones Q_2, C_2, D_2, del centro *O* y de los extremos del diámetro *CD* que es una recta de punta.

La proyección horizontal de la circunferencia sección es una elipse cuyos diámetros principales son proyección de *AB* y *CD*. Las primeras proyecciones Q_1, $\overline{A_1B_1}$ del centro y el diámetro menor se obtienen mediante líneas de referencia. Los extremos C_1, D_1 del diámetro principal mayor son los puntos de corte de arcos de centro Q_1 y radio $\overline{Q_2A_2}$ con la línea de referencia trazada desde Q_2.

La elipse se traza mediante cualquier método a partir de los diámetros principales $\overline{A_1B_1}$ y $\overline{C_1D_1}$ (no aparece en la construcción).

1.3. Sección de la esfera por un plano oblicuo

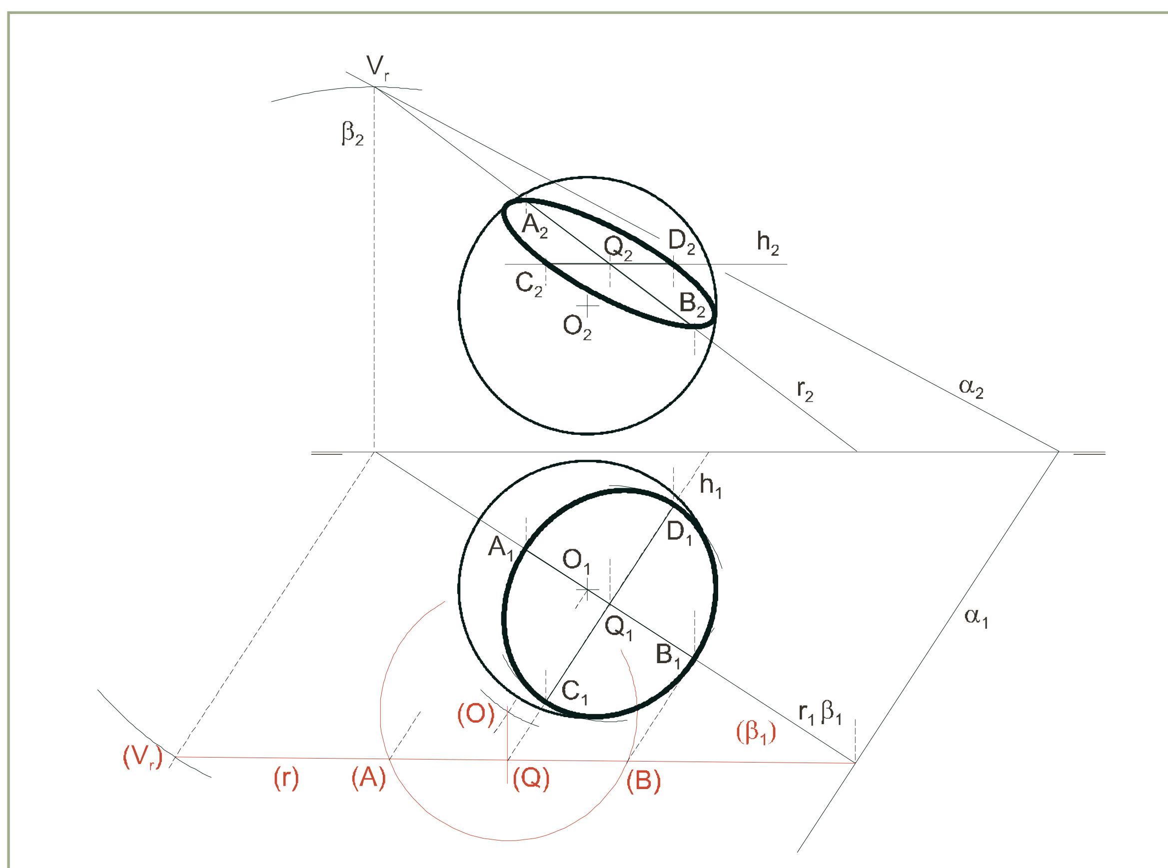


Ilustración 3

Sean α_1, α_2 las trazas del plano, estando la esfera definida por sus proyecciones [Ilustración 3].

El plano vertical β, cuya traza β_1 pasa por O_1 y es perpendicular a α_1, corta al plano α según su línea de máxima pendiente *r*, que contiene el diámetro *AB* y el centro *Q* de la circunferencia sección.

El abatimiento sobre el horizontal, alrededor de β_1, de la recta *r* y del círculo máximo en que β corta a la esfera, permiten obtener *(A)*, *(Q)*, *(B)* y, a continuación, mediante direcciones de

abatimiento, A_1, Q_1, B_1. Las segundas proyecciones A_2, Q_2, B_2 se obtienen trazando líneas de referencia hasta r_2.

El diámetro *CD*, perpendicular al *AB*, está contenido en la horizontal *h* del plano α, que pasa por *Q*. Las primeras proyecciones C_1, D_1 de sus extremos son los puntos de corte de arcos de centro Q_1 y radio $\overline{(Q)(A)}$ con h_1. Las segundas proyecciones C_2, D_2 se obtienen trazando líneas de referencia hasta h_2.

Las elipses proyección de la circunferencia sección se trazan, mediante cualquier método, a partir de los diámetros principales $\overline{A_1B_1}$, $\overline{C_1D_1}$ y los conjugados $\overline{A_2B_2}$, $\overline{C_2D_2}$, (no aparece en la construcción).

1.4. Intersección de la esfera con una recta

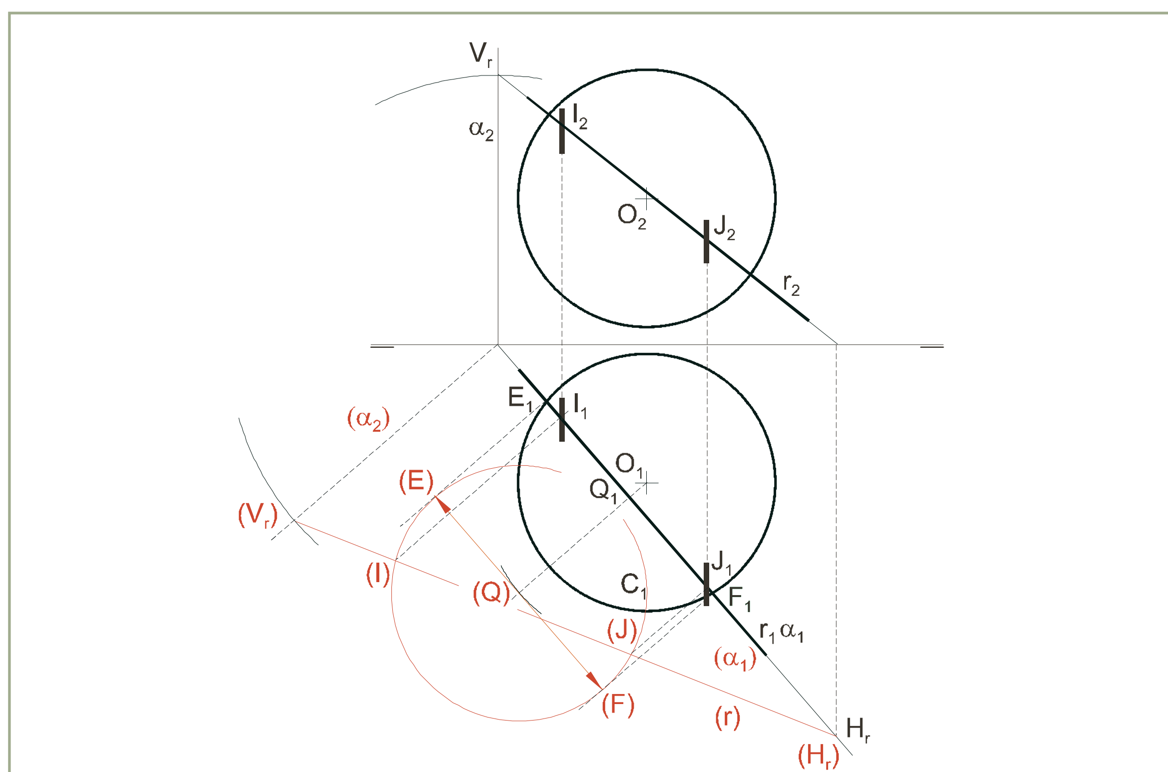


Ilustración 4

Sean r_1, r_2 las proyecciones de la recta, estando la esfera definida por las suyas [Ilustración 4].

Un plano vertical α, cuya traza α_1 contenga a r_1, corta a la esfera según el circulo de centro Q_1, que es el punto de intersección con α_1 de su perpendicular trazada desde O_1. El abatimiento alrededor de α_1 de la recta *r* y de dicho círculo, cuyo diámetro es E_1F_1, permite obtener los abatidos *(I)*, *(J)* de los puntos de intersección de recta y esfera, y a continuación mediante direcciones de abatimiento, I_1, J_1. Las segundas proyecciones I_2, J_2 se obtienen trazando líneas de referencia hasta r_2.

2. Representación normalizada

2.1. Método del primer diedro

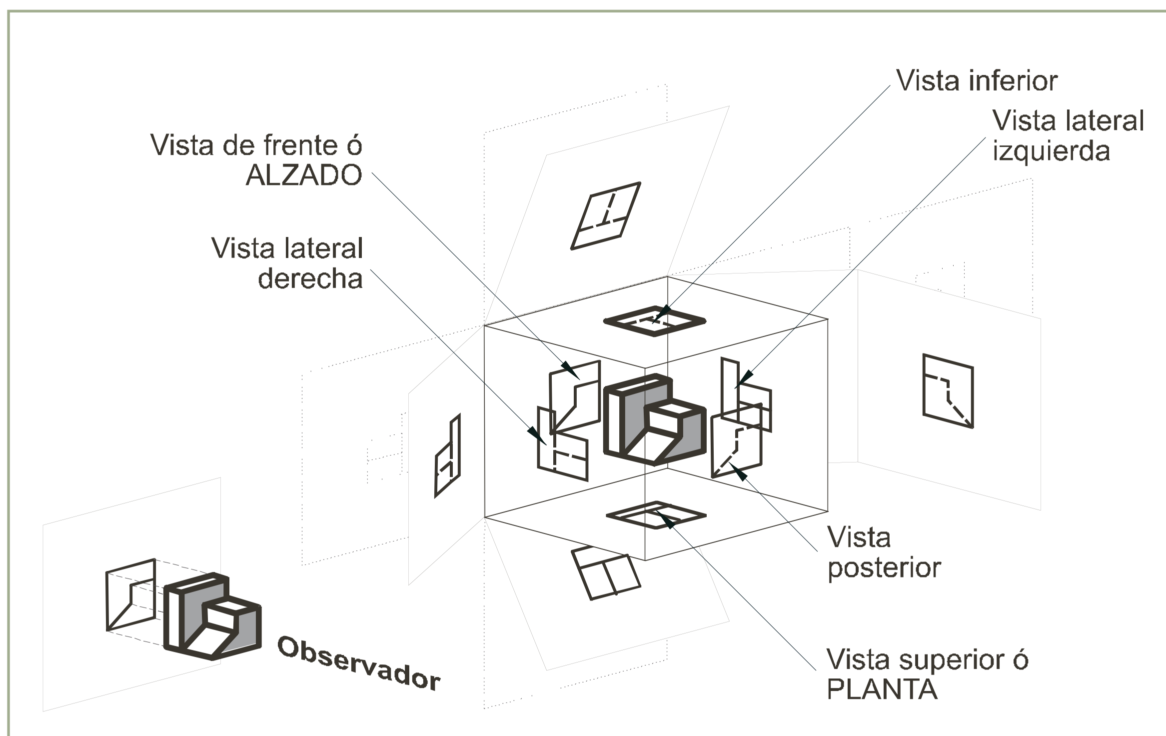


Ilustración 5 Animación

La representación diédrica normalizada sitúa el objeto en el interior de un ortoedro y lo proyecta sobre sus caras. Las seis imágenes obtenidas se llaman vistas y se nombran de acuerdo con la posición que ocupa el observador con respecto al punto de vista principal, desde el cual se obtiene la vista más característica del objeto llamada alzado o vista de frente. Los nombres de las demás vistas aparecen en la Ilustración 5 derecha. Para determinar qué partes del objeto resultan vistas u ocultas se supone situado al observador de modo que el objeto se halle entre él y el plano de proyección considerado [Ilustración 5 izquierda].

Según el cuadrante en que sitúe el objeto existen dos métodos para disponer las vistas, el del primer diedro y el del tercer diedro. En el método del primer diedro se abaten las vistas sobre el plano vertical de proyección, del modo indicado en la Ilustración 5, quedando dispuestas en el papel según se recoge en la Ilustración 6 izquierda. Se indica el método empleado mediante el símbolo que se ha situado en la parte inferior derecha.

En el método del tercer diedro es el plano anterior el que permanece fijo y los demás se abaten desde atrás hacia adelante, obteniéndose la distribución de vistas que aparece en la Ilustración 6 derecha, junto con el símbolo del método.

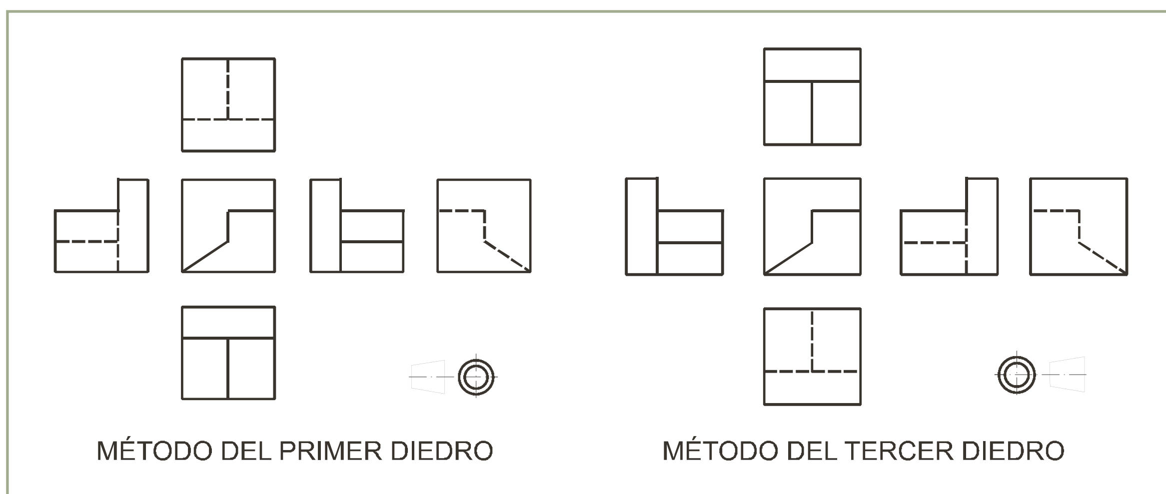


Ilustración 6

2.2. Disposición de las vistas según flechas de referencia

Situada la vista principal, pueden disponerse una o más vistas en una posición indiferente a ella, si resulta más ventajosa que la disposición según los métodos del primer o tercer diedro. Se identificarán con una letra mayúscula situada en su parte superior o inferior, trazando en otra de las vistas una flecha de referencia que llevará la misma mayúscula, próxima a ella [Ilustración 7 derecha]. No debe disponerse ninguno de los símbolos de primer o tercer diedro.

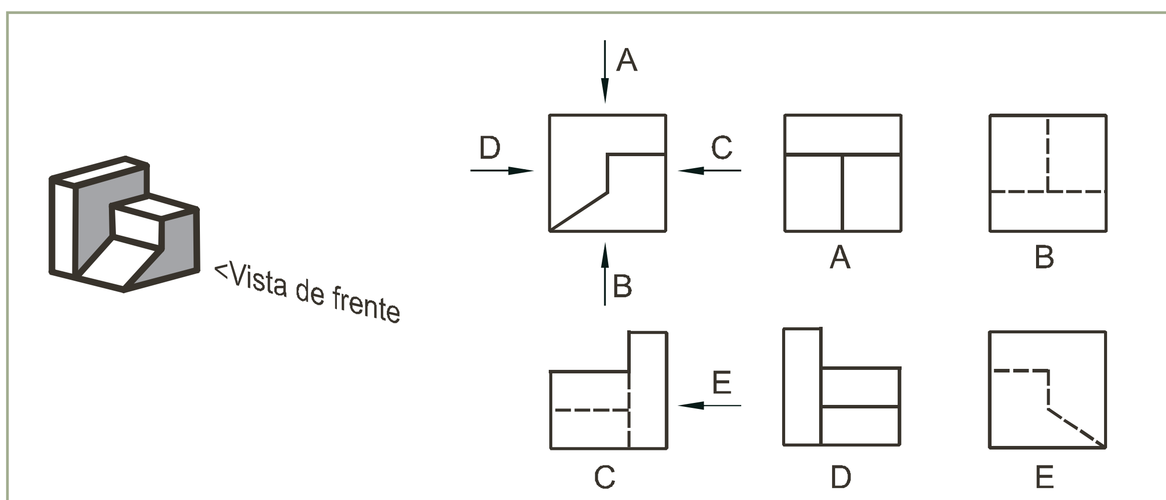


Ilustración 7

En la Ilustración 7 derecha la vista principal es la de frente o alzado ya que permite intuir las dos formas prismáticas de la pieza. En ella se trazan todas las flechas de referencia con excepción de la que sitúa la vista posterior *E*, por ser imposible hacerlo.

2.3. Elección de las vistas

Pueden no ser necesarias las seis vistas para describir un objeto. Al contrario, estando la pieza situada en su posición de funcionamiento, debe elegirse el menor número necesario entre las más características y que tengan menos aristas ocultas.

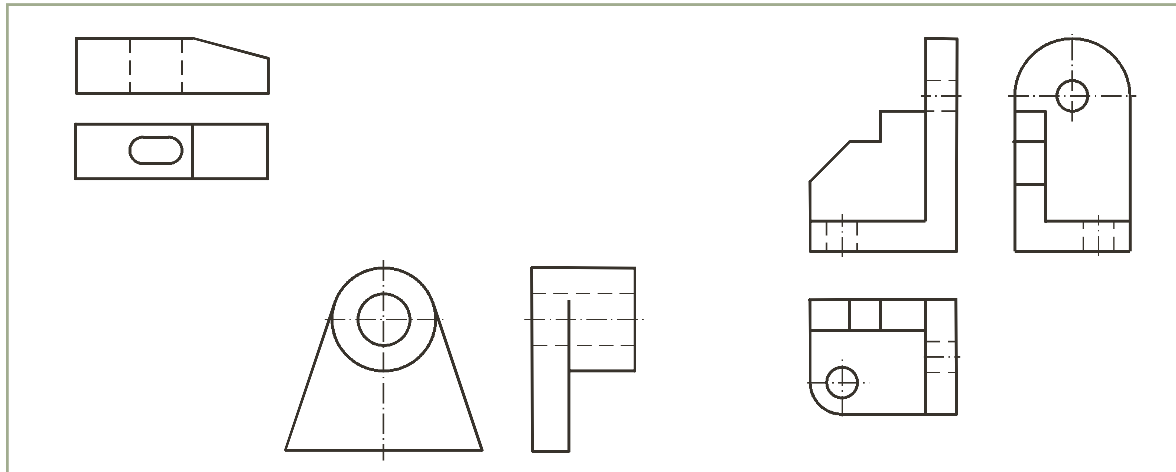


Ilustración 8

Se precisan sólo dos vistas para describir combinaciones sencillas de prismas, pirámides, cilindros y conos, ya sea alzado y planta, o alzado y vista lateral [Ilustración 8 izquierda].

Cuando se precisan tres vistas para definir un objeto suelen elegirse el alzado, la planta y una vista lateral [Ilustración 8 derecha].

2.4. Tipos de líneas

Al dibujar las vistas se emplean líneas de espesor grueso o fino y diferentes tipos, para diferenciar entre aristas vistas, aristas ocultas, ejes, líneas de cota, líneas de referencia ...

En la Ilustración 9 se ha representado una pieza con los tres tipos más empleados. Éstos se completan en los siguientes apartados conforme va siendo necesario. Aunque las aristas ocultas se representan en este libro con línea de trazos fina, se admite también la línea de trazos gruesa, quedando la decisión a criterio del delineante.

Cuando en una vista coinciden dos o más líneas, unas prevalecen sobre otras de acuerdo con su importancia en la representación del objeto, en el siguiente orden:

- Aristas y contornos vistos.
- Aristas y contornos ocultos.
- Ejes.
- Cotas y referencias.

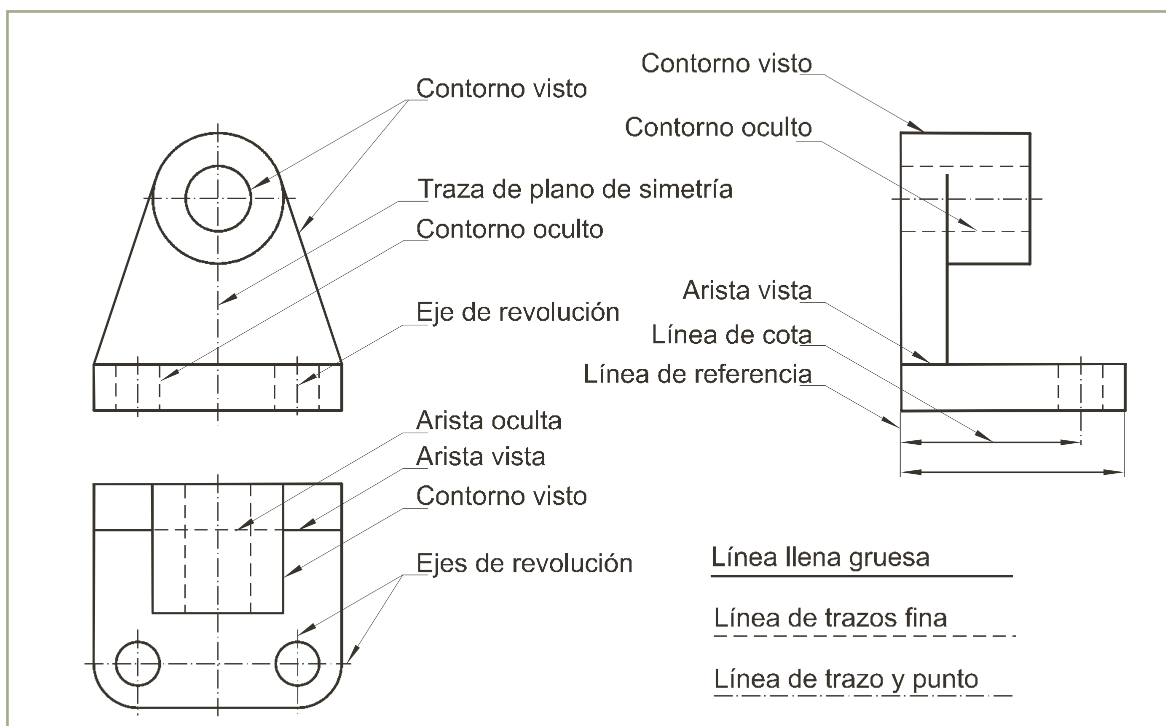


Ilustración 9

El acabado profesional de las líneas se realiza a tinta, empleando anchos de línea tomados de la serie 0,18 - 0,35 - 0,5 - 0,7 - 1. La razón entre los espesores de las líneas gruesa y fina debe ser superior a *2*. En el acabado a lápiz, los gruesos ancho y fino pueden responder al trazado con lápices de dureza *B* y *H*.

2.5. Escalas normalizadas

La norma *UNE-EN ISO 5455* especifica las escalas recomendadas para la realización de dibujos técnicos, así como la manera de designarlas. Define los siguientes conceptos:

- **Escala** es la relación entre la medida lineal de la representación de un elemento de un objeto sobre un dibujo original y la medida lineal real del mismo elemento del objeto real.
- **Escala a tamaño natural** es la que corresponde a la relación *1:1*. Se designa como *ESCALA 1:1*.
- **Escalas de ampliación** son las correspondientes a relaciones mayores que *1:1*. Se designa como *ESCALA x:1*. Se dice que es mayor cuanto mayor es *x*.
- **Escalas de reducción** son las correspondientes a relaciones menores que *1:1*. Se designa como *ESCALA 1:x*. Se dice que es menor cuanto mayor es *x*.

La escala elegida para la realización de un dibujo técnico debe ser suficientemente grande para permitir una interpretación fácil y clara de la información mostrada. Se recomienda elegirla entre las que figuran en el cuadro:

Categoría	Escalas recomendadas		
Escalas de ampliación	50:1 5:1	20:1 2:1	10:1
Tamaño natural			1:1
Escalas de reducción	1:2 1:20 1:200 1:2000	1:5 1:50 1:500 1:5000	1:10 1:100 1:1000 1:10000

2.6. Triángulo universal de escalas

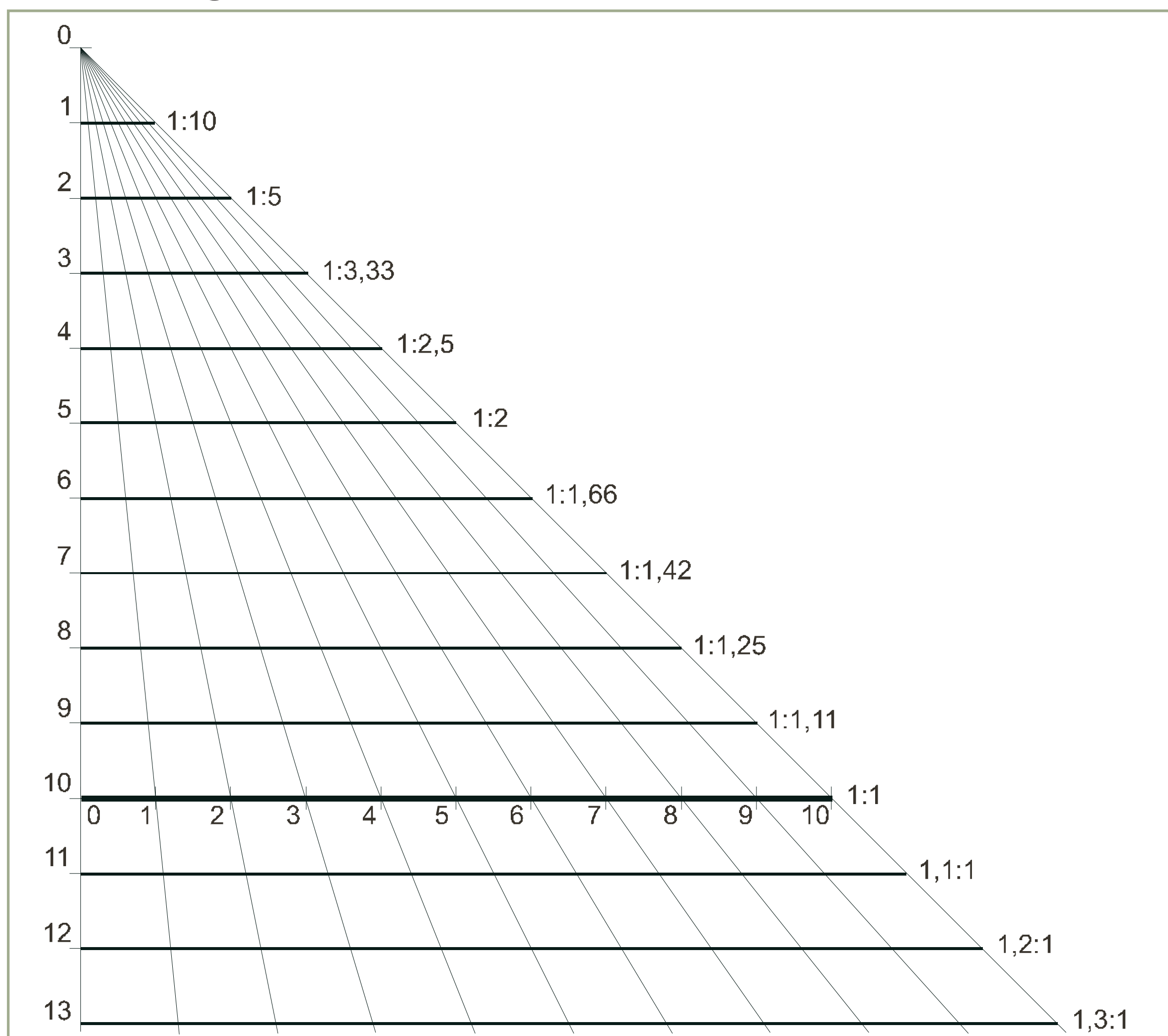


Ilustración 10

El triángulo universal de escalas facilita la construcción de las escalas gráficas más sencillas. La versión más ventajosa es un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden 10 cm y se hallan divididos en 10 partes de 1 cm. Los puntos de división de uno de los catetos forman la escala *1:1* y se proyectan desde el vértice opuesto. Las series de puntos obtenidas al cortar el haz mediante

rectas paralelas a la escala *1:1*, trazadas desde los puntos de división del otro cateto, forman las escalas de reducción *1:10, 1:5, 1:1,33, 1:2,5, 1:2*,... Pueden dibujarse las escalas de ampliación *1,1:1, 1,2:1, 1,3:1, 1,4:1*,… prolongando la construcción en el exterior del triángulo.

2.7. Escala decimal de transversales

Se llama así a la escala gráfica que permite apreciar las décimas partes de la unidad empleada en la contraescala.

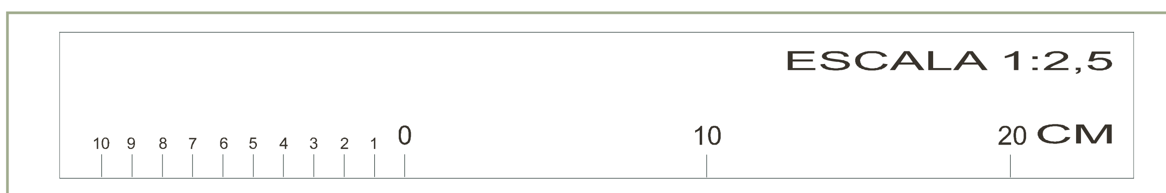


Ilustración 11

Para construir la escala gráfica *1:2,5* [Ilustración 11] se utiliza la obtenida en el triángulo universal de escalas [Ilustración 10] copiándola tres veces en el borde de una cartulina. La primera, dividida en 10 unidades que a dicha escala representan 1 cm, formará la contraescala y las otras dos se corresponderán con las divisiones de 10 cm y 20 cm.

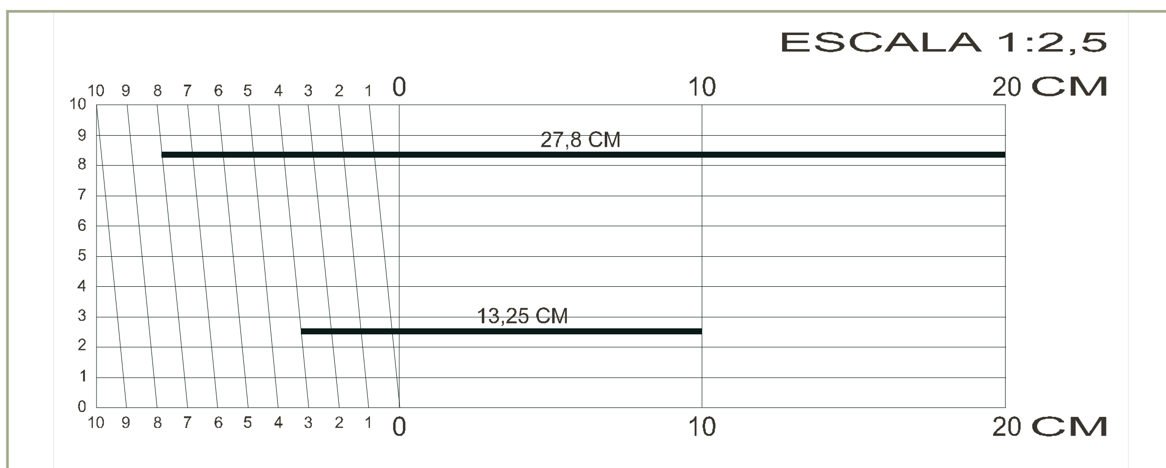


Ilustración 12

Si se desea convertirla en una escala decimal de transversales *1:2,5* [Ilustración 12] llevaremos perpendicularmente a ella, por el extremo de la contraescala, un segmento cualquiera dividido en 10 partes iguales. Sus puntos de división, numerados del 1 al 10, indicarán las décimas partes de la unidad de la contraescala. Se trazan por ellos rectas paralelas a la escala gráfica, estando la última de ellas dividida igual que ésta.

Las transversales se obtienen uniendo los puntos de división de la contraescala mediante 10 segmentos paralelos, cuyos extremos sean unidades consecutivas.

El soporte debe ser una hoja de papel transparente que se coloca sobre el segmento a medir de modo que coincidan sus extremos con la división 0, 10 o 20 y con una transversal. A la lectura de las divisiones 0, 10, 20 cm se les sumarán las unidades correspondientes a la

menor de las divisiones de los extremos de la transversal. Las décimas se obtienen en la escala vertical tomando la menor de las correspondientes a las paralelas más próximas al segmento medido (27,8 cm) o apreciando las centésimas de manera aproximada (13,25 cm).

2.8. Obtención de las vistas de un objeto representado en isométrica. Verdaderas magnitudes

Sea una pieza industrial representada en isométrico [Ilustración 13 izquierda].

Se trazan unos ejes axonométricos mediante paralelas a las aristas de la pieza representada y se dibuja en ellos un triángulo de las trazas *ABC* , cuyos lados *AB*, *BC*, *CA* deben ser perpendiculares a *Z’, X’, Y’*, respectivamente [Ilustración 10 derecha arriba].

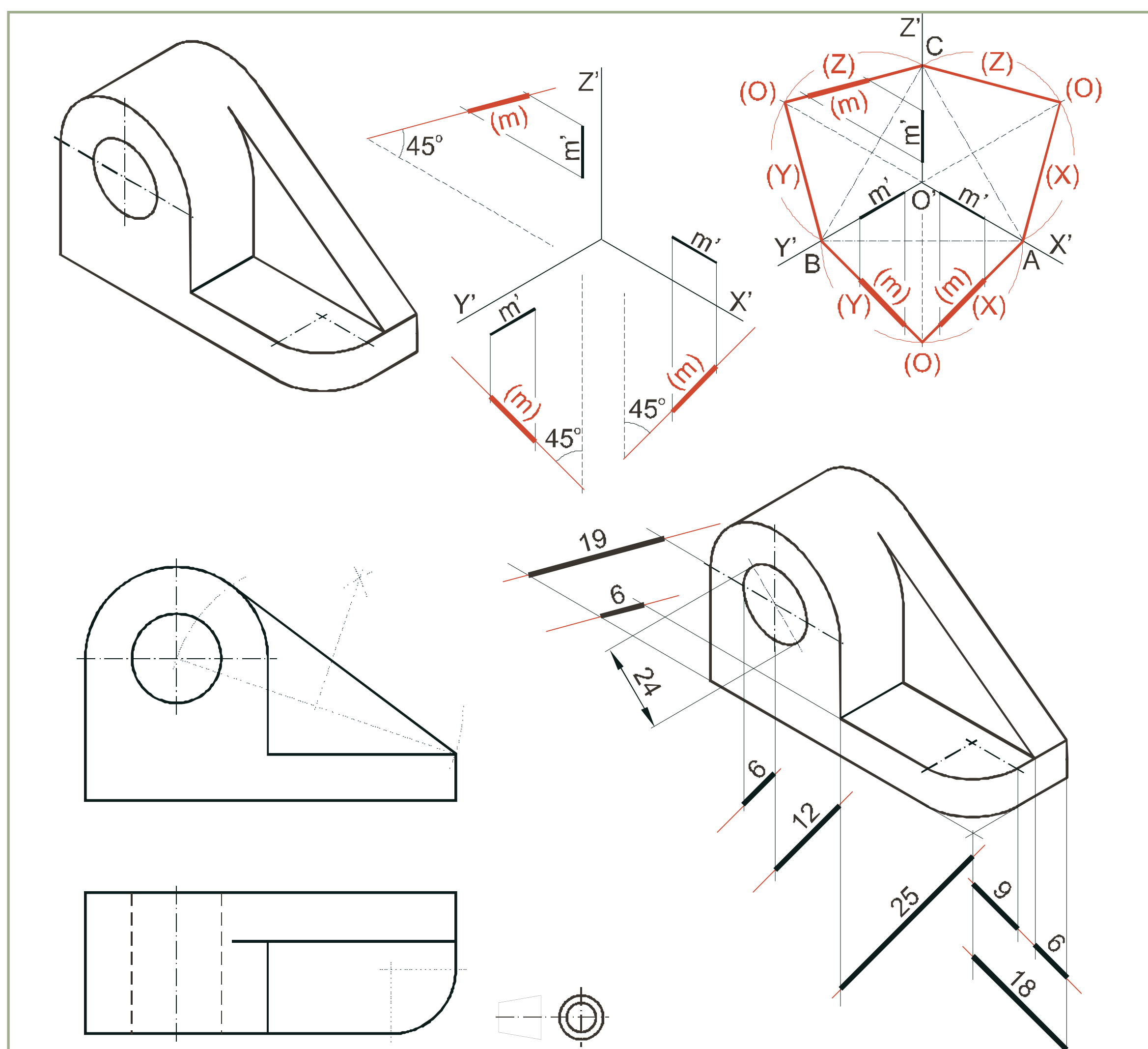


Ilustración 13 Animación

Se abate el plano *XY*. La dirección de abatimiento de *O* es la perpendicular a la charnela *AB* trazada por *O’*, que corta el arco capaz de 90º sobre *AB* en *(O)*, siendo *(X)* ≡ *A*(*O*) e (*Y*) ≡ *B*(*O*). También pueden trazarse *(X)*, *(Y)* formando ángulos de 45º con el eje *Z’*, ya que ambos son simétricos respecto de él y perpendiculares entre sí.

La verdadera magnitud *(m)*, de un segmento *m'*, paralelo al eje *X'* o *Y'*, es el determinado por los puntos de corte de paralelas al eje *Z'*, trazadas por sus extremos, con líneas que forman ángulos de 45º con ellas [Ilustración 10 centro arriba].

Para obtener las medidas de segmentos paralelos a *Z'* se procede análogamente.

En la pieza se decide qué medidas se necesita conocer y se obtienen sus verdaderas magnitudes [Ilustración 13 derecha abajo]. Así, por ejemplo, paralelos al eje *X'* se hallan los radios de las bases de dos cilindros, macizo y hueco, que conforman la pieza. Paralelas al eje *Z'*, trazadas por sus extremos, determinan las medidas de 12 y 6 mm sobre líneas que forman ángulos de 45º con ellas. De manera análoga se obtienen las demás medidas.

Se elige como vista principal (alzado) la proyección axonométrica vertical primera que informa sobre el plano inclinado y los cilindros hueco y macizo [Ilustración 13 izquierda abajo]. Se necesita la planta para describir la forma de la pletina de la base y el espesor del refuerzo (plano inclinado). Se puede prescindir de la vista lateral que no añade información alguna.

2.9. Fundamentos y especificaciones de la acotación

Las líneas de cota se disponen paralelas al elemento acotado, en el exterior de las vistas, salvo que sea necesario colocarlas en el interior para facilitar su lectura.

Cuando se acoten varias dimensiones se dispondrán más próximas al contorno las más cortas.

No se pueden usar las aristas o los ejes como líneas de cota.

Las líneas de cota no se pueden disponer en las prolongaciones de aristas del contorno.

Las líneas de cota y de referencia no deben cruzarse con otras líneas, a menos que sea inevitable.

Las líneas de referencia deben ser perpendiculares a la longitud a acotar y prolongarse un poco más allá de su encuentro con la línea de cota.

Cuando se superponen cotas en espacios reducidos se pueden sustituir las cabezas de flecha por puntos negros. Para no amontonar los números se sitúan a la derecha de la cota o se sacan fuera.

Los ejes y líneas de contorno pueden usarse como líneas de referencia.

Ilustración 14

Acotar un dibujo es describir las medidas del objeto que se representa para que una vez construido funcione como se proyectó. Se llaman cotas a las dimensiones de las magnitudes lineales o angulares que se marcan en el dibujo.

Los elementos que intervienen en la acotación son los siguientes:

- Líneas de cota, de trazo fino continuo, indican la dirección de la dimensión que se acota. Acaban en uno o en sus dos extremos en una cabeza de flecha.
- Líneas de referencia, de trazo fino continuo, pasan por los extremos de las cabezas de flecha y transfieren las cotas al dibujo.
- Números de cota, indican el valor numérico de la dimensión que se acota.
- Líneas de referencia de llamada, de trazo fino continuo, se utilizan para sacar una cota del dibujo por falta de espacio.

En el dibujo y disposición de estos elementos deben seguirse las especificaciones que se recogen en las Ilustraciones 14, 15 y 16.

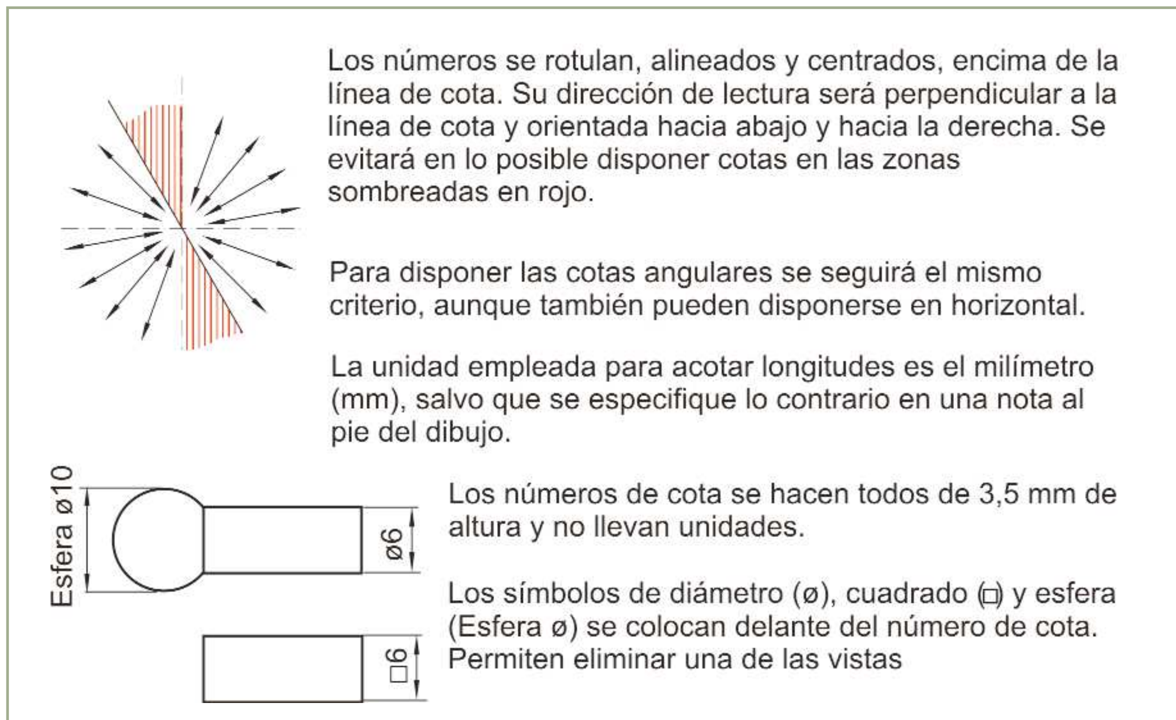


Ilustración 15

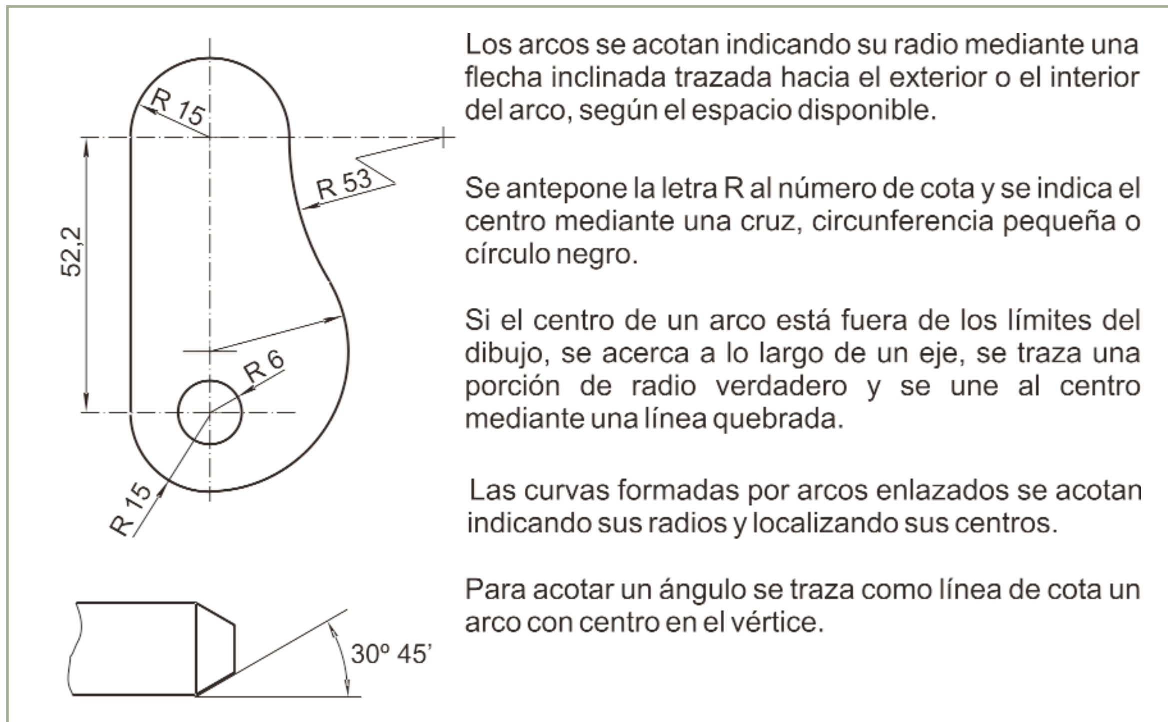


Ilustración 16

2.10. Sistemas de distribución de cotas

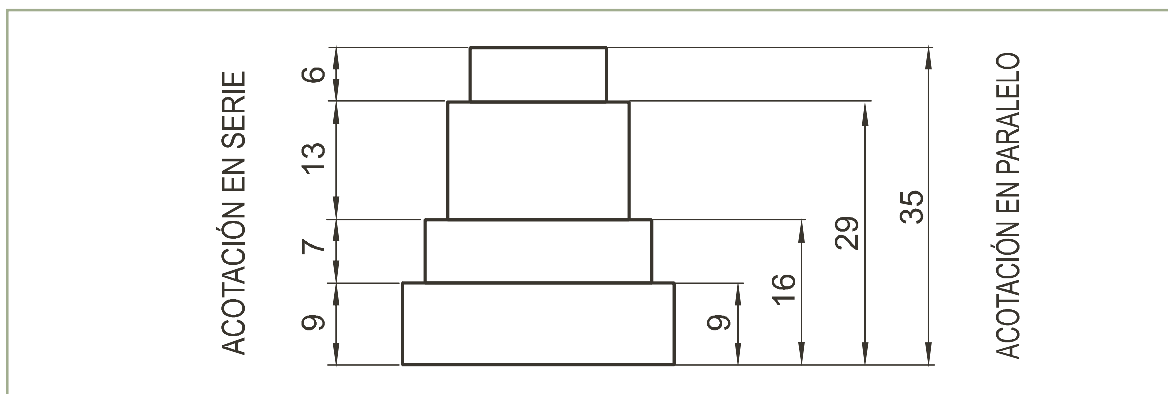


Ilustración 17

Dos son los procedimientos más empleados para situar las cotas en un dibujo, la acotación en serie y la acotación en paralelo [Ilustración 17].

En la acotación en serie las cotas se disponen unas a continuación de otras. Se utiliza cuando los errores de una dimensión no afectan a las restantes. Por ejemplo, un error cometido en la cota de 7 mm provoca un desplazamiento de las de 9, 13 y 6 mm, pero ello puede no afectar al funcionamiento del objeto.

En la acotación en paralelo las cotas se refieren a un mismo plano o eje. Se utiliza para evitar que los errores de una dimensión afecten a las restantes. Por ejemplo, el posible error cometido en la cota de 16 mm, no afecta a las de 9, 29, o 35 mm, ni en su dimensión ni en su situación.

2.11. Acotación de las vistas de un objeto

Cualquier objeto industrial se compone de cuerpos positivos (macizos) o negativos (huecos). Deben de acotarse tanto sus dimensiones como sus posiciones relativas.

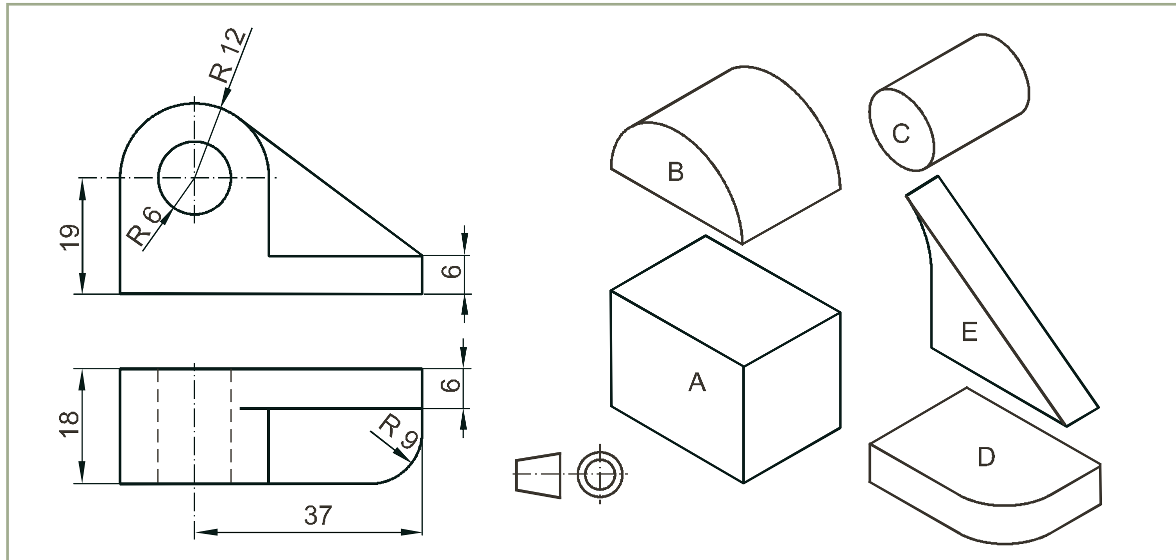


Ilustración 18

Sea una pieza industrial representada según el método del primer diedro [Ilustración 18 izquierda].

Dicha pieza está compuesta por los volúmenes simples que aparecen en la Ilustración 18 derecha. Las cotas de tamaño y situación de cada uno de ellos son los siguientes:

- Ortoedro *A*. En el alzado se acota el alto 19 y el ancho se deduce por ser dos veces el radio del cilindro 2 x12. La profundidad 18 se acota en la planta. Ésta pieza sirve de referencia para acotar la situación de las demás.
- Cilindro macizo *B* y hueco *C*. Sus radios 6 y 12 se acotan en el alzado y su longitud 18 en la planta. El medio cilindro *B* tiene una cara común con *A* y sus bases alineadas con dos de sus caras, por lo que no precisa cotas de situación. El cilindro hueco tampoco, ya que comparte un plano de simetría con ambas figuras y el eje con el macizo.
- Ortoedro con una esquina redondeada *D*. En el alzado se acota el alto 6 y en la planta el profundo 18 y el ancho 25, que se deduce restando a 37 el radio del cilindro 12. Sus caras en contacto o alineadas con el ortoedro *A* hacen que no precise cotas de situación, excepto la que sitúa su extremo respecto al eje de los cilindros 37, que permite prescindir de una supuesta cota que indicara su ancho 25. El redondeo se acota dando su radio 9.
- Refuerzo *E*. La posición del plano inclinado, tangente al cilindro y con una arista común con *D*, hace que sólo se precise la cota de profundidad 6.

3. Vistas especiales

3.1. Vistas particulares

Las vistas pueden dibujarse según una dirección de observación que no sea perpendicular o paralela a la de la vista principal cuando se considere necesario para la definición del objeto. Dichas vistas se identificarán mediante flechas de referencia y son, en general, vistas parciales. Las partes que quedan deformadas no se representan porque no son perpendiculares a la dirección de observación.

En la Ilustración 19 izquierda se han dibujado, según el método del primer diedro, las vistas de frente y lateral izquierda de una pieza. Las partes de la vista lateral izquierda situadas en posición oblicua respecto a la dirección de observación quedan deformadas.

A la derecha se ha elegido una dirección de observación *A* perpendicular al eje de la parte de la pieza que se desea representar. Se obtiene una **vista particular**, parcial lateral izquierda *A*, que muestra las dimensiones en verdadera magnitud.

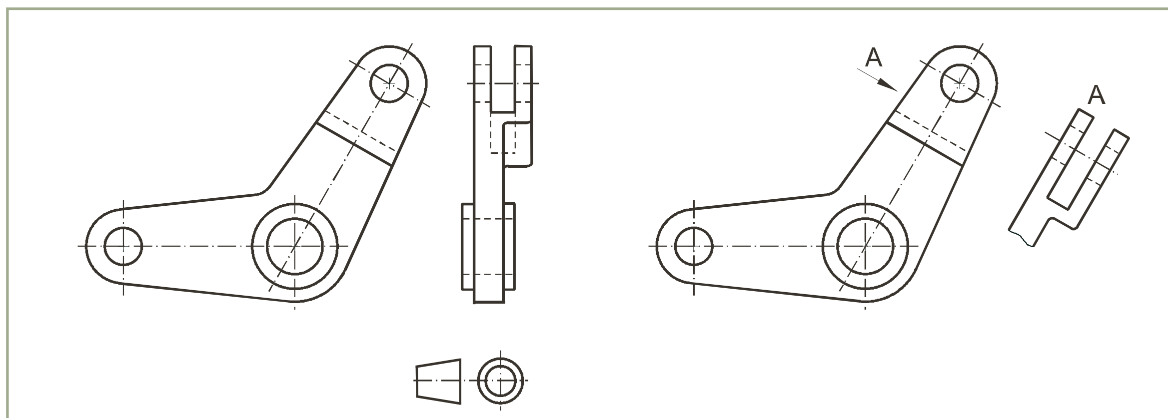


Ilustración 19

3.2. Vistas parciales

Puede sustituirse una vista completa por la vista parcial que contiene los elementos imprescindibles, cuando el resto de la vista no sea necesario para la comprensión del dibujo. La vista parcial se limitará por una línea llena fina a mano alzada o una recta con zig-zag.

En la Ilustración 20 se han dibujado, según el método del primer diedro, las vistas de frente y lateral derecha de una pieza, sustituyendo la planta por una **vista parcial** *A* que muestra la posición del agujero.

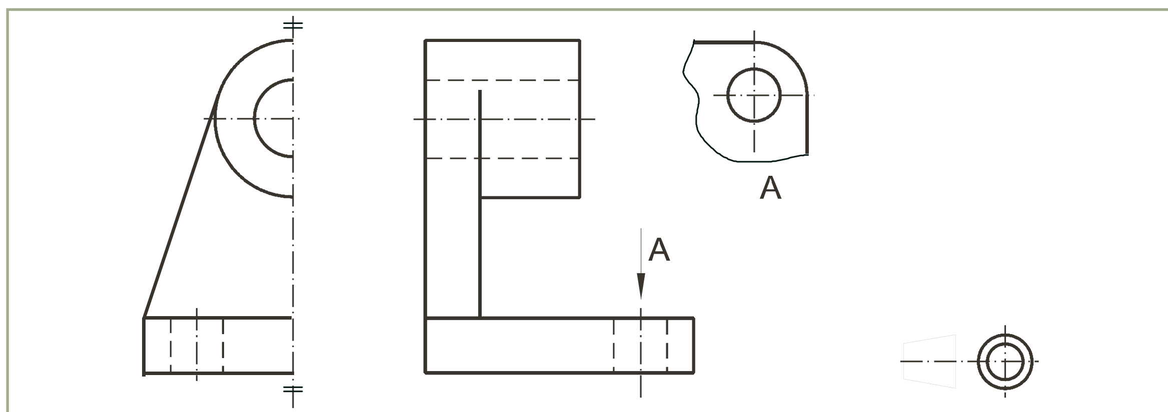


Ilustración 20

3.3. Vistas locales

Al representar piezas que contengan elementos simétricos se permite, para definir éstos, dar una vista local en lugar de una vista completa, con la condición de que la representación no sea ambigua.

Las **vistas locales** se dibujan por el método del tercer diedro, sea cual sea el método empleado para representar la pieza. Se dibujan con línea llena gruesa y deben ir unidas a la vista principal mediante una línea fina de trazos y puntos.

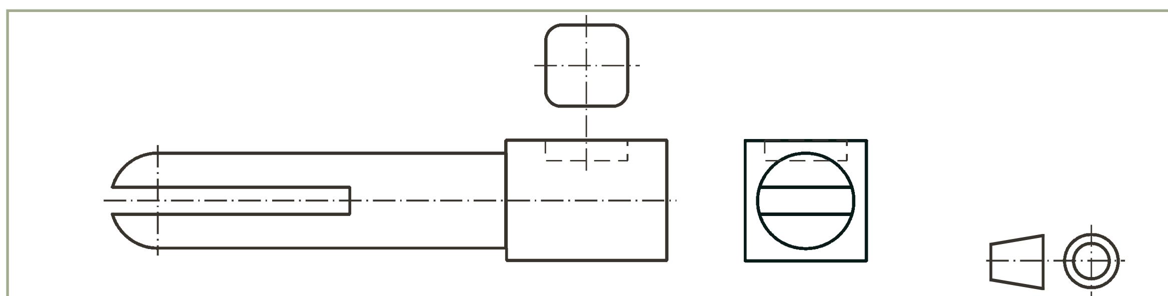


Ilustración 21

En la Ilustración 21 se muestra la forma del hueco mediante una vista local al no ser necesaria más información.

3.4. Vistas de piezas simétricas

Al representar piezas simétricas, las vistas que también lo son pueden sustituirse por una fracción de la vista completa, siempre y cuando la comprensión del dibujo no se vea afectada.

La vista de frente debería ser una excepción a esta norma por ser la que suministra la información más completa sobre la forma de la pieza.

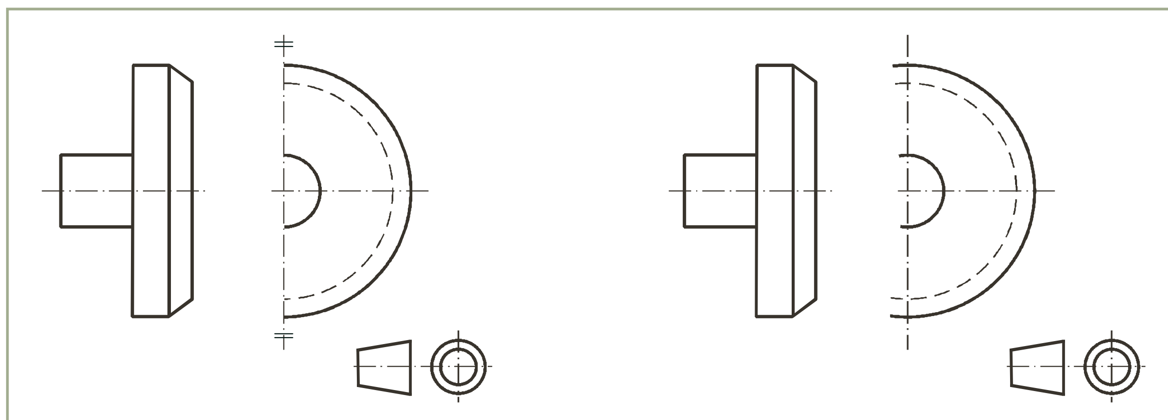


Ilustración 22

La fracción de vista que no se representa debe ser la que está situada en la parte interior del dibujo. Se indicará la simetría mediante uno de estos procedimientos:

- Marcando la traza de cada plano de simetría con dos trazos finos paralelos, perpendiculares al eje en sus extremos [Ilustración 22 izquierda].
- Prolongando las líneas representativas de la pieza ligeramente más allá de la traza del plano de simetría [Ilustración 22 derecha].

3.5. Detalles y vistas interrumpidas

Cuando al representar una pieza aparezcan zonas de difícil lectura o acotación por su reducido tamaño, se dibujarán aparte convenientemente ampliadas. La zona del detalle se rodeará con un círculo hecho con línea fina continua identificado por una letra mayúscula. En el detalle ampliado se indicará la escala junto a la letra que lo identifica [Ilustración 23 izquierda].

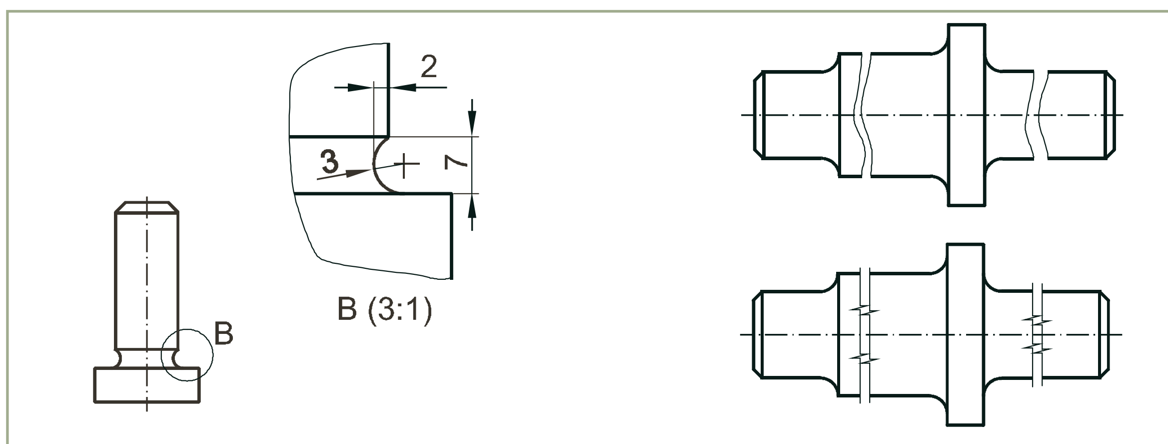


Ilustración 23

Las piezas de gran longitud pueden representarse dibujando sólo las partes imprescindibles para su definición. Éstas se dibujan a mano alzada, próximas entre si, limitadas por una línea llena fina o una recta con zig-zag [Ilustración 23 derecha].

3.6. Simplificaciones

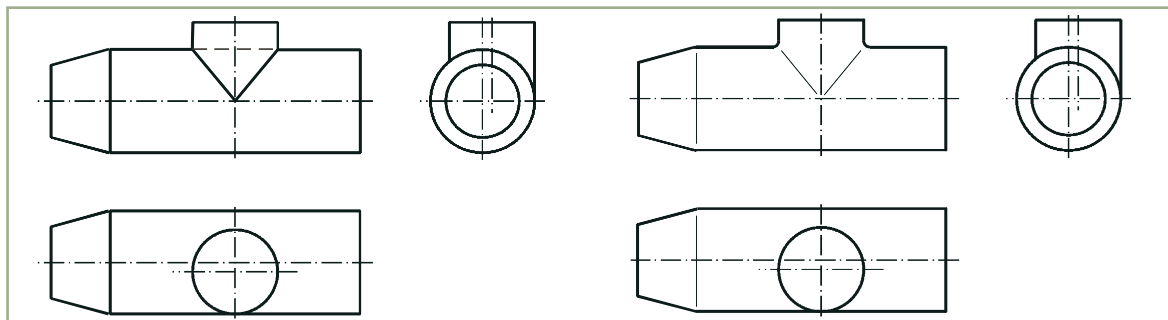


Ilustración 24

El dibujo de las intersecciones entre superficies puede simplificarse para facilitar la lectura de las vistas y realizarlas más rápidamente, siempre y cuando la representación no resulte ambigua.

Las intersecciones reales entre superficies [Ilustración 24 izquierda] se simplifican trazándolas rectas en lugar de curvas, como serían realmente. Además, cuando las líneas rectas o curvas de intersección con cuerpos huecos o macizos se aproximen al contorno, se desplazarán hasta confundirse con él.

Las intersecciones aparentes entre superficies unidas por un chaflán o un redondeado [Ilustración 24 derecha] se dibujan mediante líneas llenas finas que no toquen los contornos.

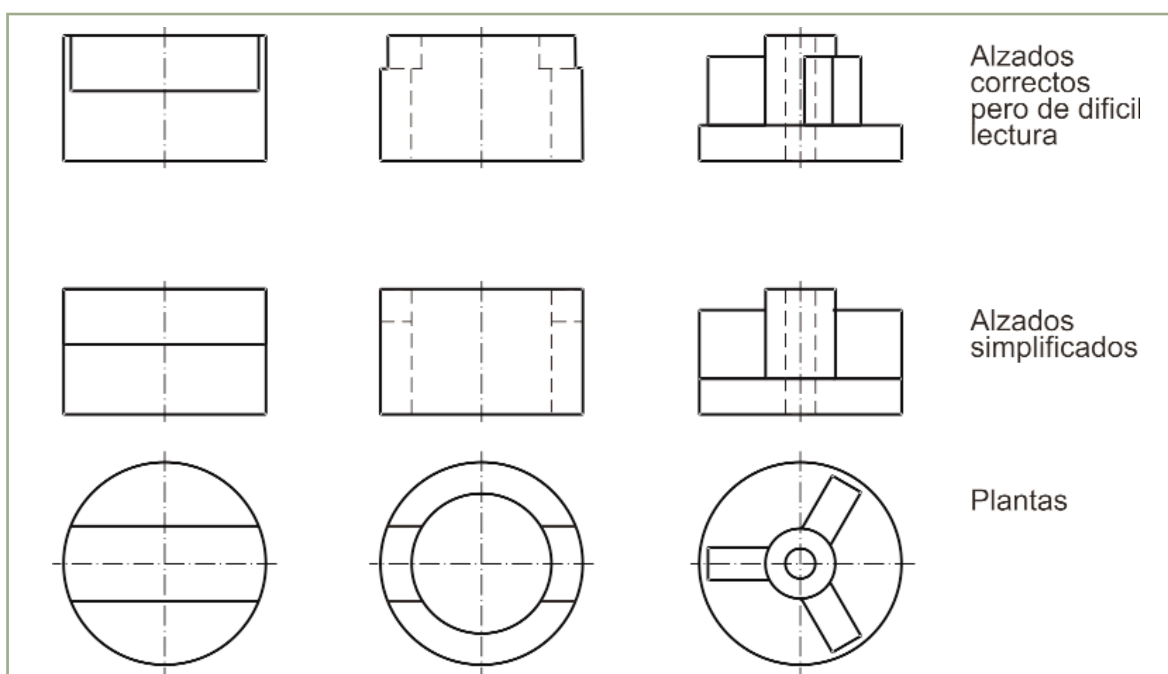


Ilustración 25

En la Ilustración 25 se muestran simplificaciones de las vistas según lo dispuesto sobre la representación de las intersecciones.

En la Ilustración 25 derecha, al dibujar el alzado, se han desplazado al eje de simetría de la pieza los nervios que no coinciden con él, aportando claridad a la vista.

4. Cortes y secciones

4.1. Representación de las partes huecas

En la representación de objetos que tienen partes huecas se utilizan secciones y cortes:

- **Una sección representa la intersección del plano de corte con la materia del objeto.**
- **Un corte representa la sección y la parte del objeto situada detrás del plano secante (con relación a la dirección de observación).**

En la Ilustración 26 se ha representado un objeto en isométrico y diédrico. A la izquierda aparece sin seccionar, por lo que la información de sus partes huecas se obtiene con dificultad de las aristas ocultas. En el centro se ha obtenido la **sección** por un plano de simetría que informa de las dimensiones de las partes huecas y macizas en contacto con dicho plano.

En la parte derecha se gira la planta y se sustituye por un **corte** el alzado correspondiente, informando con mayor precisión sobre la forma del objeto.

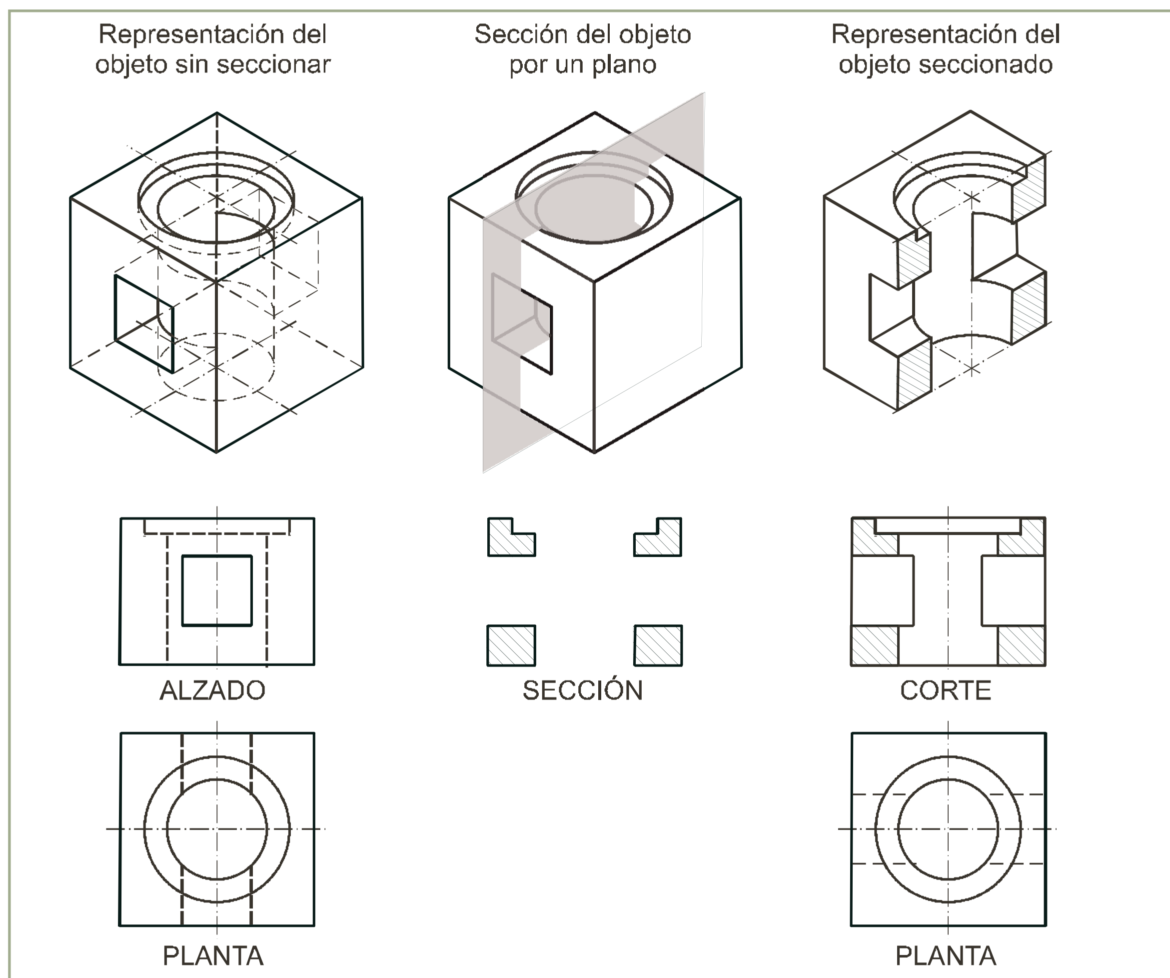


Ilustración 26

4.2. Especificaciones sobre el rayado de las superficies cortadas

Las superficies cortadas se rayan mediante líneas llenas de trazo fino, espaciadas teniendo en cuenta el tamaño de la superficie a rayar y como mínimo 0,7 mm. Deben seguirse las especificaciones de la Ilustración 27.

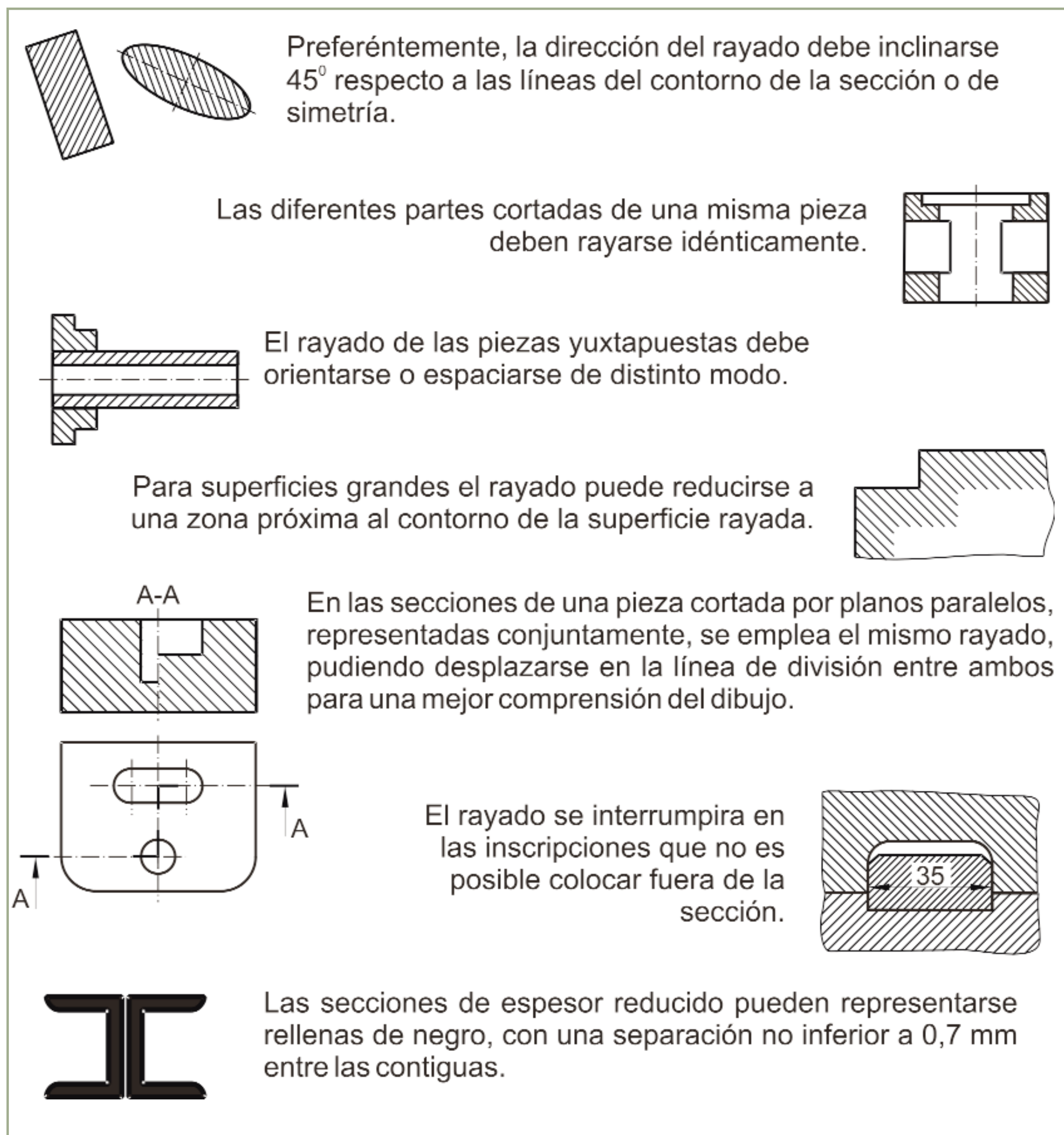


Ilustración 27

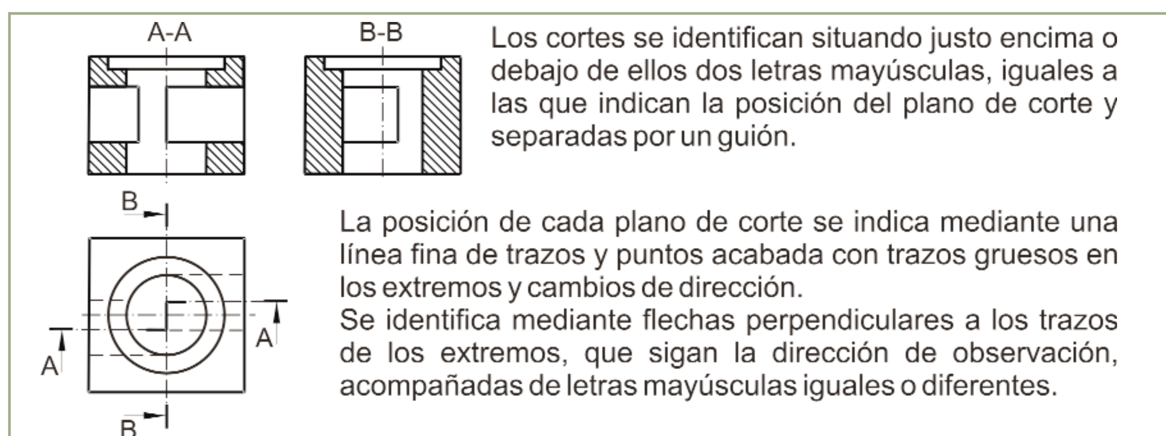


Ilustración 28

4.3. Posiciones relativas de los cortes

Los cortes se disponen de acuerdo con los mismos métodos y especificaciones que las vistas, con las particularidades indicadas en las Ilustraciones 28 y 29.

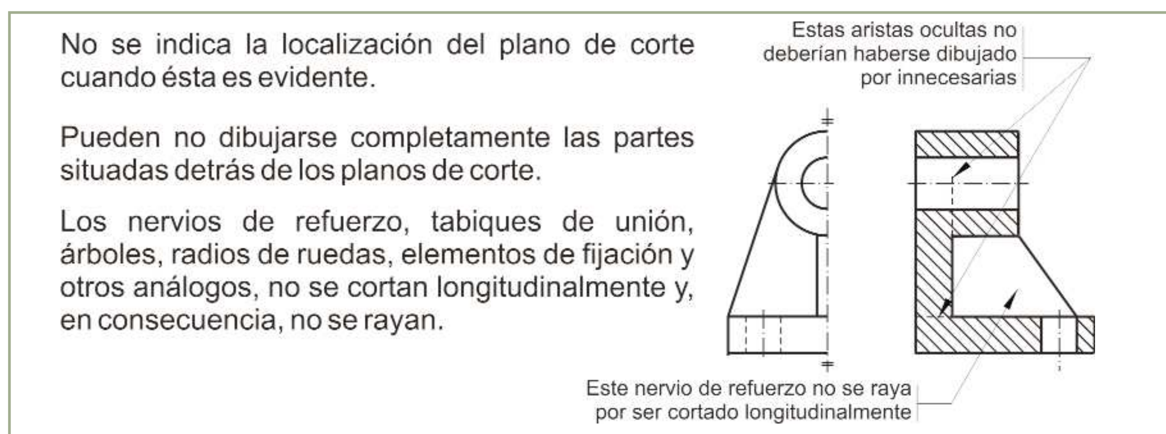


Ilustración 29

4.4. Corte por un plano, por planos paralelos y por planos sucesivos

En la Ilustración 30 se muestran ejemplos de tres tipos de planos de corte, elegidos de acuerdo con las características de la pieza.

Al dibujar el corte por dos planos paralelos, se han girado los agujeros hasta situarlos en el plano de corte para poder representarlos en sección. Estos y otros detalles de las piezas de revolución, cuando están regularmente repartidos y el corte es longitudinal, pueden llevarse por rotación al plano de corte. No es preciso indicar nada, pero es imprescindible que no se produzca ambigüedad en la representación.

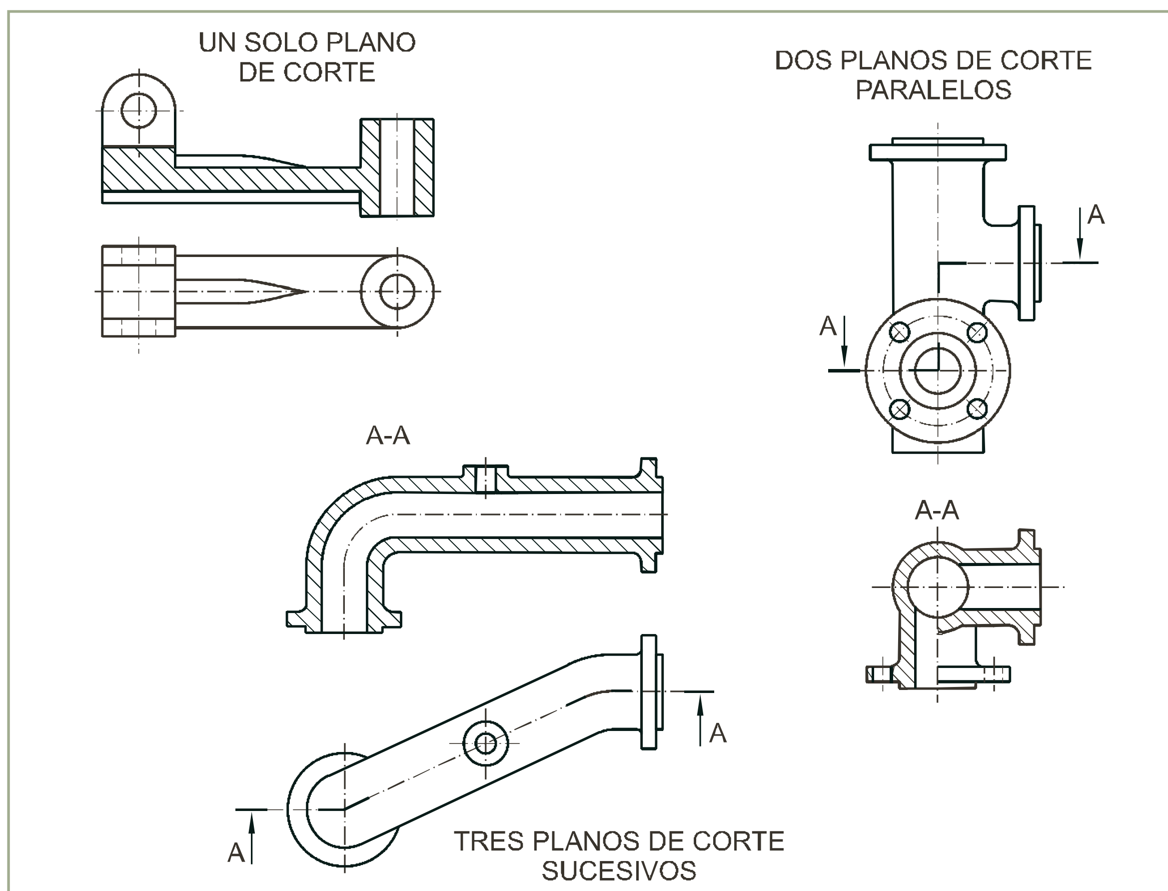


Ilustración 30

4.5. Corte por planos concurrentes

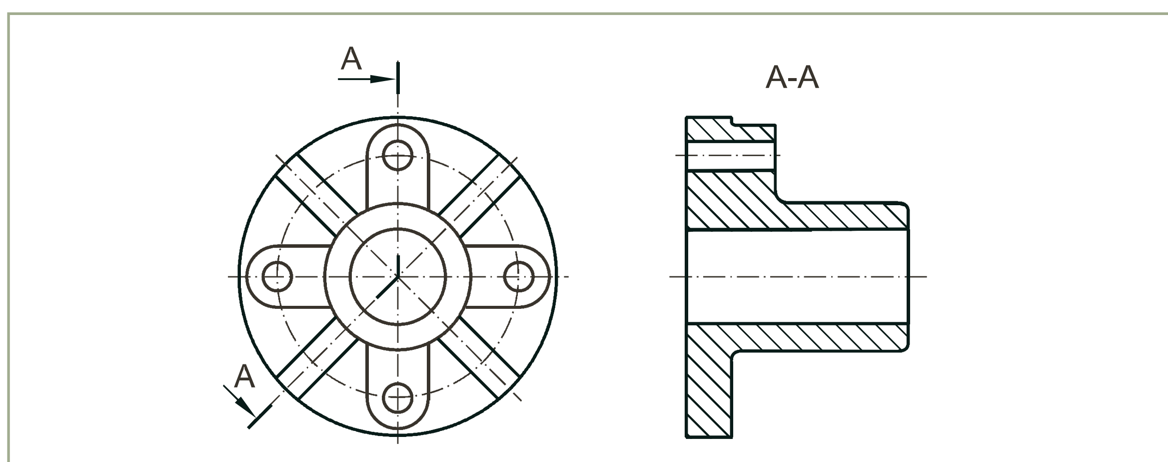


Ilustración 31

Cuando las piezas tienen partes que forman entre sí ángulos distintos de 90º, se eligen planos de corte concurrentes siguiendo sus direcciones y se gira uno de ellos alrededor de la recta intersección de ambos hasta que coincida con el que está situado paralelo a la dirección de proyección. A continuación se dibuja el corte [Ilustración 31].

4.6. Medio corte y corte local

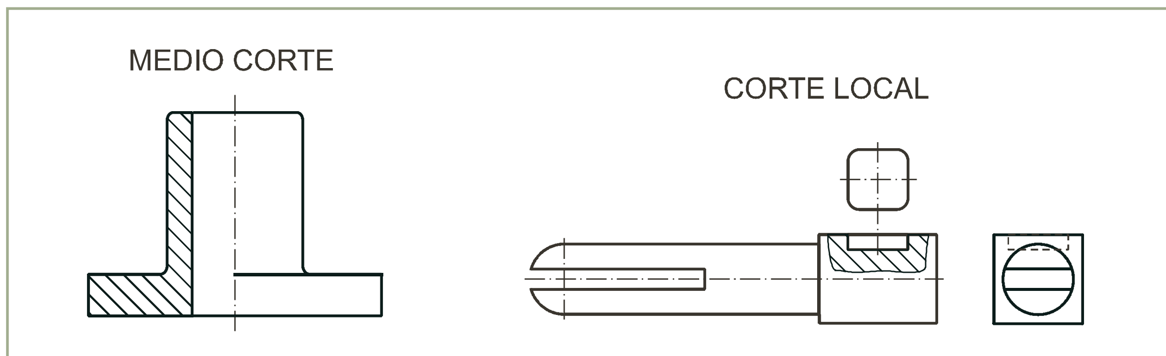


Ilustración 32

Las piezas simétricas pueden representarse por una media vista y un medio corte [Ilustración 32 izquierda].

Cuando se desea mostrar sólo un detalle de una pieza y no es necesario el corte completo puede utilizarse un corte local [Ilustración 32 derecha]. La zona cortada se limitará mediante una línea llena fina a mano alzada, o rectas con zig-zag.

4.7. Secciones abatidas

Las secciones transversales se utilizan para dar a conocer la forma y dimensiones de elementos de carácter lineal, especialmente cuando su sección es variable. Pueden abatirse sobre el plano del dibujo con o sin desplazamiento, siguiendo las especificaciones de la Ilustración 33.

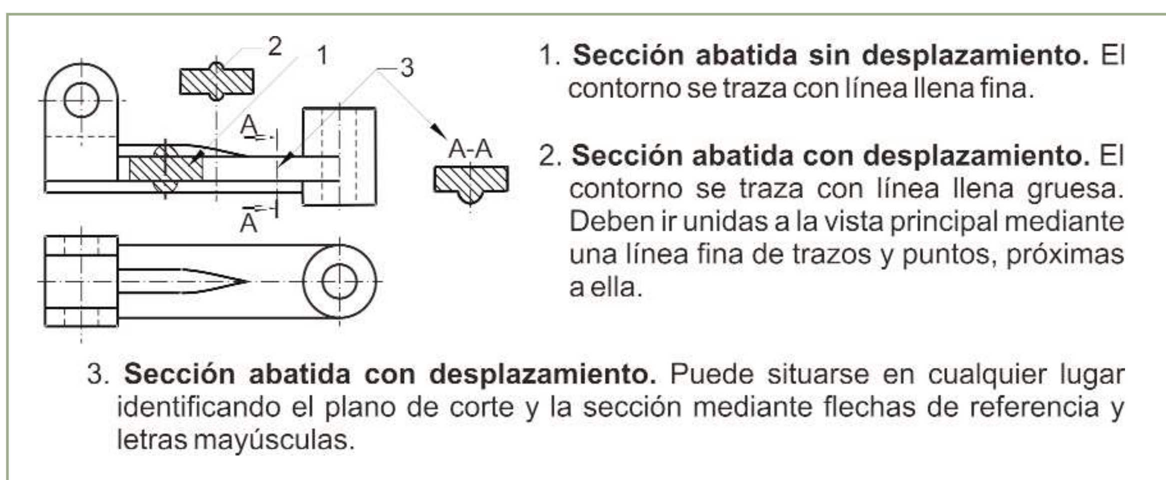


Ilustración 33



Recuerda

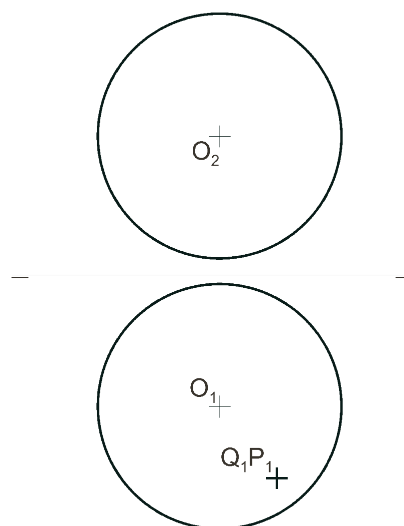
- La sección de la superficie esférica por un plano es una circunferencia. Dos diámetros perpendiculares de ella, de los cuales uno es paralelo al plano horizontal, se proyectan como principales o conjugados de las elipses proyección.
- Para hallar la intersección de la esfera con una recta se halla su sección por un plano proyectante que contenga a la recta.
- Además de por los métodos del primer y tercer diedros, las vistas se pueden disponer libremente, identificándolas mediante flechas de referencia y letras mayúsculas.
- Se llaman vistas particulares a las que se dibujan según una dirección de observación que no sea perpendicular o paralela a la de la vista principal.
- Puede sustituirse una vista completa por una vista parcial cuando el resto de la vista no sea necesario para la comprensión del dibujo.
- Los elementos simétricos pueden definirse mediante una vista local.
- En la representación de objetos que tienen partes huecas se utilizan secciones y cortes.
- Una sección representa la intersección del plano de corte con la materia del objeto.
- Un corte representa la sección y la parte del objeto situada detrás del plano secante (con relación a la dirección de observación).
- Las piezas simétricas pueden representarse por una media vista y un medio corte.

Puedes acceder pulsando aquí al recurso interactivo *Normalización*, de José Antonio Cuadrado Vicente.

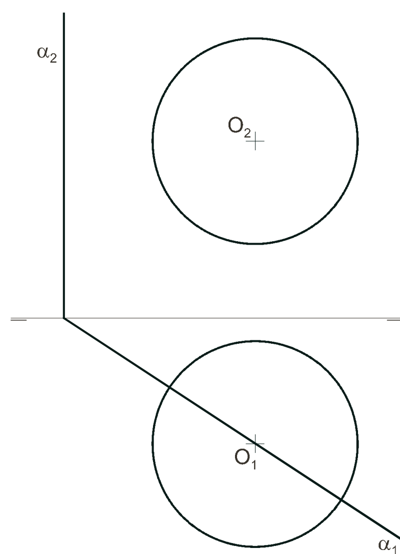


Actividades

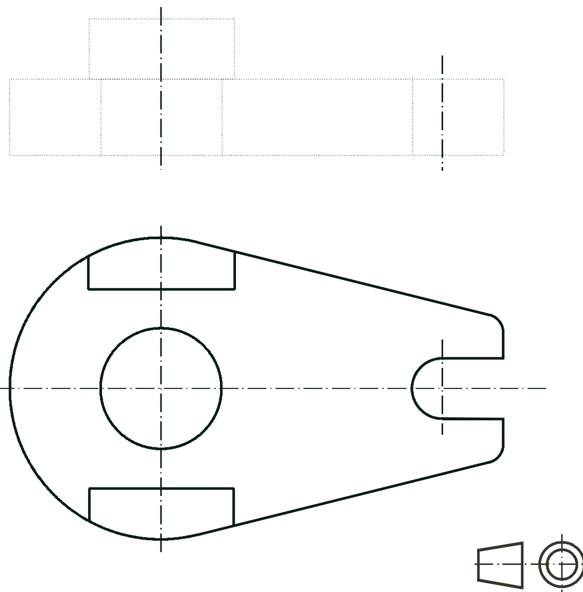
1. Obtener la segunda proyección de los puntos *P*, *Q* de la superficie esférica representada por sus proyecciones.



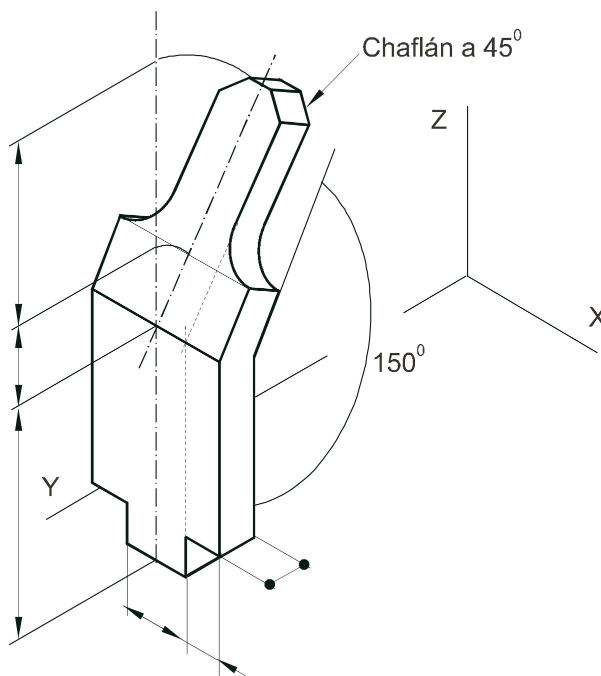
2. Hallar la sección de la esfera representada por el plano α que pasa por su centro.



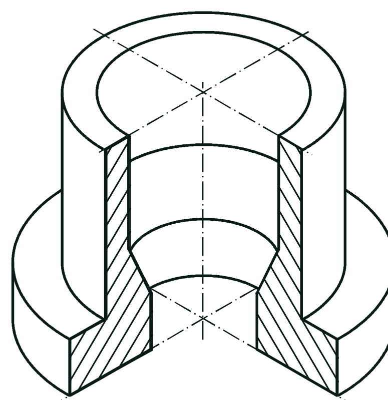
3. Se ha dibujado la planta de un objeto y se ha sugerido su alzado mediante líneas de puntos. Sustituirlo por un corte de modo que el objeto quede correctamente representado.



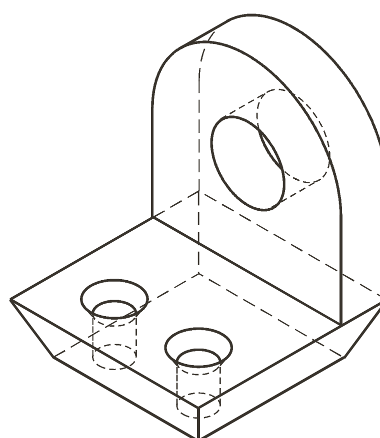
4. Conocida la perspectiva isométrica de una pieza, representarla mediante el mínimo número de vistas necesarias para su correcta definición. Las longitudes de la parte oblicua a los ejes axonométricos se han girado hasta situarlas paralelas al eje vertical. El resto de medidas necesarias se indica sobre la perspectiva, debe obtenerse su verdadera magnitud.



5. Conocida la perspectiva isométrica de una pieza, representarla mediante el mínimo número de vistas, secciones, cortes y cotas necesarias para su correcta definición.



6. Conocida la perspectiva isométrica de una pieza, representarla mediante el mínimo número de vistas, secciones y cortes necesarios para su correcta definición. No acotarla.



9 Sistema axonométrico

El sistema axonométrico se divide en ortogonal y oblicuo según sea la dirección de proyección. La axonometría ortogonal puede ser isométrica, dimétrica o trimétrica según que los coeficientes de reducción de los ejes sean iguales, sólo dos iguales o los tres diferentes.

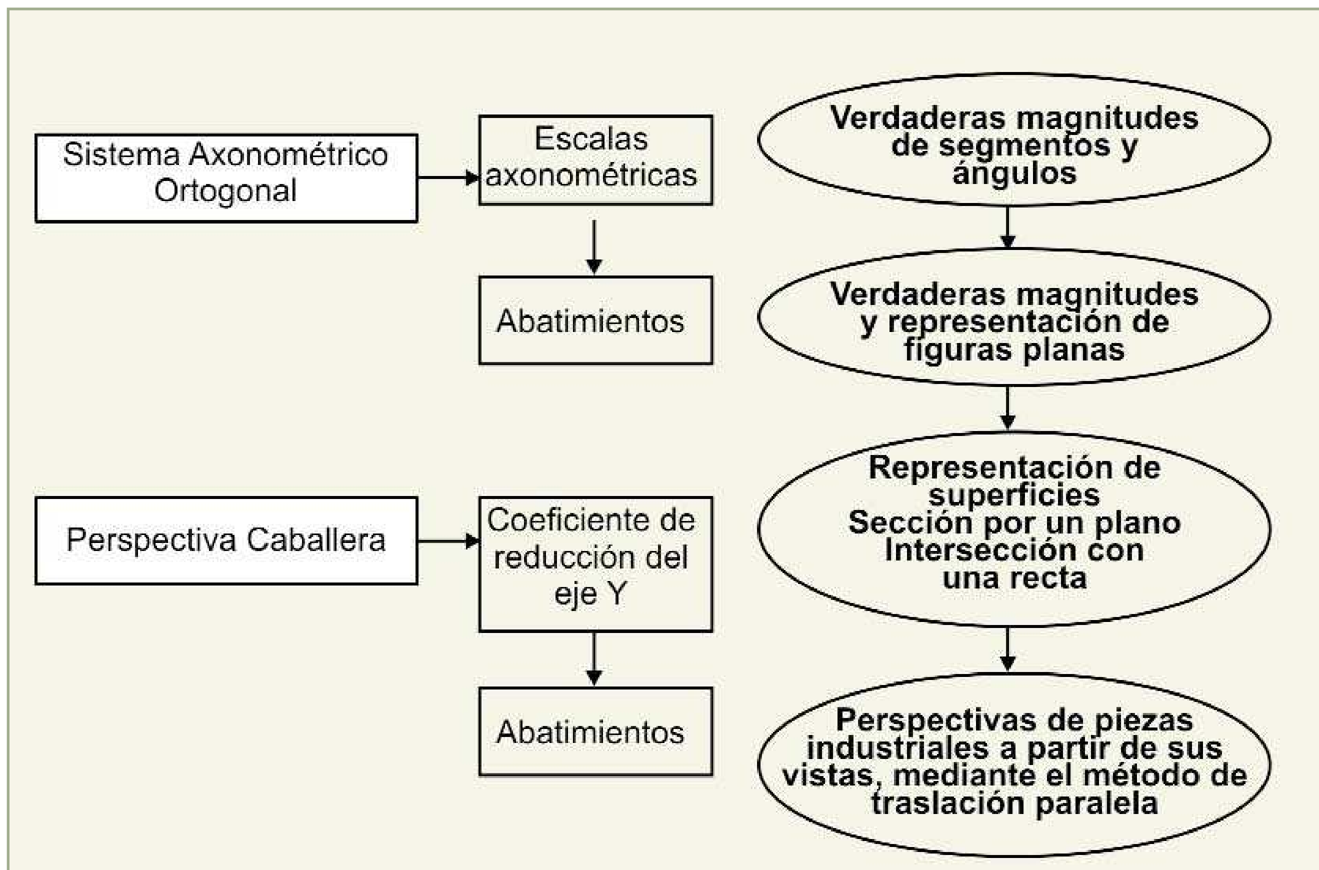
Estudiado en el libro de Primero el sistema isométrico, en el que fue posible prescindir de las reducciones al mantenerse la proporción entre las partes, corresponde ahora ocuparse del trimétrico, en el cual es preciso considerarlas. Todo lo expuesto en isométrico referente al alfabeto del punto, la recta y el plano, intersección, paralelismo, tiene igual validez en trimétrico. Para representar u obtener las verdaderas magnitudes de figuras planas y superficies se utiliza el abatimiento.

El tercer apartado presenta las mismas construcciones del trimétrico en perspectiva caballera.

- *Representación axonométrica (ISFTIC. Banco de imágenes).*

Con el estudio de esta Unidad nos proponemos alcanzar los siguientes **objetivos**:

1. Utilizar procedimientos gráficos de obtención de reducciones y verdaderas magnitudes de medidas paralelas a los ejes en axonometría ortogonal y oblicua.
2. Representar y obtener verdaderas magnitudes de figuras planas y superficies utilizando el abatimiento de ejes y planos coordenados en axonometría ortogonal y oblicua.
3. Obtener la sección de superficies poliédricas y de revolución por planos y su intersección con rectas en axonometría ortogonal y oblicua.



ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. Sistema axonométrico ortogonal

1.1. Escalas axonométricas

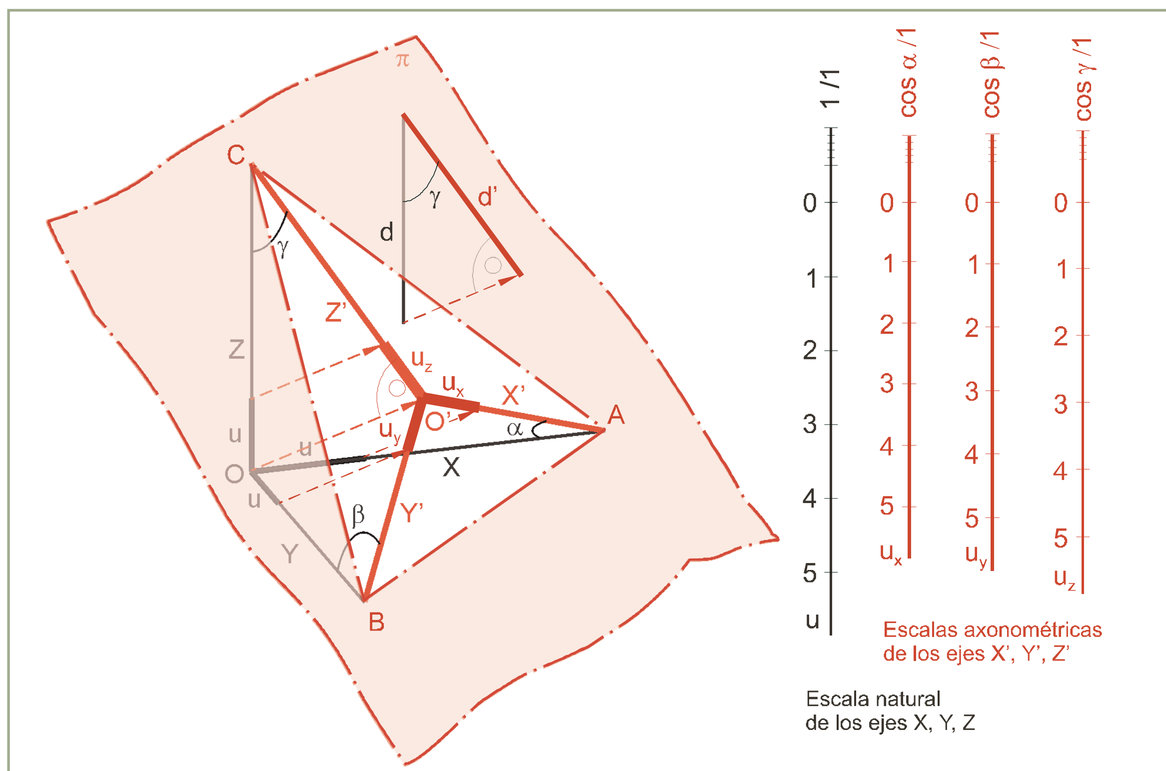


Ilustración 1

El sistema axonométrico **trimétrico** utiliza como sistema de referencia un triedro trirrectángulo formado por tres ejes coordenados *X, Y, Z* que forman ángulos distintos α, β, γ, respectivamente, con el plano del cuadro [Ilustración 1]. La proyección en el plano del cuadro de los ejes coordenados son los ejes axonométricos *X', Y', Z'* y se llama triángulo de las trazas *ABC* a la intersección del triedro de referencia con dicho plano.

La reducción que sufre el segmento unidad $\overline{u}$ del eje *Z* al proyectarlo sobre el plano del cuadro es $\overline{u_z} = \overline{u} \times cos\gamma$, de donde $cos\gamma = \overline{u_z}/\overline{u}$. El número $c_z = cos\gamma$, llamado coeficiente de reducción del eje *Z*, multiplicado por la medida *d* de un segmento paralelo a él, da la de su proyección *d'* sobre el plano del cuadro.

Los coeficientes de reducción de los otros dos ejes *X, Y* son respectivamente $c_x = cos\alpha$, $c_y = cos\beta$.

El segmento $\overline{u_z}$ se llama escala axonométrica del eje Z' y de las rectas axonométricas paralelas a él. Es la unidad de la escala gráfica axonométrica $cos\gamma/1$ que se utiliza para llevar sobre las rectas paralelas al eje *Z'* las medidas tomadas sobre el objeto con la escala natural *1:1*, según la dirección del eje *Z*.

Los segmentos $\overline{u}_x$, $\overline{u}_y$ son las **escalas axonométricas** de los ejes *X’, Y’* que se utilizan como unidades de las escalas gráficas $^{cos\beta}/_1$, $^{cos\alpha}/_1$, que sirven para llevar las medidas reducidas sobre dichos ejes.

1.2. Abatimiento de los ejes coordenados

El abatimiento de los ejes coordenados *X, Y, Z* sobre el plano del cuadro, mediante el giro de sus planos proyectantes *XX’, YY’, ZZ’* alrededor de los ejes axonométricos *X’, Y’, Z’* permite obtener los ángulos que los ejes coordenados forman con él y las escalas axonométricas.

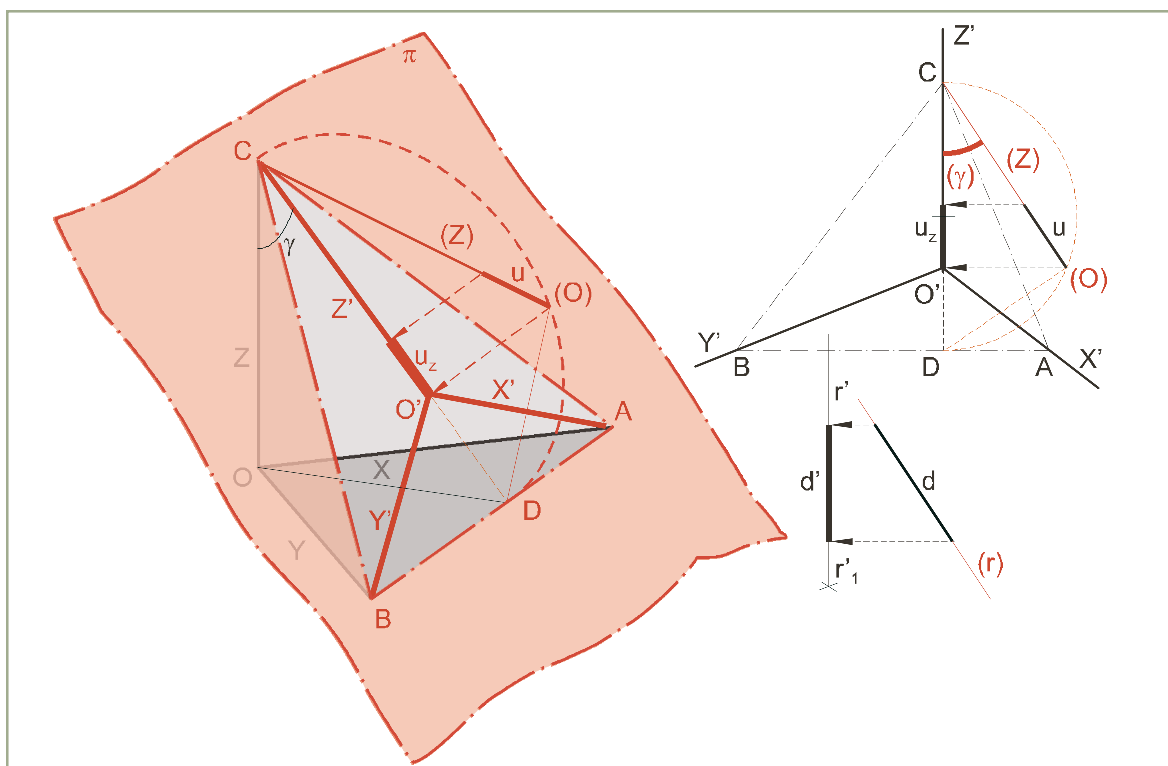


Ilustración 2

Sean *X’, Y’, Z’* unos ejes axonométricos y *O’* la proyección del centro de coordenadas [Ilustración 2].

Se traza un triángulo de las trazas cualquiera cuyos lados *AB, BC, CA* deben ser perpendiculares a los ejes axonométricos *Z’, X’, Y’*, respectivamente.

Para abatir el eje *Z* se construye en su posición abatida *D(O)C*, el ángulo recto *DOC*, formado por el eje *Z* y la recta *OD* del plano *XY*, siendo *D* el punto de corte del lado *AB* con *Z´*. La dirección de abatimiento de *O* es la perpendicular a la charnela *Z’* trazada por *O’* que corta al arco capaz de 90º sobre *CD* en *(O)*. Como *C* es un punto de la charnela *(Z)* = *C(O)*.

El abatimiento del eje *Z* permite obtener el ángulo γ = *O’C(O)* y la escala axonométrica u_z, trazando direcciones de abatimiento desde los extremos de la unidad *u*, situada en *(Z)*.

Sin necesidad de construir la escala gráfica axonométrica del eje *Z'*, puede llevarse sobre la proyección axonométrica *r'*, de una recta *r*, paralela al eje *Z*, una distancia *d*. Basta trazar una paralela *(r)* a *(Z)*, llevar sobre ella dicha distancia *d* y trazar por sus extremos dos rectas paralelas a la dirección de abatimiento, que interceptan sobre *r'* la distancia reducida *d'*.

Todo lo dicho para el eje *Z* es aplicable a los ejes *X, Y*.

1.3. Abatimiento de los planos coordenados

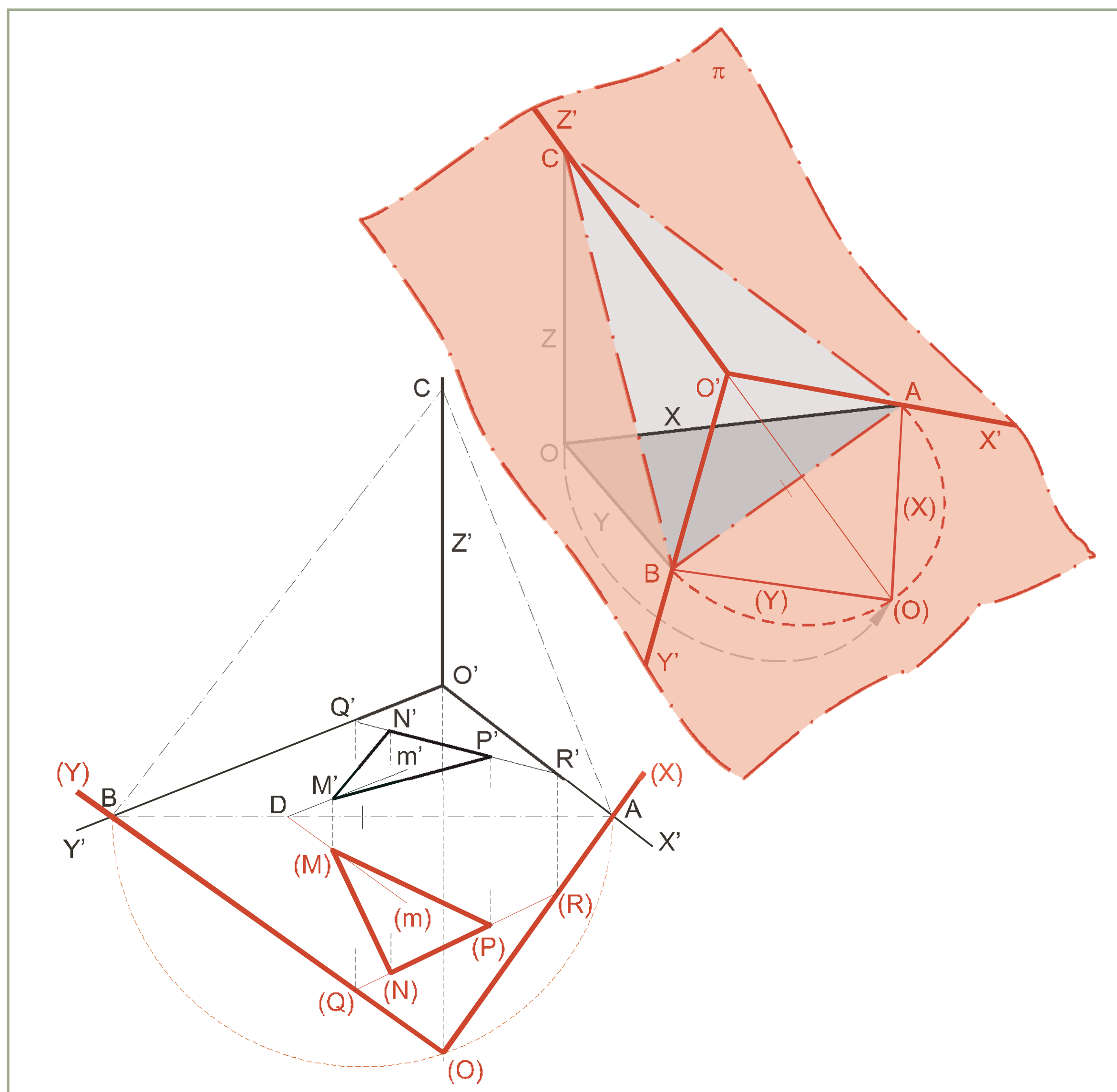


Ilustración 3

El abatimiento de los planos coordenados *XY, YZ, ZX* sobre el plano del cuadro, alrededor de los lados *AB, BC, CA* del triángulo de las trazas, permite obtener las verdaderas magnitudes de las figuras planas situadas en ellos.

Sean *X', Y', Z'* unos ejes axonométricos, *O'* la proyección del centro de coordenadas y *M'N'P'* la perspectiva axonométrica de un triángulo contenido en el plano *XY* cuya verdadera magnitud se desea conocer [Ilustración 3].

Se traza un triángulo de las trazas cualquiera cuyos lados *AB, BC, CA* deben ser perpendiculares a los ejes axonométricos *Z', X', Y'*, respectivamente.

Para abatir los ejes *X, Y,* que definen el plano *XY* se construye, en su posición abatida *A(O)B*, el ángulo recto *AO'B*, formado por los ejes axonométricos *X', Y'*. La dirección de abatimiento de *O* es la perpendicular a la charnela *AB* trazada por *O'*, que corta al arco capaz de 90º sobre *AB* en *(O)*. Como *A, B* son puntos de la charnela (*X*) ≡ *A*(*O*) e (*Y*) ≡ *B*(*O*).

Entre los puntos *M´, Q´, ...* que son proyección directa de puntos *M, N, ...* contenidos en el plano coordenado *XY* y sus abatidos *(M), (Q), ...* sobre el cuadro existe una **afinidad ortogonal** definida por el eje de afinidad *AB* (charnela del abatimiento) y el par de puntos homólogos *O'*, *(O)*. En ella los ejes abatidos *(X), (Y)* son afines de los axonométricos *X', Y'*.

Se obtiene *(P)* en el punto de corte de su dirección de afinidad (perpendicular al eje *AB* por *M'*) con la paralela *(m)* a *(Y)* trazada por el punto doble *D* en que su afín, la paralela *m'* a *Y'* por *M'*, corta al eje de afinidad *AB*.

Se obtienen *(P)*, *(N)* en los puntos de corte de sus direcciones de afinidad con la recta *(Q)(R)*, siendo *(Q), (R)* afines de los puntos *Q', R'*, en que la recta *P'N'* corta a los ejes *Y', X'* respectivamente.

Para abatir figuras contenidas en los planos *YZ, ZX* se procede de manera análoga.

1.4. Verdadera magnitud de un segmento

Sea $\overline{M'N'}$ la perspectiva axonométrica de un segmento $\overline{d}$ y $\overline{M'_1N'_1}$ su proyección horizontal [Ilustración 4].

La verdadera magnitud del segmento *d* es la hipotenusa del triángulo rectángulo *MNP*, cuyos catetos *MP* y *PN* tienen longitudes respectivamente iguales a la de su proyección horizontal $\overline{M'_1N'_1}$ y a la diferencia de cota *c* de sus extremos *N*, *M*.

Se obtiene la longitud de $\overline{M'_1N'_1}$ abatiendo el plano *XY*. Para ello, se traza un triángulo de las trazas cualquiera cuyos lados *AB, BC, CA* deben ser perpendiculares a los ejes axonométricos *Z', X', Y'*, respectivamente.

La dirección de abatimiento de *O* es la perpendicular a la charnela *AB* trazada por *O'*, que corta al arco capaz de 90º sobre *AB* en *(O)*, siendo (*X*) ≡ *A*(*O*) e (*Y*) ≡ *B*(*O*).

Se obtienen (M_1), (N_1) en los puntos de corte de sus direcciones de afinidad con la recta *(Q)D*, siendo *(Q)* afín de *Q'*, y *D* el punto doble en que la recta $M'_1N'_1$ corta al eje de afinidad *AB*.

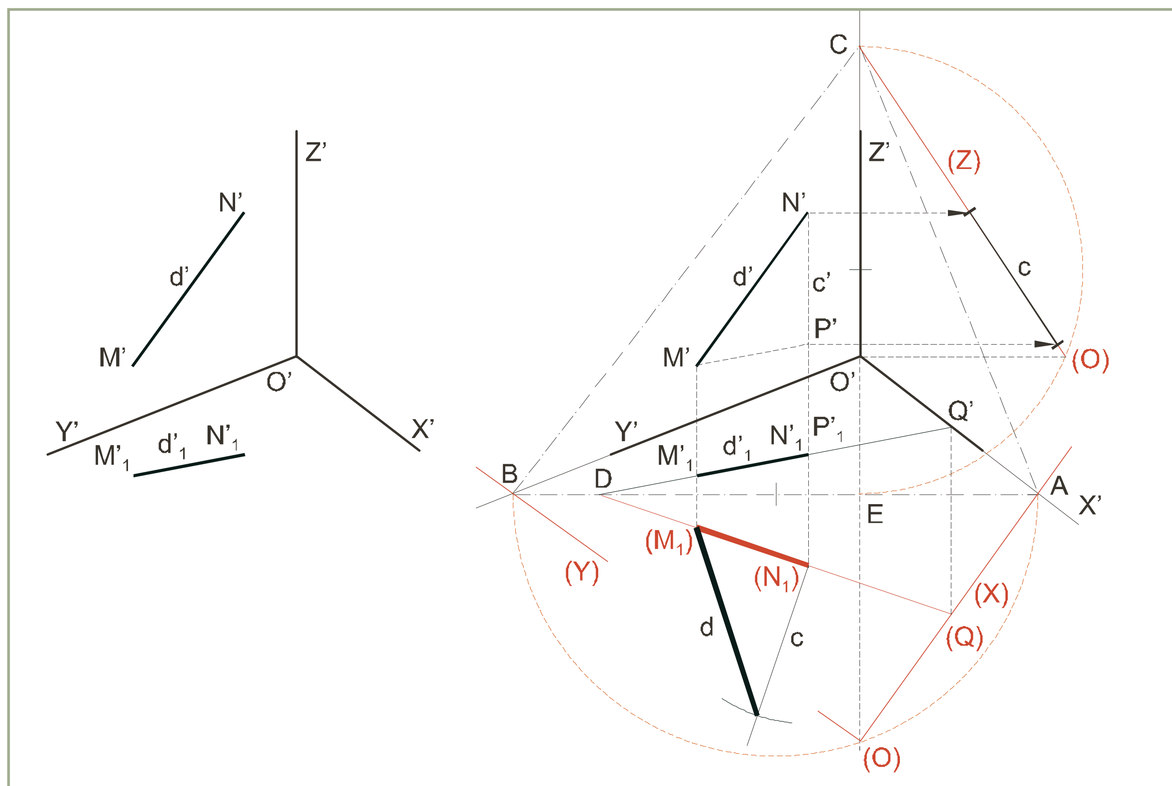


Ilustración 4

Se obtiene la diferencia de cota entre *N* y *M* abatiendo el eje *Z*. La dirección de abatimiento de *O* es la perpendicular a la charnela *Z'* trazada por *O'* que corta al arco capaz de 90º sobre *CE* en *(O)*, siendo (*Z*) ≡ *C*(*O*). Las paralelas trazadas por *P'* y *N'* a la dirección de abatimiento determinan la diferencia de cota *c*, sobre *(Z)*. Llevando *c* perpendicular a $\overline{(M_1)(N_1)}$ por (N_1) se obtiene *d* como hipotenusa de un triángulo rectángulo igual al *MNP*.

1.5. Verdadera magnitud de ángulos situados en planos paralelos a los coordenados

Sean *a'*, *b'* las perspectivas axonométricas de dos rectas situadas en un plano paralelo al plano *YZ* y a'_3, b'_3 sus proyecciones verticales segundas [Ilustración 5].

Por ser paralelas al plano horizontal el ángulo que forman las rectas *a*, *b* coincide con el definido por sus proyecciones verticales segundas a'_3, b'_3.

La verdadera magnitud del ángulo α, que forman a'_3, b'_3 se obtiene abatiendo el plano *YZ*. Para ello, se traza un triángulo de las trazas cualquiera *ABC*. La dirección de abatimiento de *O* es la perpendicular a la charnela *BC* trazada por *O'*, que corta al arco capaz de 90º sobre *BC* en *(O)*, siendo (*Z*) ≡ *C*(*O*) e (*Y*) ≡ *B*(*O*).

La recta b'_3 corta a la charnela *BC* en el punto doble M'_3 y al eje *Y'* en N'_3, cuyo afín (N_3) es el punto de corte de su dirección de abatimiento con (Y). Uniendo M'_3 con (N_3) se obtiene (b_3) que contiene a (V_3), obtenida mediante la dirección de abatimiento del punto de corte V'_3 de las rectas a'_3, b'_3.

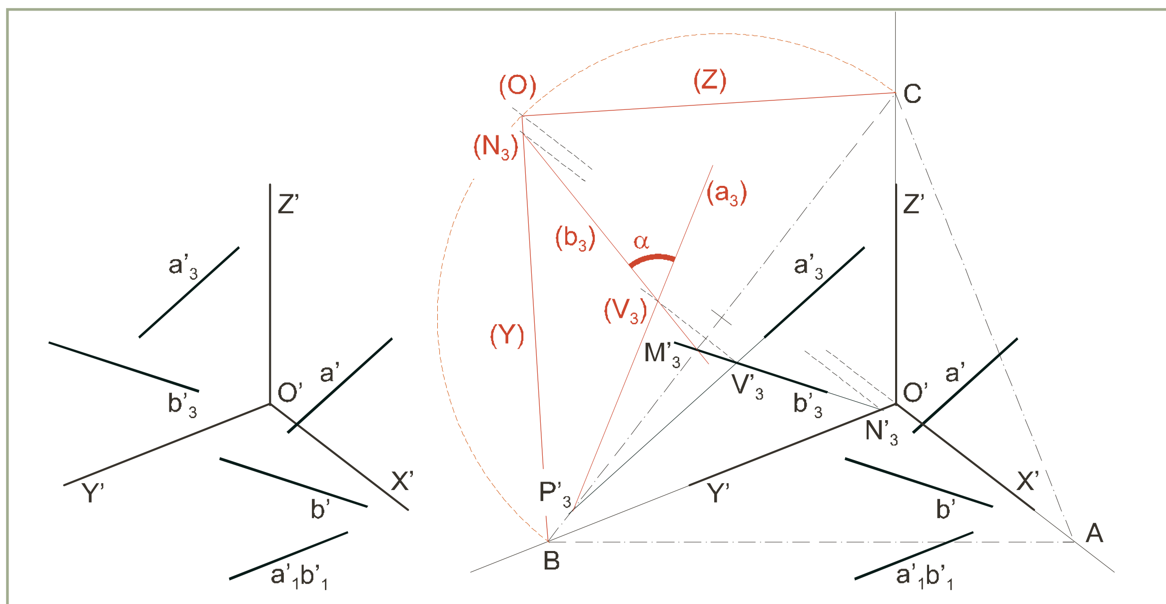


Ilustración 5

Pasando por *(V_3)* y por el punto doble *P'_3* de la recta *a'_3* se obtiene *(a_3)*, que forma el ángulo α buscado con *(b_3)*.

1.6. Representación de polígonos situados en los planos coordenados mediante abatimiento y traslación paralela

El abatimiento de un plano coordenado, efectuado de modo que las figuras contenidas en él mantengan su orientación, y su traslación paralela a la dirección de afinidad, facilitan la representación axonométrica de dichas figuras.

Sea *l* el lado de un pentágono regular y *X', Y', Z'* unos ejes axonométricos [Ilustración 6].

Para dibujar la perspectiva axonométrica del pentágono regular, que coincide con su proyección horizontal por estar contenido en el plano *XY*, se abate éste. Para ello, se traza un triángulo de las trazas cualquiera *ABC*. La dirección de abatimiento de *O* es el eje *Z'*, que corta al arco capaz de 90º sobre *AB* en *(O)*. Como *A, B* son puntos de la charnela (*X*) ≡ *A*(*O*) e (*Y*) ≡ *B*(*O*).

Se trasladan los ejes abatidos paralelamente a *Z'* hasta transformarlos en *$(X)_d$* e *$(Y)_d$*. Se dibuja, a partir del lado *l* contenido en *$(X)_d$*, el pentágono regular y se trazan por sus vértices las paralelas *$(m)_d$*, *$(n)_d$* a *$(X)_d$* que cortan a *$(Y)_d$* en *$(M)_d$*, *$(N)_d$*. A continuación se trazan paralelas a *Z'* por *$(M)_d$*, *$(N)_d$* que cortan a *Y'* en *M'*, *N'*.

Las rectas *m'*, *n'* trazadas por *M'*, *N'* paralelas a *X'* son proyección directa de m, n y las perspectivas axonométricas *P'*, *Q'*, *R'*, *S'*, *T'* de los vértices contenidos en ellas y en el eje *X*, se obtienen mediante paralelas a *Z'* trazadas desde *$(P)_d$*, *$(Q)_d$*, *$(R)_d$*, *$(S)_d$*, *$(T)_d$*. La proyección horizontal *$P'_1Q'_1R'_1S'_1T'_1$* del pentágono coincide con la directa *P'Q'R'S'T'*.

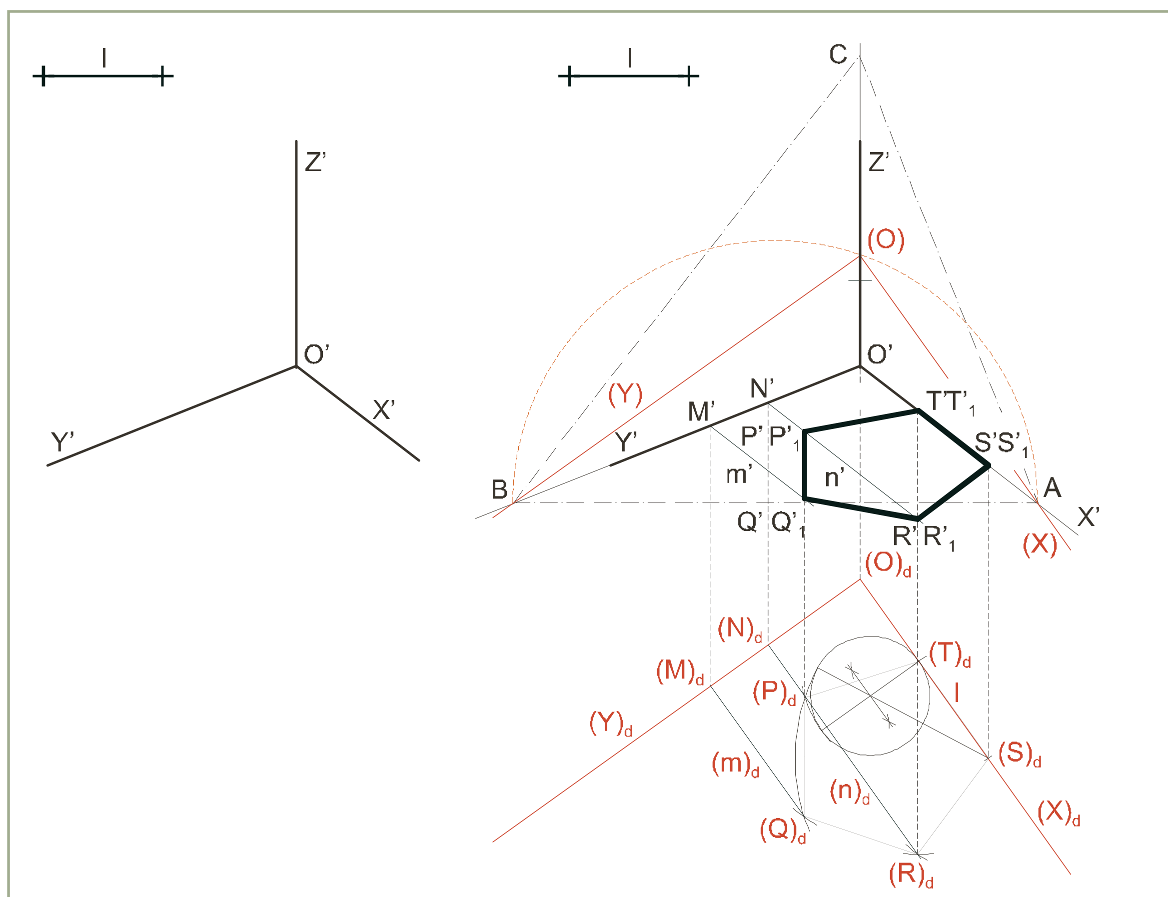


Ilustración 6

1.7. Representación de circunferencias situadas en los planos coordenados

El abatimiento del plano coordenado que contiene una circunferencia facilita la obtención de las medidas de sus diámetros conjugados, si éstos se toman paralelos a dichos ejes.

Sea *r* el radio de una circunferencia y *X', Y', Z'* unos ejes axonométricos [Ilustración 7].

Para dibujar la perspectiva axonométrica de una circunferencia, que coincide con su proyección vertical segunda por estar contenida en el plano *YZ*, se abate éste. Para ello, se traza un triángulo de las trazas cualquiera *ABC*. La dirección de abatimiento de *O* es el eje *X'*, que corta al arco capaz de 90º sobre *BC* en *(O)*. Como *B, C* son puntos de la charnela (*Y*) ≡ *B*(*O*) y (*Z*) ≡ *C*(*O*) .

Elegido el centro *B* en el plano *YZ* se traza su dirección de abatimiento, que corta a los ejes *(Y)*, *(Z)* en los puntos *T*, *S*. Se llevan sobre *(Y)*, *(Z)* a ambos lados de los puntos *T*, *S* el radio *r* obteniéndose las medidas de dos diámetros reales y perpendiculares de la circunferencia. Las direcciones de abatimiento de sus extremos determinan sobre las paralelas por *B'* a los

ejes axonométricos *Y’*, *Z’* dos diámetros conjugados de la elipse, que es a la vez perspectiva axonométrica y proyección vertical segunda de la circunferencia representada. Se construye por haces proyectivos dividiendo los semidiámetros en dos partes.

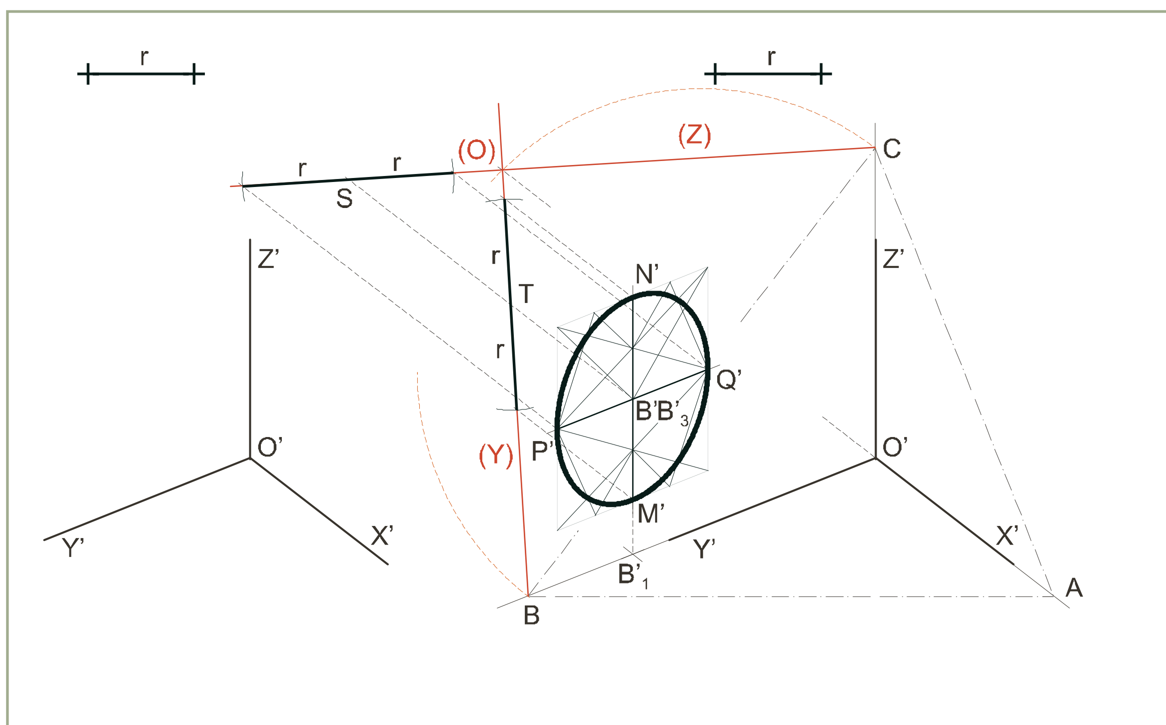


Ilustración 7

Ejercicio de selectividad UNED resuelto
Pulsa aquí para ver la animación

2. Representación de sólidos en el sistema axonométrico ortogonal

2.1. Representación del tronco de pirámide mediante el método de planta y altura

El abatimiento y traslación paralela del plano XY facilita la representación de la proyección axonométrica horizontal de un objeto. El abatimiento del eje Z permite obtener las medidas de las alturas, necesarias para la obtención de su perspectiva axonométrica.

Sea un tronco de pirámide representado en diédrico [Ilustración 8].

Sobre la representación diédrica se dibuja el triedro de referencia del sistema axonométrico, de modo que el alzado se convierta en la proyección vertical segunda o tercera. Elegida en este caso la segunda deben dibujarse las proyecciones de los ejes *Y*, *Z* a la izquierda de la planta y el alzado. El eje *X* es la *L. T.*.

Se traza un triángulo de las trazas *ABC* para decidir la posición del plano del cuadro π. Sus trazas $\pi_1 = \overline{A_1B_1}$ y $\pi_2 = \overline{A_2B_2}$ se eligen libremente y definen la dirección de observación *d*, cuyas proyecciones d_1 y d_2 son perpendiculares a ellas. La verdadera magnitud de $\overline{BC}$ es $\overline{C_2(B)}$ que se obtiene abatiendo *B* sobre el plano vertical mediante el arco de centro Y_2 y radio Y_2B_1.

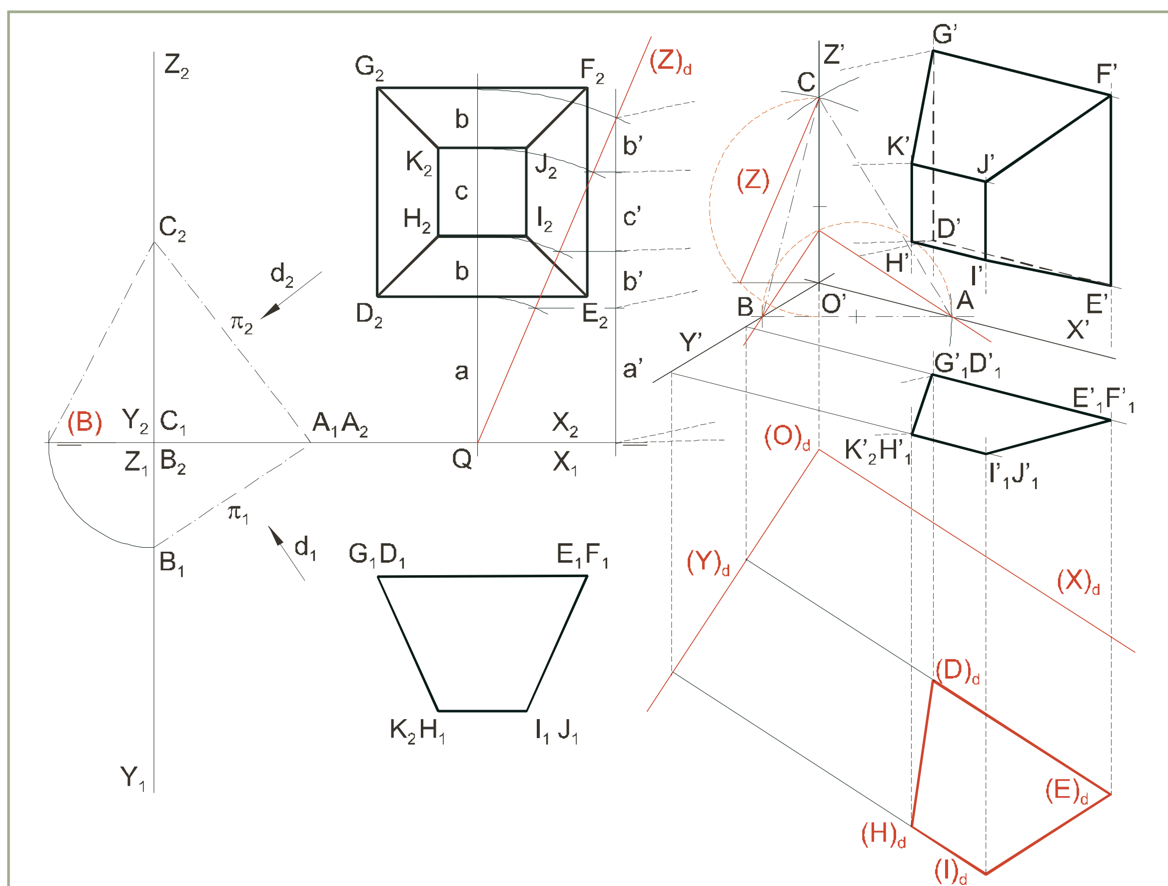


Ilustración 8

Sobre una semirrecta horizontal con origen en *B* se transporta la traza *BA*, a continuación se trazan arcos de centros *A*, *B* y radios A_2C_2, $(B)C_2$ que determinan el tercer vértice *C* del triángulo de las trazas. Sus alturas son los ejes axonométricos *X’, Y’, Z’*.

Se abate y desplaza el plano *XY*, y se dibuja sobre él la planta del tronco de pirámide en la misma posición que tenía respecto a los ejes. Mediante direcciones de abatimiento y paralelas al eje $(X)_d$, que se transforman en paralelas a *X’*, se obtiene la proyección horizontal axonométrica del tronco de pirámide.

Se abate el eje *Z* y se transportan mediante arcos de centro *Q* las alturas *a*, *b*, *c*, medidas en el alzado, sobre una paralela $(Z)_d$ a *(Z)*. A continuación se proyectan sobre una paralela a *Z’*, mediante paralelas a *L. T.*, para obtener *a’*, *b’*, *c’*. Se obtienen las proyecciones directas *H’*, *I’*, *J’*, ... de los vértices del tronco de pirámide transportando la altura correspondiente *a’+b’*, *a’+b’*, *a’+b’+c’*, ... sobre paralelas a *Z’* trazadas desde sus proyecciones horizontales H'_1, I'_1, J'_1, ... Uniendo estos vértices se obtienen las aristas del cuerpo.

2.2. Sección de un tronco de pirámide por un plano paralelo a un eje coordenado

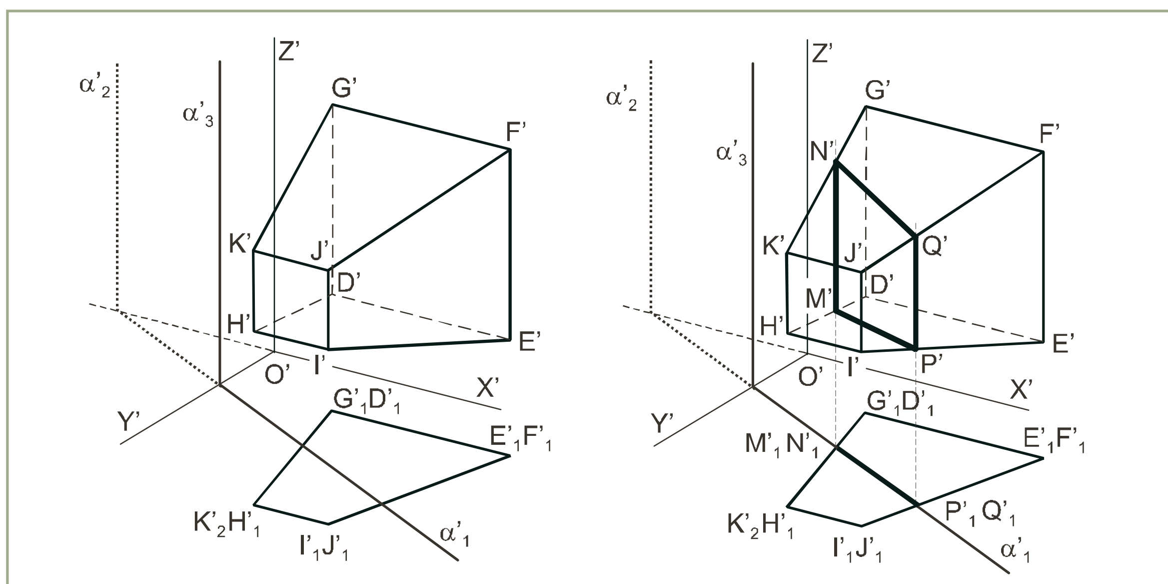


Ilustración 9

Sea un tronco de pirámide y un plano α, paralelo al eje *Z*, representados en axonométrica [Ilustración 9].

Al ser α proyectante en *XY* la proyección horizontal de la sección coincide con α'_1. Paralelas al eje *Z’* trazadas desde M'_1, N'_1, P'_1, Q'_1 cortan a las proyecciones directas de las aristas en los vértices *M’, N’, P’, Q’* de la sección.

2.3. Sección de un tronco de pirámide por un plano oblicuo

Sea un tronco de pirámide y un plano oblicuo α representados en axonométrica [Ilustración 10].

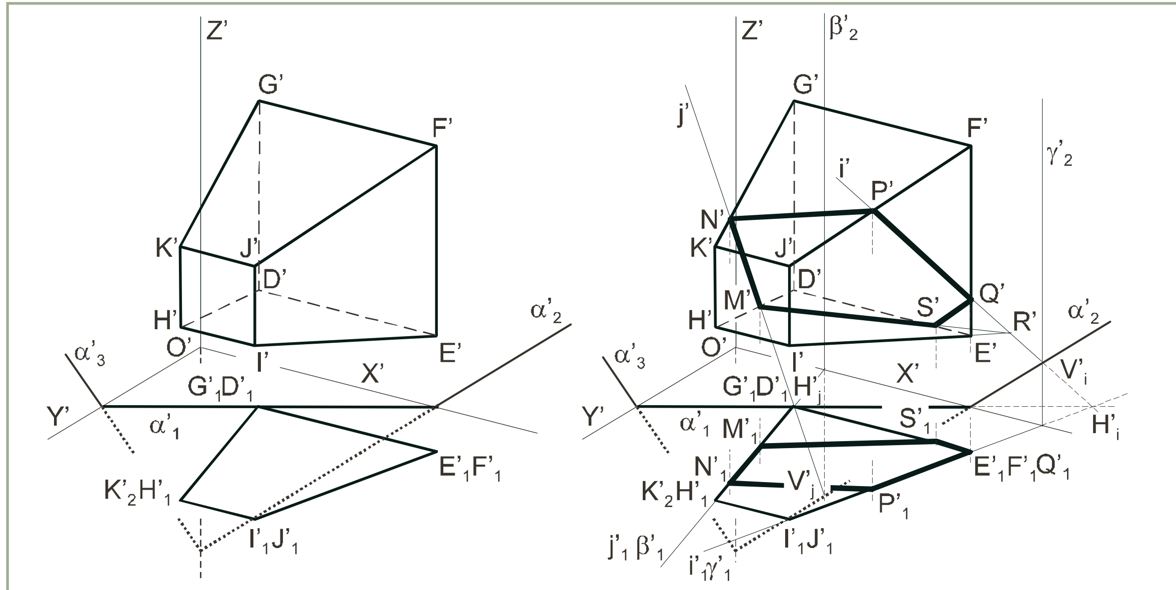


Ilustración 10

Los planos β y γ que contienen las caras *HKGD* y *EFJI* son proyectantes en *XY* por lo que sus trazas horizontales β'_1 y γ'_1 coinciden con las proyecciones horizontales de dichas caras, y las verticales segundas β'_2 y γ'_2 son paralelas a *Z'*. Las intersecciones de β y γ con α determinan la sección en las caras que contienen.

La recta *j* de intersección de β y α está determinada por sus trazas H'_j, V'_j que son los puntos de intersección de β'_1 con α'_1 y de β'_2 con α'_2. Su proyección directa *j'* tiene en común con *H'K'G'D'* la proyección *M'N'* de la arista *MN* del pentágono sección.

Análogamente, la proyección directa *i'* de la intersección de γ y α tiene en común con *E'F'J'I'* la arista *P'Q'*, que corta en *R'* a *I'E'*. Uniendo *M'* con *R'* se obtiene el vértice *S'* en el punto de corte con *D'E'*. La arista *P'N'* completa la proyección directa de la sección. Su proyección horizontal se obtiene mediante líneas de referencia paralelas a *Z'*.

2.4. Intersección de un tronco de pirámide con una recta

Sea un tronco de pirámide y una recta oblicua *r* representados en axonométrica [Ilustración 11].

Se traza un plano α proyectante en el *XY* que contenga a la recta *r*. Su traza horizontal α'_1 coincide con r'_1, y la vertical segunda α'_2 es paralela a *Z'*.

Se halla la sección producida en el tronco de pirámide por el plano α, que al ser proyectante en *XY* tiene su proyección horizontal coincidente con α'_1. Líneas de referencia paralelas al eje *Z'* trazadas desde M'_1, N'_1, P'_1, Q'_1 cortan a las proyecciones directas de las aristas en los vértices *M', N', P', Q'* de la sección.

Los puntos *T'*, *U'* de contacto de la proyección directa de la sección *M'N'P'Q'* con la de la recta *r'* son los de intersección con la superficie del tronco de pirámide. Sus proyecciones horizontales T'_1, U'_1, se obtienen mediante líneas de referencia paralelas a *Z'*.

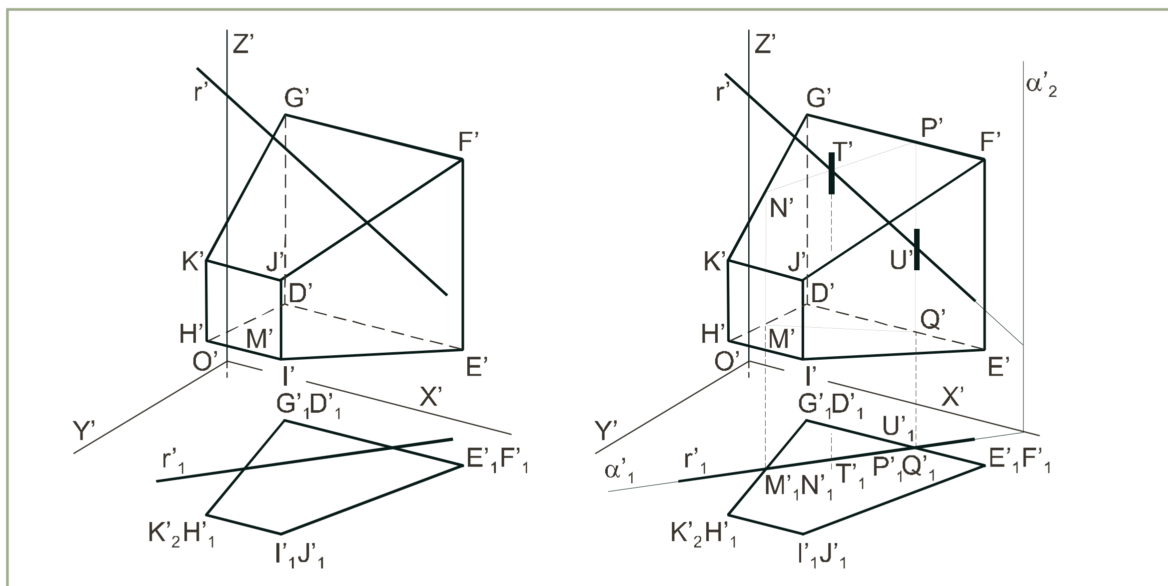


Ilustración 11

2.5. Representación del tronco de cono mediante el método de planta y altura

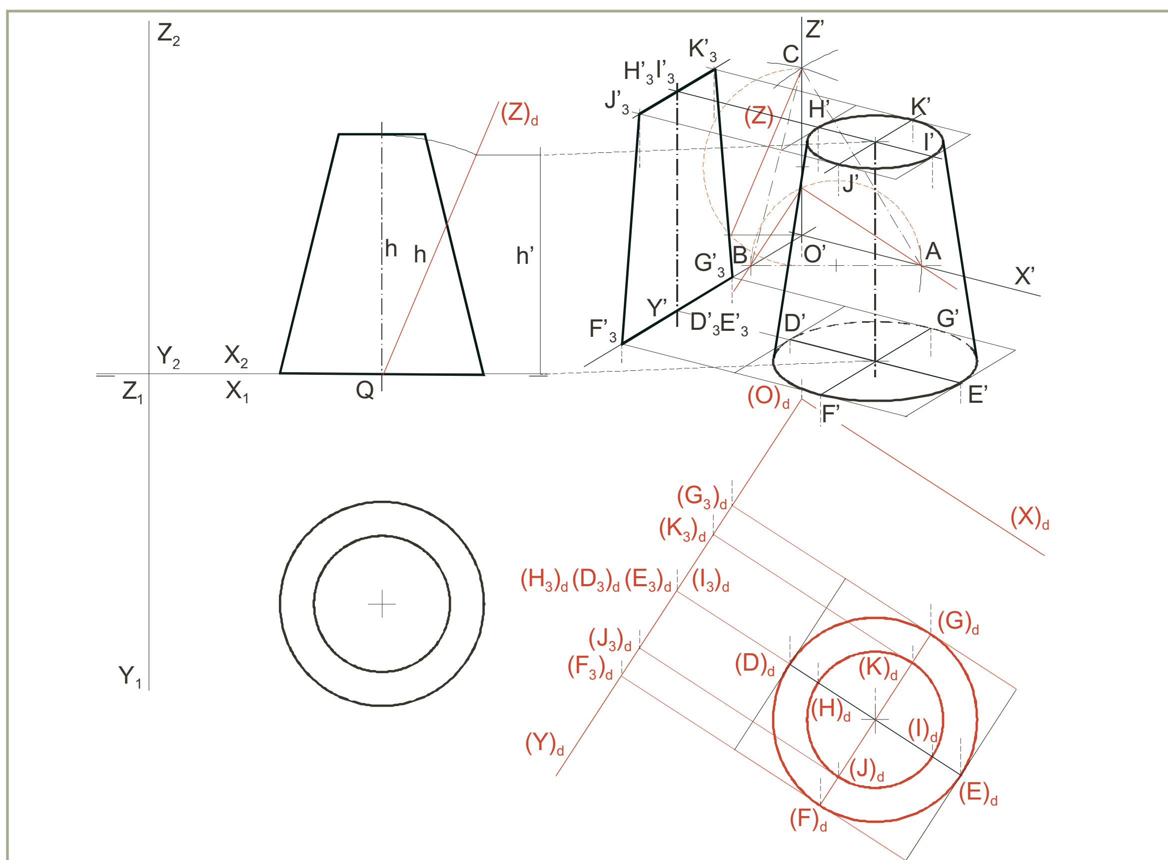


Ilustración 12

Sea un tronco de cono representado en diédrico y unos ejes axonométricos *X', Y', Z'* [Ilustración 12].

Sobre la representación diédrica se dibuja el triedro de referencia del sistema axonométrico de modo que los planos horizontal y vertical sean el *XY* y *XZ*. Las proyecciones de los ejes *Y*, *Z* se dibujan a la izquierda de la planta y el alzado y el eje *X* es la *L.T.*.

Se traza un triángulo de las trazas cualquiera *ABC* y se abate el plano XY con la misma orientación que el axonométrico *X'Y'*. Se trasladan los ejes abatidos paralelamente a *Z'* hasta transformarlos en $(X)_d$ e $(Y)_d$. Se dibujan, en la posición deseada con respecto a estos ejes, las dos circunferencias concéntricas que definen la planta y dos diámetros paralelos a los ejes $(X)_d$ e $(Y)_d$ para cada una de ellas.

Se abate el eje *Z* y se transporta mediante un arco de centro *Q* la altura *h*, medida en el alzado, sobre una paralela $(Z)_d$ a *(Z)*. A continuación se proyecta *h* sobre una paralela a *Z'*, mediante paralelas a *L. T.*, para obtener *h'*.

Se trazan por los extremos $(D)_d$, $(E)_d$, $(F)_d$, ... de dichos diámetros paralelas a $(X)_d$ que cortan a $(Y)_d$ en $(D_3)_d$, $(E_3)_d$, $(F_3)_d$, ...

Se trazan por $(D_3)_d$, $(E_3)_d$, $(F_3)_d$, $(G_3)_d$ paralelas a *Z'* que cortan a *Y'* en D'_3, E'_3, F'_3, G'_3, que son proyección vertical segunda de los extremos de los diámetros de la cara inferior.

Se trazan por $(H_3)_d$, $(I_3)_d$, $(J_3)_d$, $(K_3)_d$ paralelas a *Z'*, prolongándolas una altura *h'*, por encima de *Y'*, para obtener H'_3, I'_3, J'_3, K'_3, que son proyección vertical segunda de los extremos de los diámetros de la cara superior.

Las proyecciones directas de los extremos de los diámetros son los puntos de corte de paralelas a Z' trazadas desde $(D)_d$, $(E)_d$, $(F)_d$, ... con paralelas a *X'* trazadas desde D'_3, E'_3, F'_3, ...

Una vez trazadas las elipses, a partir de los diámetros conjugados obtenidos, se trazan las tangentes del contorno aparente que completan la perspectiva axonométrica. La proyección vertical segunda está formada por dos rectas proyección de las bases y otras dos que corresponden a las generatrices del contorno aparente.

2.6. Sección del cilindro por un plano oblicuo

Sea un cilindro recto y un plano oblicuo α representados en axonométrica [Ilustración 13].

Al ser el cilindro recto y estar apoyado en el plano *XY* la proyección horizontal de la elipse sección es la base. Los diámetros $D'_1E'_1$, $F'_1G'_1$ de ésta, paralelos a los ejes *X'*, *Y'* serán conjugados y proyección horizontal de los diámetros conjugados *D'E'*, *F'G'* de la elipse sección.

La proyección horizontal r'_1 de la recta *r*, que contiene al diámetro *FG*, corta a α'_1 en H'_r y a *X'* en V'_{r1}, obteniéndose V'_r en el punto de corte de su línea de referencia paralela a *Z'* con α'_2. La proyección directa *r'*, que se obtiene uniendo H'_r con V'_r, corta a las generatrices de F'_1, G'_1 en los extremos del diámetro *F'G'* y al eje del cilindro en el centro *Q'* de la elipse sección.

La proyección directa *s'* de la recta *s*, que contiene al diámetro *DE*, se obtiene uniendo H'_s con *Q'* y corta a las generatrices de D'_1, E'_1 en los extremos del diámetro *D'E'*.

La elipse se dibuja por cualquier método a partir de sus diámetros conjugados.

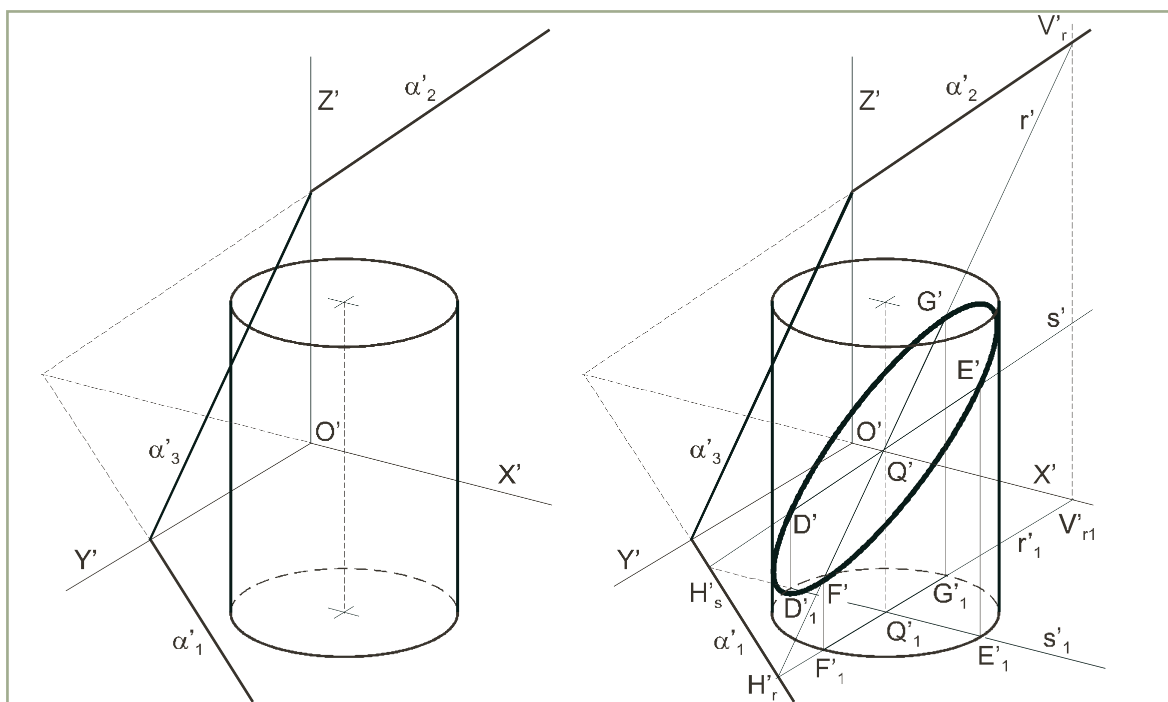


Ilustración 13

2.7. Intersección del cono con una recta

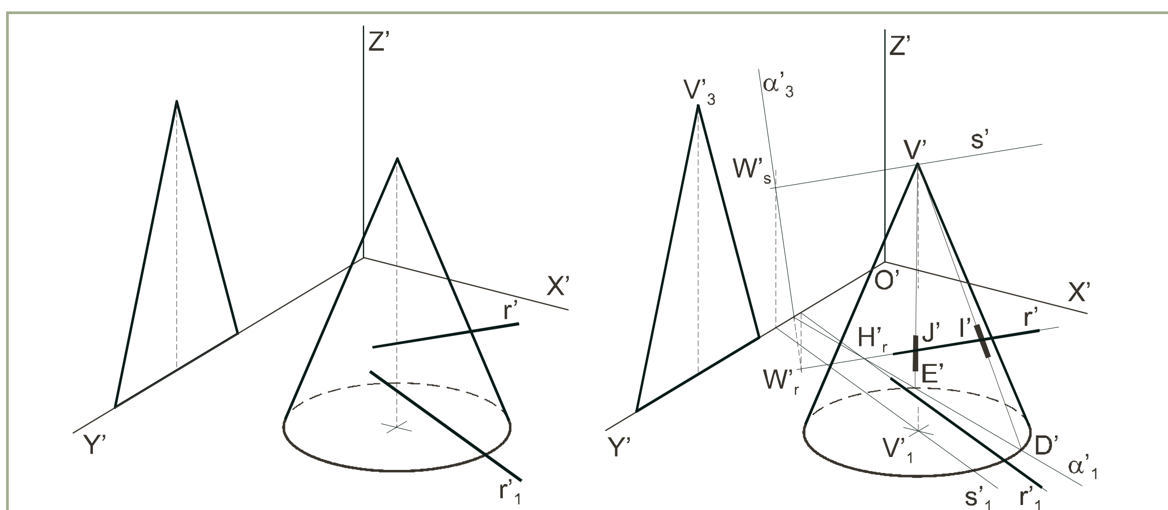


Ilustración 14

Sea un cono recto y una recta oblicua *r* representados en axonométrica [Ilustración 14].

Se traza un plano α que contenga la recta y el vértice del cono. Sus trazas quedan determinadas obteniendo las de la recta *r* y las de la recta *s*, paralela a *r* que pasa por el vértice *V*. La proyección directa *s'* se traza paralela a *r'* por *V'* y la horizontal s'_1 paralela a r'_1 por V'_1.

El plano α corta al cono según las generatrices *D'V'*, *E'V'*, siendo *D'*, *E'* los puntos en que la traza horizontal α'_1 corta a la base. La proyección directa *I'*, *J'* de los puntos de intersección de recta y cono son los de corte de *r'* con *D'V'* y *E'V'*. Sus primeras proyecciones se podrían obtener mediante líneas de referencia paralelas a *Z'*.

2.8. Perspectiva de una pieza industrial a partir de sus vistas, mediante el método de traslación paralela

El abatimiento y traslación paralela de dos planos coordenados sobre los que se dibujan las vistas del objeto, permite obtener su perspectiva axonométrica haciendo concurrir las direcciones de abatimiento de las proyecciones de cada punto.

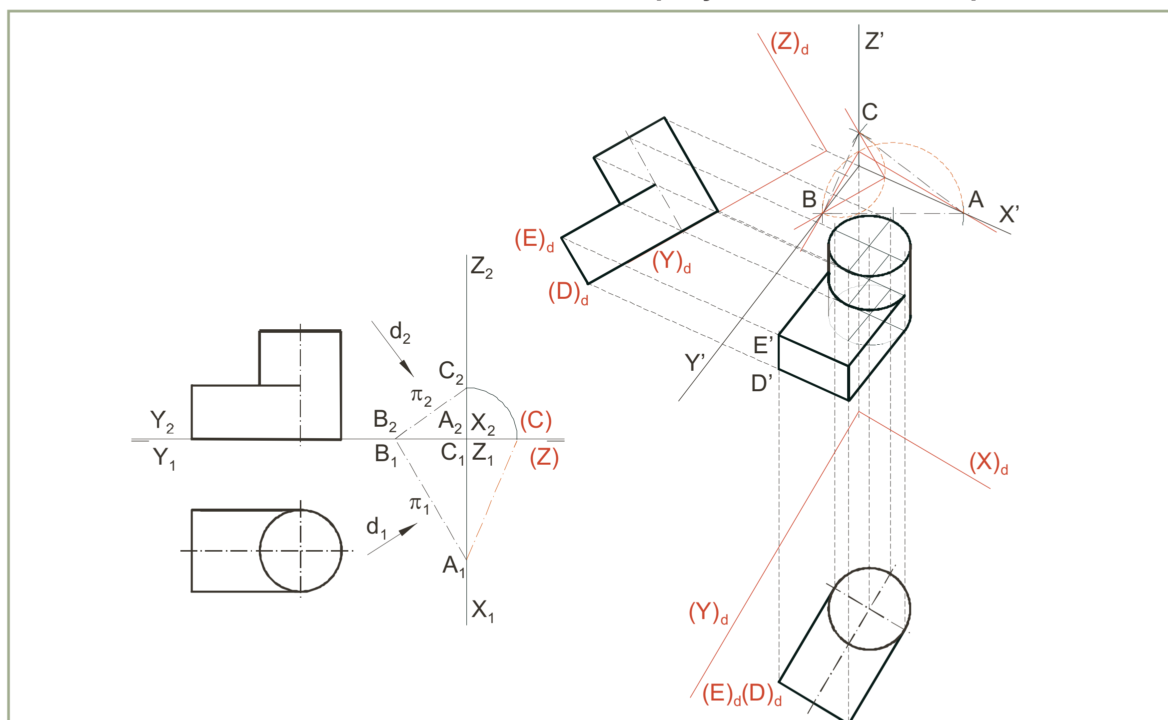


Ilustración 15

Sea una pieza representada en diédrico [Ilustración 15].

Sobre la representación diédrica se dibuja el triedro de referencia del sistema axonométrico, de modo que el alzado se convierta en la proyección vertical segunda o tercera. Elegida en este caso la tercera deben dibujarse las proyecciones de los ejes *Y*, *Z* a la derecha de la planta y el alzado. El eje *Y* es la *L. T.*.

Se traza un triángulo de las trazas *ABC* para decidir la posición del plano del cuadro π. Sus trazas $\pi_1 = \overline{A_1B_1}$ y $\pi_2 = \overline{A_2B_2}$ se eligen libremente y definen la dirección de observación *d*, perpendicular a π. La verdadera magnitud de $\overline{AC}$ es $\overline{A_1(C)}$ que se obtiene abatiendo *C* sobre el plano horizontal mediante el arco de centro X_2 y radio X_2C_2.

Sobre una semirrecta horizontal con origen en *B* se transporta la traza *BA* y a continuación, se trazan arcos de centros *A*, *B* y radios *AC*, *BC* que determinan el tercer vértice *C* del triángulo de las trazas. Sus alturas son los ejes axonométricos *X'*, *Y'*, *Z'*.

Se abate y desplaza el plano *XY*, y se dibuja sobre él la planta de la pieza, en la misma posición que tenía respecto a los ejes. Análogamente se dibuja el alzado sobre el plano *YZ* abatido y desplazado.

Se obtienen los puntos *D'*, *E'* de la perspectiva axonométrica en los puntos de corte de las líneas de abatimiento trazadas por $(E)_d$, $(D)_d$, paralelas al eje *Z'* desde la planta y al eje *X'* desde el alzado. Análogamente se obtienen todos los puntos necesarios para dibujar la pieza.

3. Perspectiva caballera

3.1. Abatimiento del eje Y. Coeficiente de reducción

El abatimiento del eje *Y* sobre el plano del cuadro, mediante el giro de su plano proyectante *YY'* alrededor del eje axonométrico *Y'*, permite obtener el ángulo que la dirección de proyección forma con él.

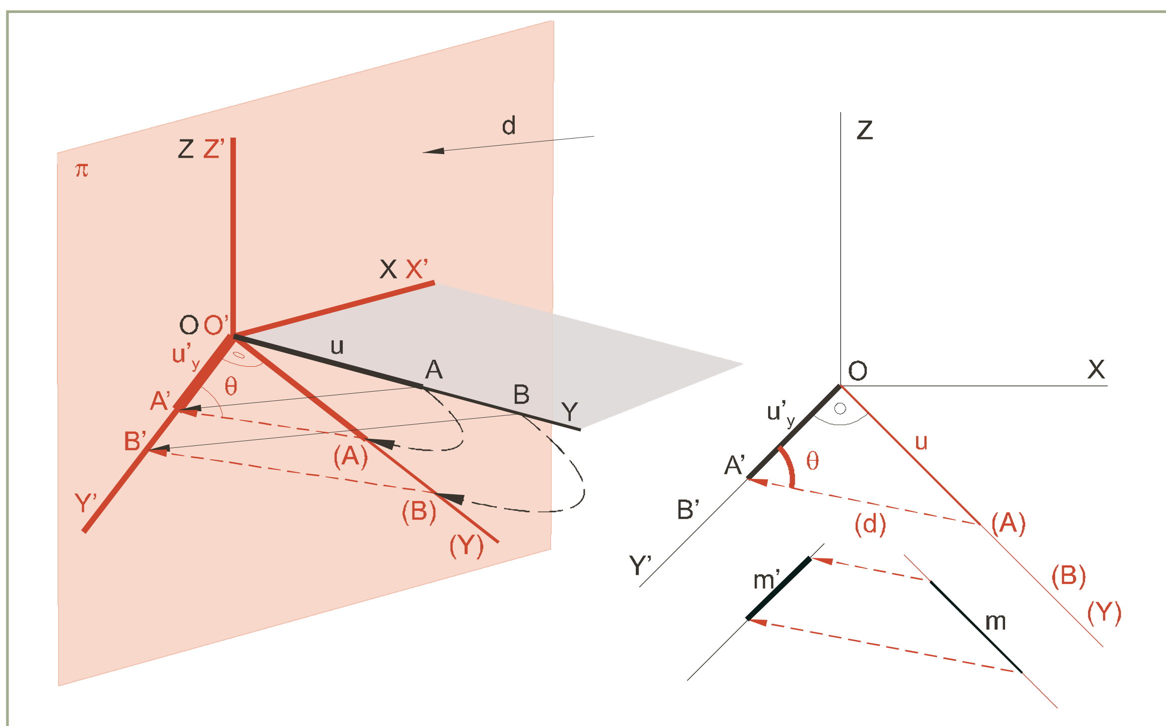


Ilustración 16

La perspectiva caballera es un caso particular del sistema axonométrico oblicuo, en el que el plano del cuadro se coloca paralelo o coincidente con el plano *XZ*, estando el eje *Y* perpendicular a él [Ilustración 16 izquierda]. Los ángulos o segmentos situados en el plano *XZ* se proyectan en verdadera magnitud, mientras que los segmentos paralelos al eje *Y* sufren un aumento o reducción que depende del ángulo θ que la dirección de proyección *d* forma con el plano del cuadro.

La reducción que sufre el segmento unidad $\overline{u}$ del eje *Y* al proyectarlo sobre el plano del cuadro es $\overline{u'_y} = \overline{u} \times cotg\theta$, de donde $cotg\theta = \overline{u'_y}/\overline{u}$. El número $c_y = cotg\theta$, llamado coeficiente de reducción del eje *Y*, multiplicado por la medida *AB* de un segmento paralelo o contenido en él, da la de su proyección *A'B'* sobre el plano del cuadro.

Sean *X, Y', Z* los ejes axonométricos de una perspectiva caballera, *u* la unidad de medida y $\overline{u'_y}$ dicha unidad reducida según el eje *Y* [Ilustración 16 derecha].

Para abatir el eje *Y* sobre el plano del cuadro se construye en su posición abatida *A'O(A)* el triángulo rectángulo *A'OA*. Un cateto es la unidad reducida $\overline{u'_y} = \overline{OA'}$ que coincide con su abatido, al ser *Y'* la charnela, el otro $\overline{u} = \overline{O(A)}$ se traza perpendicular a él por *O*. La hipotenusa es la dirección de proyección abatida *(d)* que forma el ángulo de proyección θ con *Y'*.

Puede obtenerse gráficamente la medida reducida *m'* de un segmento $\overline{m}$ paralelo al eje *Y*, proyectándolo desde una paralela a *(Y)* sobre una paralela a *Y'*, según la dirección *(d)*.

3.2. Abatimiento del plano XY

El abatimiento del plano *XY* sobre el plano del cuadro, alrededor del eje *X*, permite obtener las verdaderas magnitudes de las figuras planas situadas en él.

Sean *X, Y', Z* los ejes axonométricos de una perspectiva caballera, $\overline{u}$ la unidad de medida y $\overline{u'_y}$ dicha unidad reducida según el eje *Y* [Ilustración 17].

El eje *(X)* coincide con *X* y el eje *(Y)* es la perpendicular a *X* por *O*.

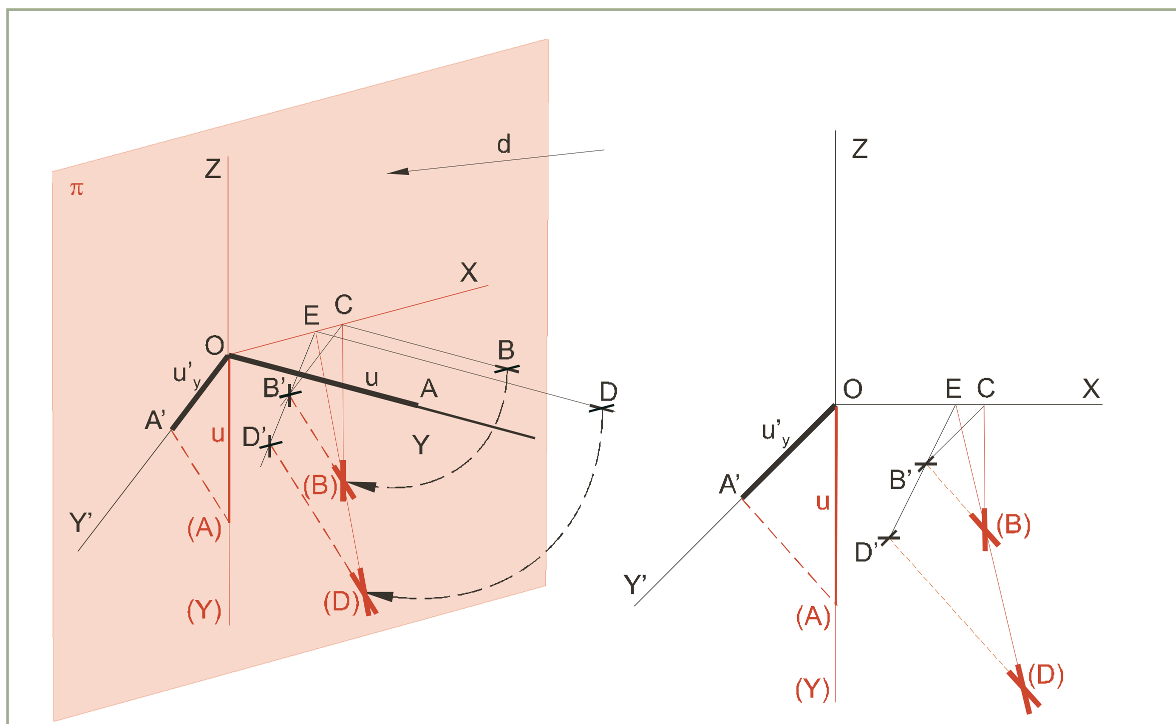


Ilustración 17

La dirección de abatimiento de los puntos del plano *XY* es *A'(A)* siendo *A'* y *(A)* los extremos de los segmentos $\overline{u'_y}$ y $\overline{u}$ llevados sobre *Y'* e *(Y)* respectivamente, a partir de *O*.

Entre los puntos *B´, D´, ...* que son proyección directa de puntos *B, D, ...* contenidos en el plano coordenado *XY* y sus abatidos *(B), (D), ...* sobre el cuadro π = *XY* existe una afinidad definida por el eje de afinidad *X* (charnela del abatimiento) y el par de puntos homólogos *A'*, *(A)*. En ella el eje abatido *(Y) es* afín del axonométrico *Y'*.

Se obtiene *(B)* en el punto de corte de la dirección de afinidad de *B'* con la paralela a *(Y)* trazada por el punto doble *C*, en que su afín, la paralela *B'C* a *Y'* por *B'*, corta al eje de afinidad *X*.

Se obtiene *(D)* en el punto de corte de su dirección de afinidad con la recta *E(B)*, siendo *E* el punto doble en que su afín *B'D'* corta al eje de afinidad *X*.

3.3. Abatimiento del plano YZ

El abatimiento del plano *YZ* sobre el plano del cuadro, alrededor del eje *Z*, permite obtener las verdaderas magnitudes de las figuras planas situadas en él.

Sean *X, Y', Z* los ejes axonométricos de una perspectiva caballera, la unidad de medida y dicha unidad reducida según el eje *Y* [Ilustración 18].

El eje *(Z)* coincide con *Z* y el eje *(Y)* es la perpendicular a *Z* por *O*.

La dirección de abatimiento de los puntos del plano *YZ* es *A'(A)* siendo *A'* y *(A)* los extremos de los segmentos $\overline{u'_y}$ y $\overline{u}$ llevados sobre *Y'* e *(Y)* respectivamente, a partir de *O*.

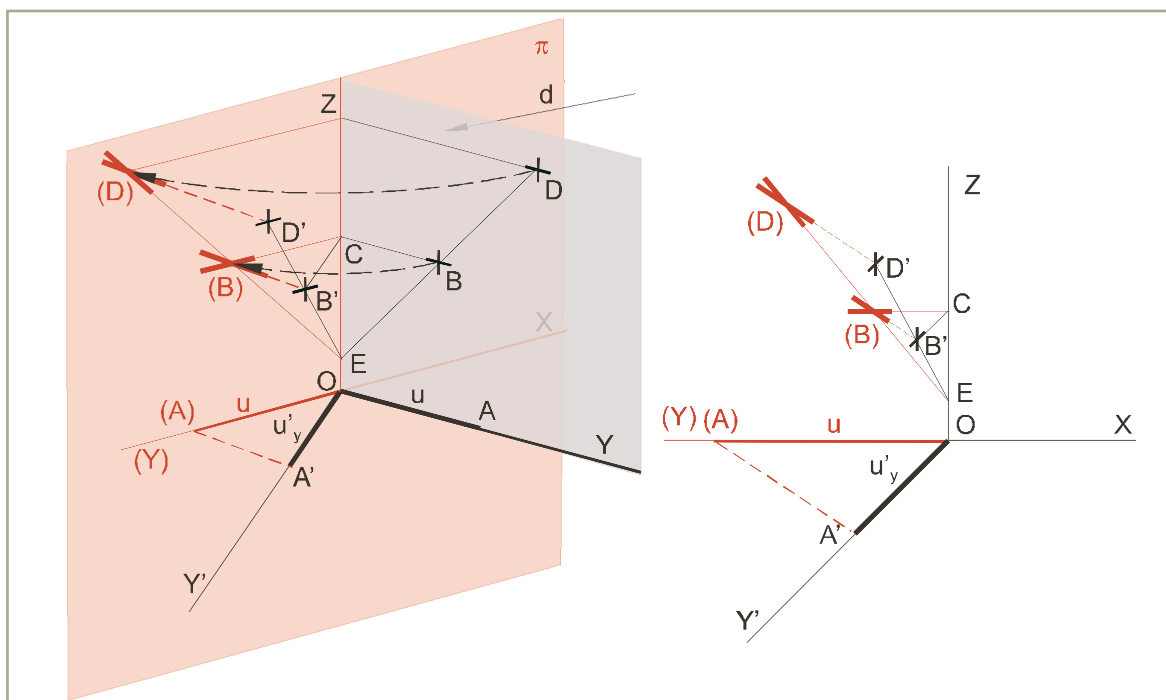


Ilustración 18

Entre los puntos *B´, D´, ...* que son proyección directa de puntos *B, D, ...* contenidos en el plano coordenado *YZ* y sus abatidos *(B), (D), ...* sobre el cuadro existe una afinidad definida por el eje de afinidad *Z* (charnela del abatimiento) y el par de puntos homólogos *A'*, *(A)*. En ella el eje abatido *(Y) es* afín del axonométrico *Y'*.

Se obtiene *(B)* en el punto de corte de la dirección de afinidad de *B'* con la paralela a *(Y)* trazada por el punto doble *C*, en que su afín, la paralela *B'C* a *Y'* por *B'*, corta al eje de afinidad *Z*.

Se obtiene *(D)* en el punto de corte de su dirección de afinidad con la recta *E(B)*, siendo *E* el punto doble en que su afín *B'D'* corta al eje de afinidad *Z*.

3.4. Verdadera magnitud de un segmento

Sea $\overline{M'N'}$ la perspectiva caballera de un segmento $\overline{d}$ y $\overline{M'_1N'_1}$ su proyección horizontal [Ilustración 19].

La verdadera magnitud del segmento *d* es la hipotenusa del triángulo rectángulo *MNP*, cuyos catetos *MP* y *PN* tienen longitudes respectivamente iguales a la de su proyección horizontal $\overline{M'_1N'_1}$ y a la diferencia de cota *c* de sus extremos *N*, *M*.

Se obtiene la longitud de $\overline{M'_1N'_1}$ abatiendola. Para ello, se trazan paralelas a *Y'* por sus extremos M'_1, N'_1, y por los puntos de corte de éstas con el eje *X* paralelas a *(Y)* que cortan a las direcciones de afinidad de M'_1, N'_1 en (M_1), (N_1).

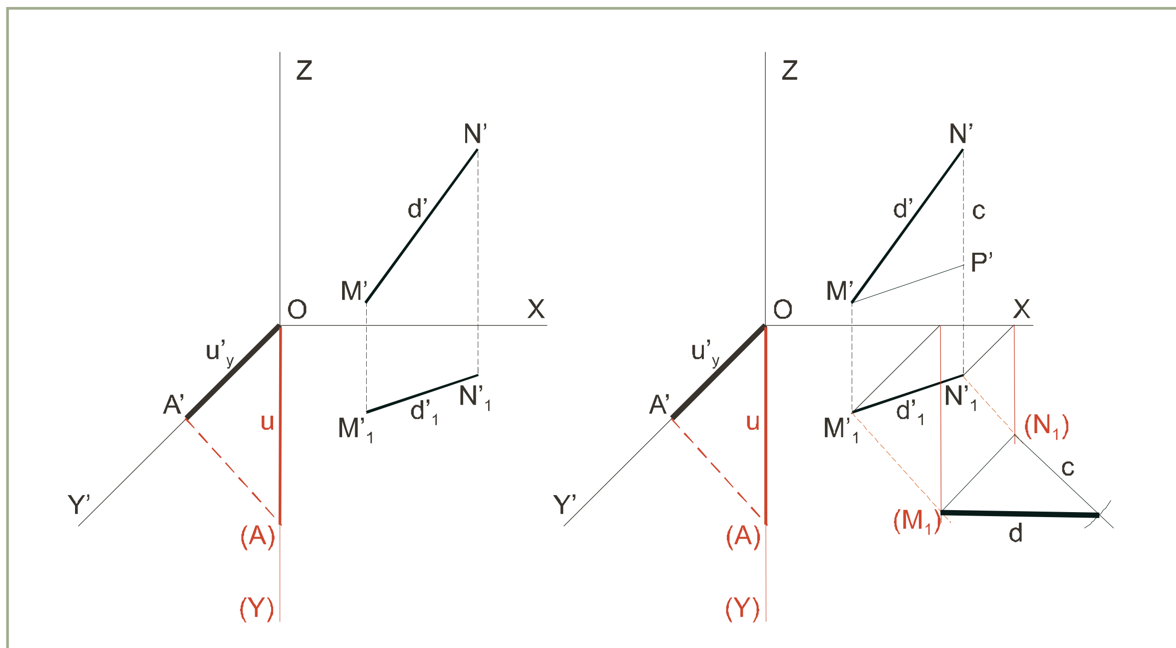


Ilustración 19

La diferencia de cota *c* entre *N* y *M* está en el eje *Z* y por tanto en verdadera magnitud. Llevando *c* perpendicular a $\overline{(M_1)(N_1)}$ por (N_1) se obtiene *d* como hipotenusa de un triángulo rectángulo igual al *MNP*.

3.5. Verdadera magnitud de polígonos situados en planos paralelos a los coordenados

Sea *BCDEFGHI* una cara paralela al plano *YZ* de un poliedro representado en perspectiva caballera [Ilustración 20].

Como puede apreciarse en la proyección vertical segunda el poliedro está apoyado en el plano horizontal. Por ello, la traza α'_1 del plano vertical que la contiene coincide con *B'C'* y la traza α'_2 es paralela al eje *Z*.

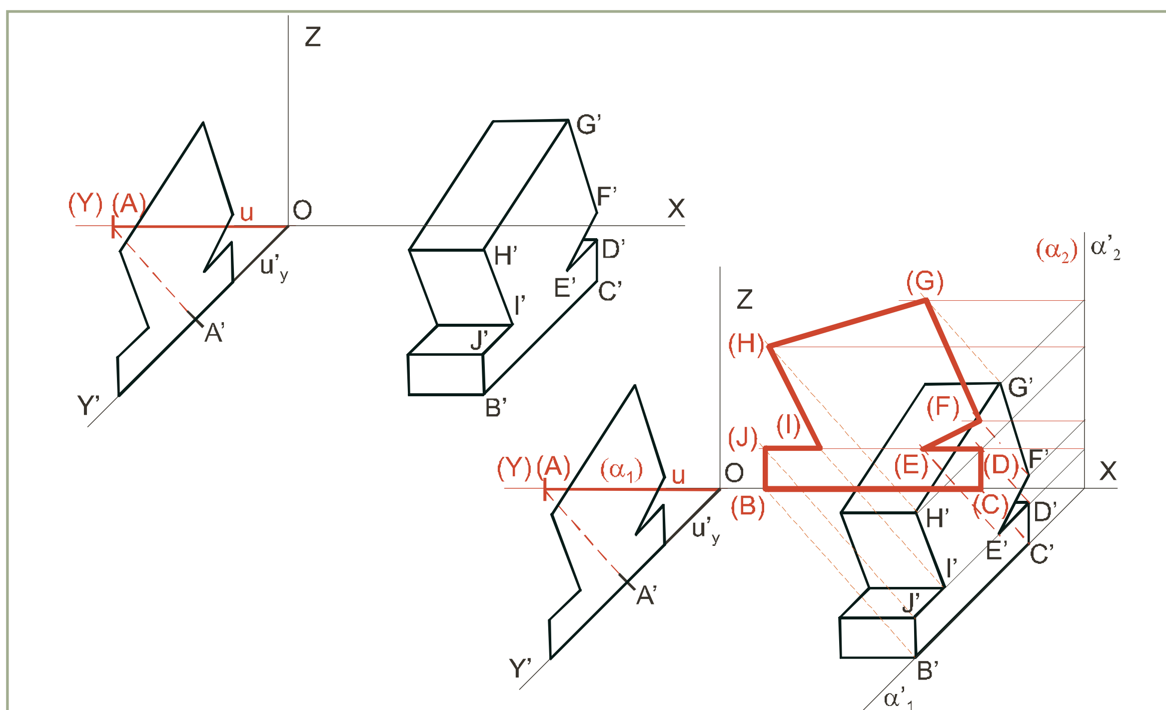


Ilustración 20

La verdadera magnitud de dicha cara se obtiene abatiendo el plano α alrededor de su traza α'_2 del mismo modo que se abate el plano *YZ*. La dirección de afinidad y abatimiento es también *A'(A)*.

Para abatir los vértices *B*, *C*, ... se trazan paralelas a α'_1 por *B'*, *C'*, ..., y por los puntos de corte de éstas con α'_2 paralelas a (α_1) que cortan a las direcciones de afinidad de *B'*, *C'*, ... en *(B)*, *(C)*, ...

3.6. Perspectiva de una pieza industrial a partir de sus vistas.

Sea una pieza industrial representada según el método del primer diedro y sean *X, Y', Z* los ejes axonométricos de una perspectiva caballera, $\overline{u}$ la unidad de medida y $\overline{u_y}$ dicha unidad reducida según el eje *Y* [Ilustración 21].

La pieza está formada por dos cilindros, por lo que la situaremos con su eje paralelo al eje *Y*, de modo que las circunferencias de las bases se proyecten sin deformarse.

Se dibuja el alzado en el plano *XZ* y la vista lateral derecha en el plano *YZ* abatido de modo que la línea de referencia de los ejes de ambas vistas sea perpendicular al eje *Z*.

No es necesario obtener la proyección en el plano *YZ* del la vista lateral derecha completa, ya que sólo necesitamos las alturas de los cilindros. El eje (e_3) es paralelo a *(Y)* y su proyección e'_3, paralela a *Y'*, pasa por el punto doble *E'* del eje *Z*. Las direcciones de abatimiento (paralelas a *(A)A')* de los centros *(B), (C), (D),* de las bases cortan a e'_3 en B'_3, C'_3, D'_3, que determinan dichas alturas.

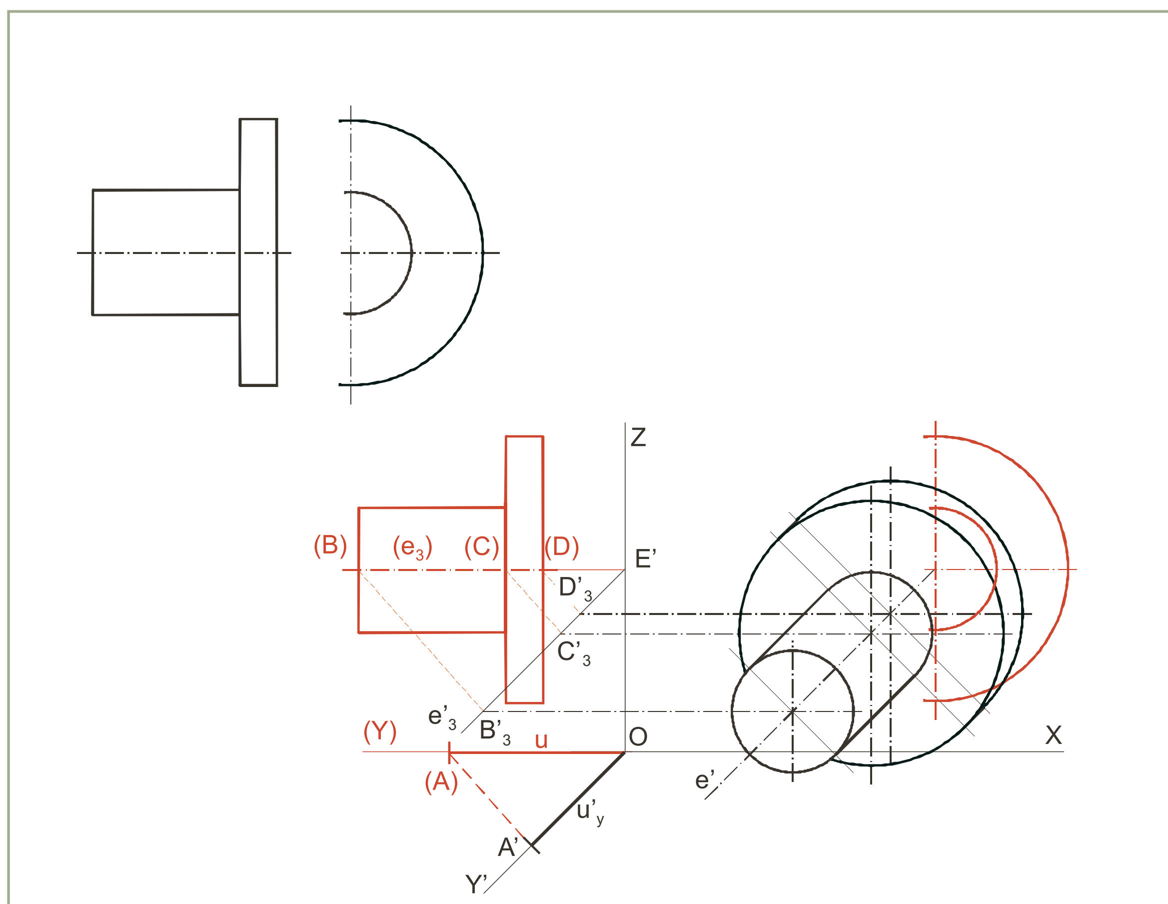


Ilustración 21

Las paralelas al eje *X* trazadas desde *B'*$_3$, *C'*$_3$, *D'*$_3$ cortan a la proyección directa del eje de los cilindros en los centros de las circunferencias de las bases. Dibujadas éstas con el radio del alzado se trazan por sus centros perpendiculares a *Y'*, que las cortan en los puntos de tangencia de las generatrices del contorno aparente que, además de facilitar su dibujo, son frontera entre partes vistas y ocultas.

3.7. Sección por planos de piezas industriales

Sea un poliedro y un plano oblicuo α representados en caballera [Ilustración 22].

Los planos β y γ que contienen las caras paralelas al plano *YZ* son proyectantes en *XY* por lo que sus trazas horizontales β'_1 y γ'_1 coinciden con las proyecciones horizontales de dichas caras, y las verticales segundas β'_2 y γ'_2 son paralelas a *Z*. Las intersecciones de β y γ con α determinan la sección en las caras que contienen.

La recta *i* de intersección de β y α está determinada por sus trazas H'_i, V'_i que son los puntos de intersección de β'_1 con α'_1 y de β'_2 con α'_2. Su proyección directa *i'* tiene en común con la de la cara del poliedro paralela al plano *YZ*, más próxima a él, las aristas *B'C'* y *D'E'* de la sección. La recta *j* de intersección de γ y α determina análogamente la arista H'_j*F'G'* de la sección.

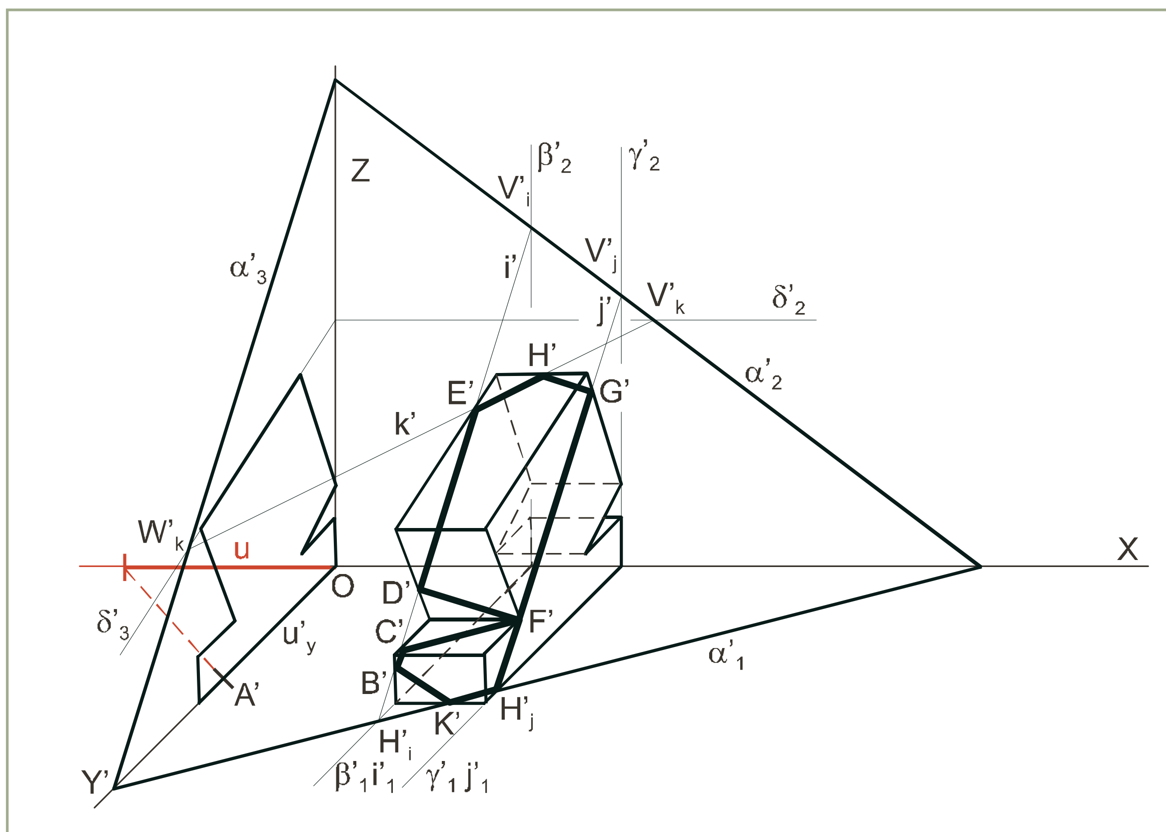


Ilustración 22

La cara superior es paralela al eje *X*, por lo que el plano δ que la contiene tiene su traza δ'_2 también paralela a *X*, y la traza δ'_3 coincidiendo con su proyección vertical tercera. La proyección directa *k'* de la recta de intersección de δ y α tiene en común con la de la cara superior los vértices *E', H'* de la sección.

Por último, la proyección directa de la base del poliedro tiene en común con la de la traza α'_1 el vértice *K'* que completa la sección.

3.8. Intersección con rectas de piezas industriales

Sea una pieza industrial y una recta oblicua *r* representadas en caballera mediante sus proyecciones directa y vertical primera [Ilustración 23].

Se traza un plano α que contenga la recta y sea paralelo al eje del cilindro. Su traza α'_2 coincide con r'_2 y α'_3 es paralela a *Y'*. Los puntos de corte B'_2, C'_2, D'_2, F'_2 de α'_2 con la proyección vertical primera de las bases de los cilindros, son también proyección vertical primera de las generatrices de la sección. Dibujadas éstas paralelas a *Y'*, cortan a las circunferencias que son proyección directa de las bases en los extremos de las cuerdas que completan la sección.

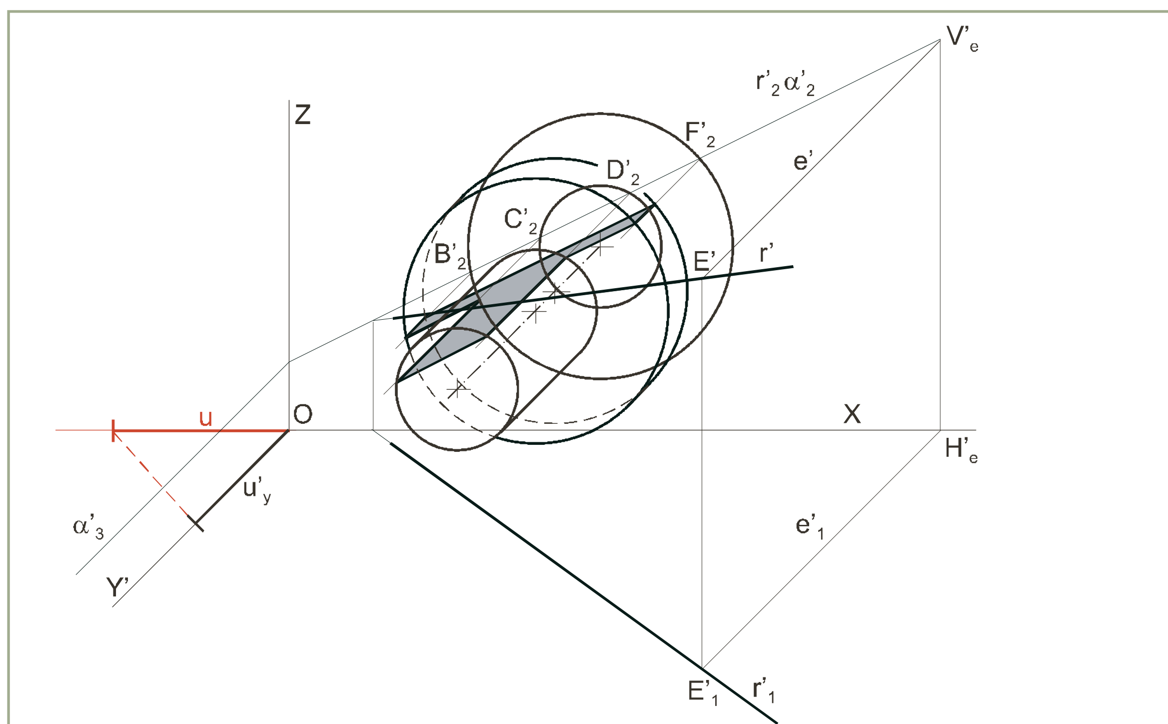


Ilustración 23



Recuerda

- ✓ El abatimiento de los ejes coordenados sobre el plano del cuadro permite obtener los ángulos que forman con él y las escalas axonométricas.
- ✓ El abatimiento de los planos coordenados sobre el plano del cuadro permite obtener las verdaderas magnitudes de las figuras planas situadas en ellos.
- ✓ El abatimiento de un plano coordenado efectuado de modo que las figuras contenidas en él mantengan su orientación, y su traslación paralela a la dirección de afinidad, facilitan la representación axonométrica de dichas figuras.
- ✓ El abatimiento del plano coordenado que contiene una circunferencia facilita la obtención de las medidas de sus diámetros conjugados, si estos se toman paralelos a dichos ejes.
- ✓ El abatimiento y traslación paralela del plano XY facilita la representación de la proyección axonométrica horizontal de un objeto. El abatimiento del eje *Z* permite obtener las medidas de las alturas, necesarias para la obtención de su perspectiva axonométrica.
- ✓ El abatimiento y traslación paralela de dos planos coordenados sobre los que se dibujan las vistas del objeto, permite obtener su perspectiva axonométrica haciendo concurrir las direcciones de abatimiento de las proyecciones de cada punto.
- ✓ En caballera, el abatimiento del eje *Y* sobre el plano del cuadro permite obtener el ángulo que la dirección de proyección forma con él.
- ✓ En caballera, el abatimiento del plano *XY* o YZ sobre el plano del cuadro, alrededor del eje *X* o *Z*, permite obtener las verdaderas magnitudes de las figuras planas situadas en él.

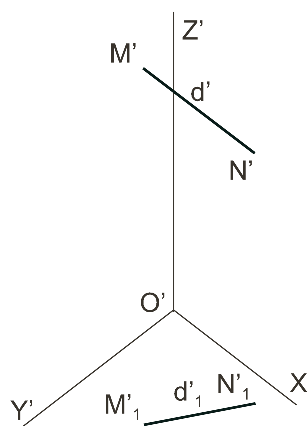
Puedes acceder pulsando aquí al recurso interactivo *Piezas. 180 diseños para dibujo técnico* de Antonio L. Martín González.



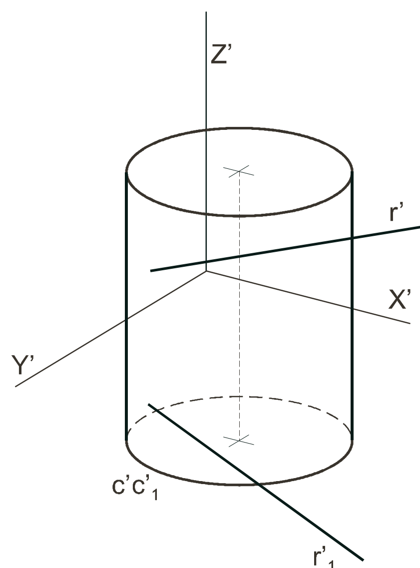


Actividades

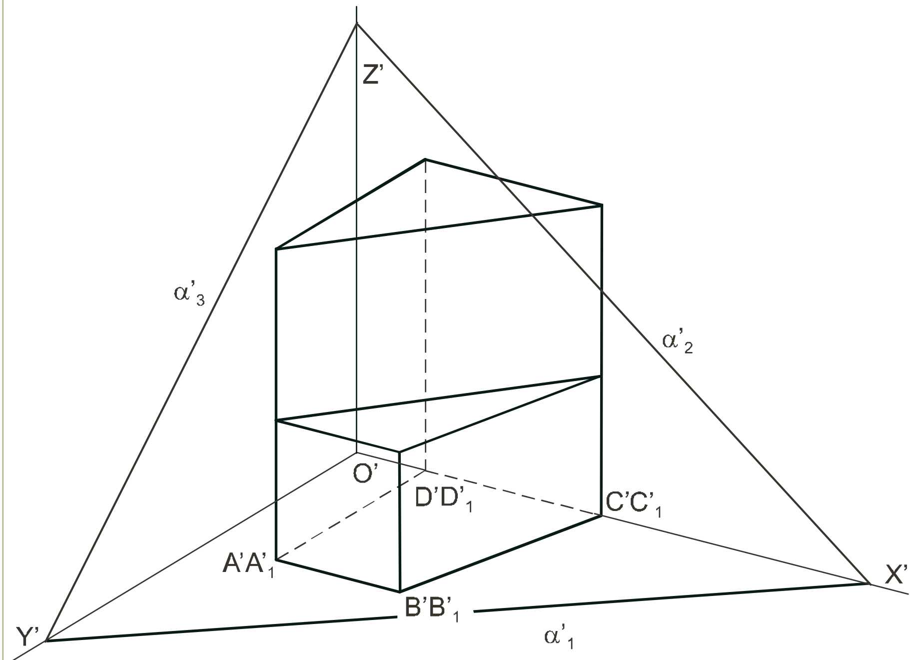
1. Obtener la verdadera magnitud del segmento $\overline{MN}$ representado en axonométrico.



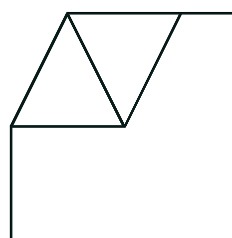
2. Hallar los puntos de intersección de la recta *r* con el cilindro representado en axonométrico, cuya base *c* está contenida en el plano *XY*.

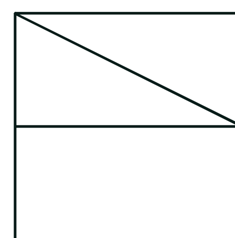


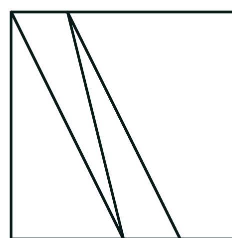
3. Dibujar la sección por el plano α del poliedro representado en axonométrico, cuya base *ABCD* está contenida en el plano *XY*.

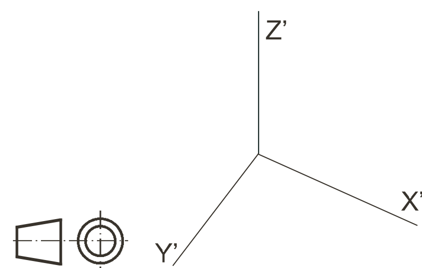


4. Dibujar la perspectiva axonométrica de la pieza representada por el método del primer diedro, conocidos los ejes axonométricos.

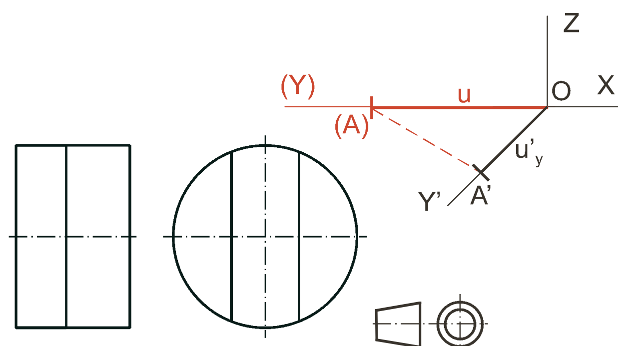




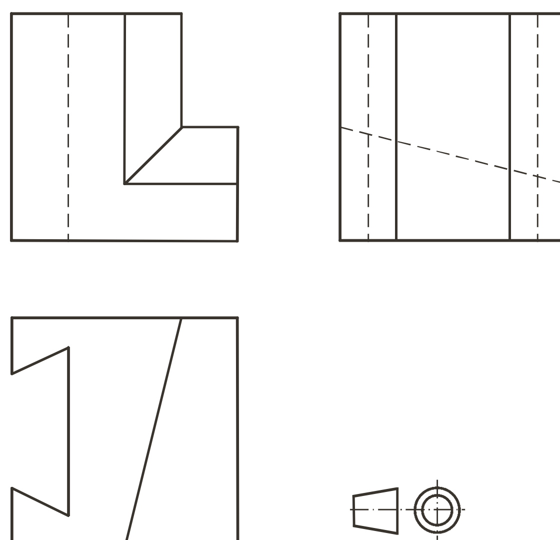




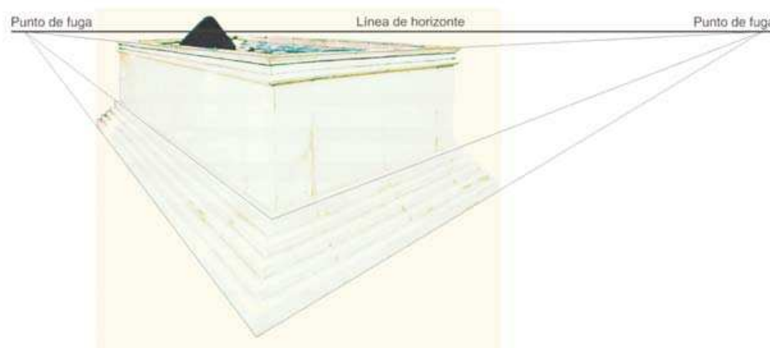
5. Dibujar la perspectiva caballera de la pieza representada por el método del primer diedro, conocidos los ejes axonométricos y la unidad reducida.



6. Dibujar la perspectiva isométrica de la pieza representada por el método del primer diedro.



10 Sistema cónico de perspectiva lineal



Línea de horizonte y puntos de fuga (Ilustración de los autores utilizando la fotografía de la Tumba del Sultán del cementerio de la mezquita Al Mashun, Medan, Sumatra, Indonesia, del Banco de imágenes del ISFTIC).

Para facilitar la comprensión espacial de la representación en perspectiva cónica del punto, la recta y el plano, se presentan formando parte de edificios. En las ilustraciones aparece a la izquierda una perspectiva axonométrica del proceso utilizado para representarlos, dibujando en color azul los elementos que están situados fuera del plano del cuadro, y en negro los que están dentro. A la derecha se sitúa la perspectiva cónica obtenida como resultado de dicho proceso.

El primer método que se presenta para realizar la perspectiva cónica de un sólido se inicia abatiendo el plano geometral para dibujar su proyección horizontal, a continuación se levantan las alturas de los vértices del sólido para dibujar los planos y aristas que completan su perspectiva.

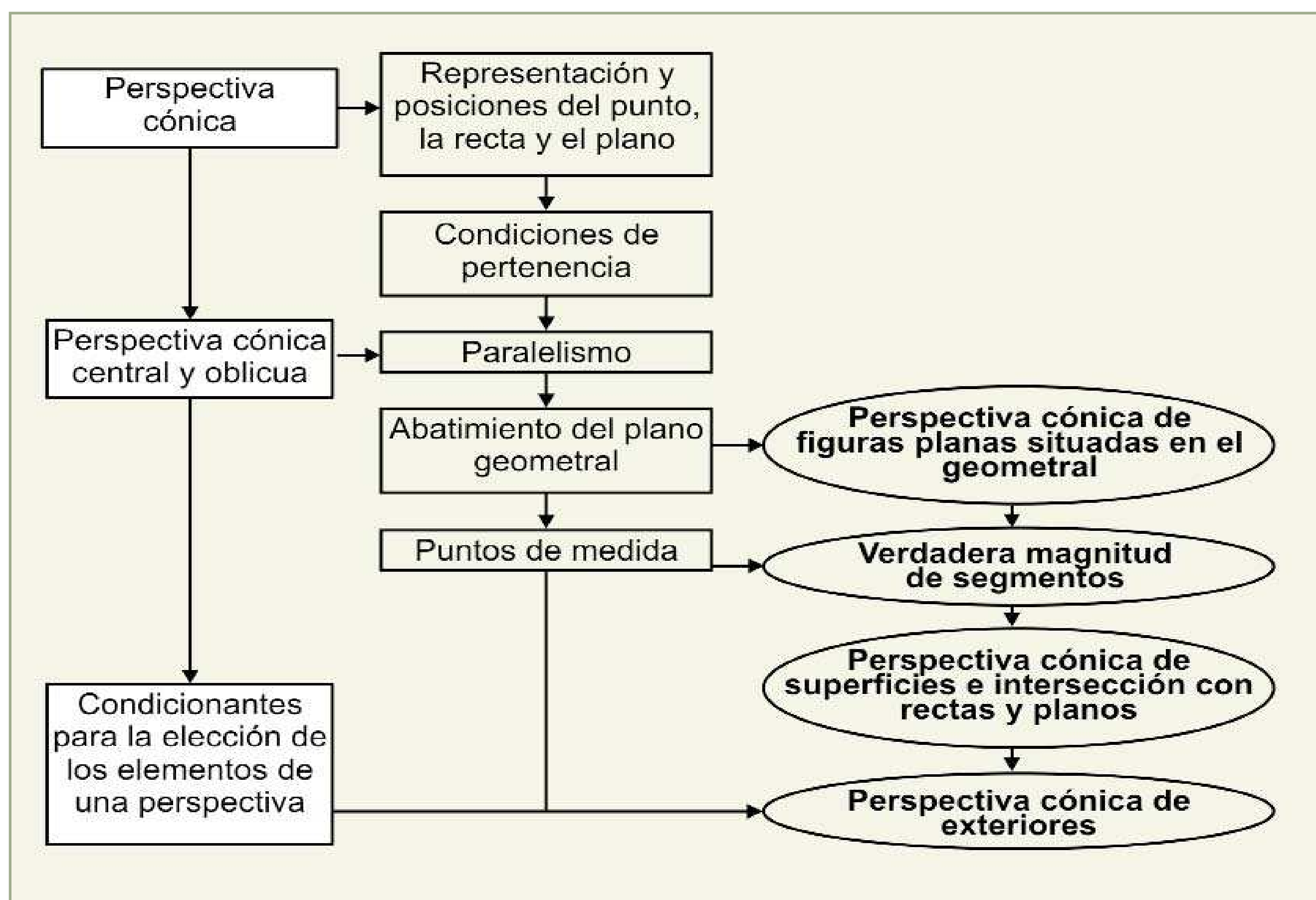
El conocimiento de los puntos métricos proporciona otro procedimiento de realización de la perspectiva de un sólido, que en este libro se inicia también por el dibujo de la proyección horizontal, porque introduce orden y claridad en las construcciones más complejas.

El paso de la representación diédrica de un sólido a su perspectiva cónica se presenta en dos partes diferenciadas: la elección de los elementos de la perspectiva para que ésta responda a los fines perseguidos y resulte natural, y su realización por el método de trazas y puntos de fuga, o por el de puntos de fuga y métricos.

Con el estudio de esta Unidad nos proponemos alcanzar los siguientes **objetivos**:

1. Ser capaz de obtener verdaderas magnitudes en una perspectiva cónica.

2. Ser capaz de representar puntos, rectas, planos, formas planas y sólidos y obtener sus intersecciones con planos y rectas, en perspectiva cónica.



ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. Perspectiva cónica: fundamentos y representación del punto, la recta y el plano

1.1. Fundamentos

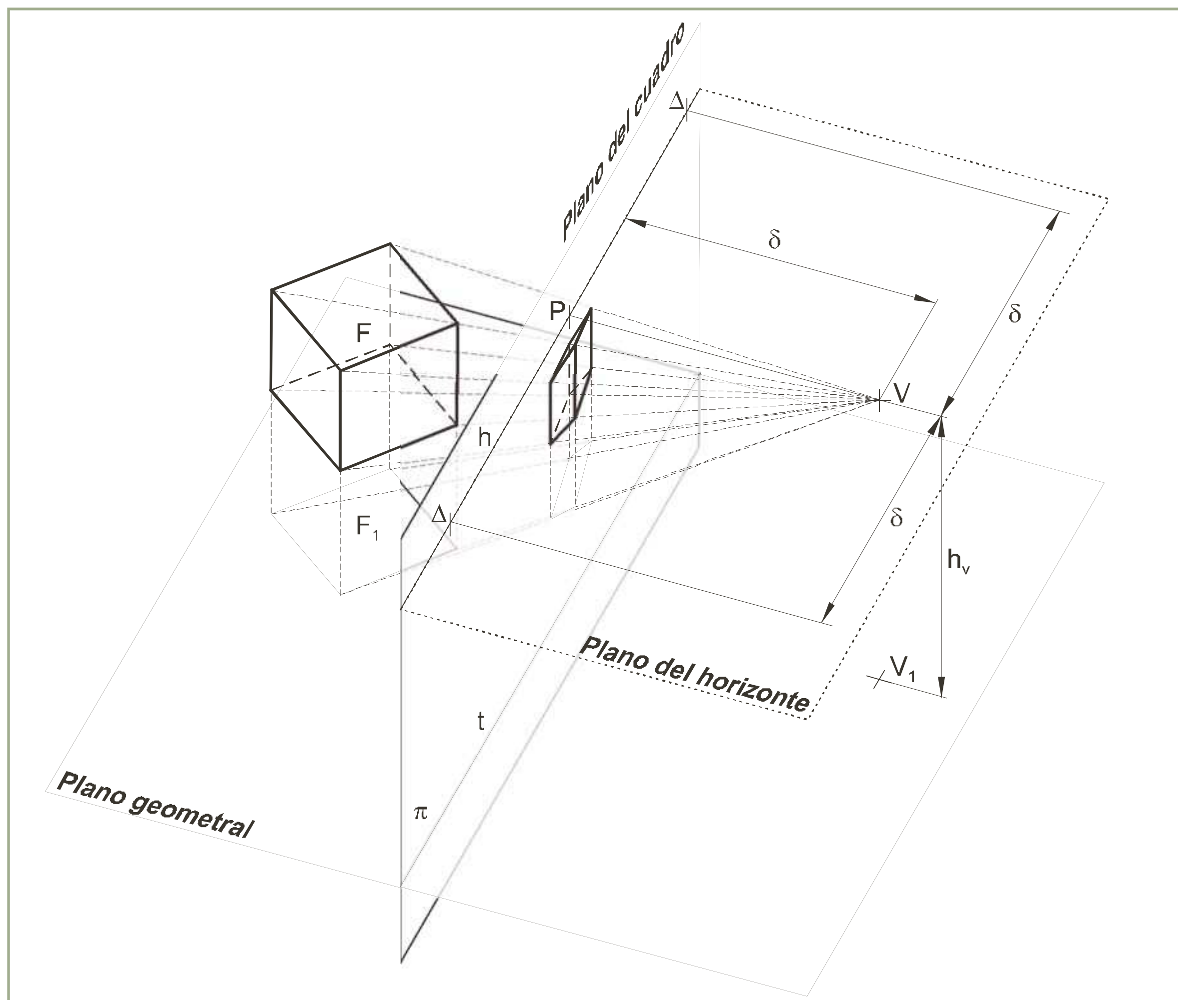


Ilustración 1

La perspectiva cónica utiliza como sistema de referencia un plano horizontal, llamado geometral, que representa la superficie de la tierra. Los edificios, plazas, esculturas, ... se sitúan, en general, por encima de dicho plano y son observados desde un punto de vista *V.*

La representación del objeto [Ilustración 1] se realiza mediante dos proyecciones sucesivas:

1. El objeto se refiere al plano geometral mediante su proyección cilíndrica ortogonal sobre él, llamada proyección horizontal.
2. Se proyectan el objeto y su proyección horizontal desde *V*. La figura radiada resultante se secciona por un plano vertical π, llamado plano del cuadro, obteniéndose dos imágenes o proyecciones del objeto.

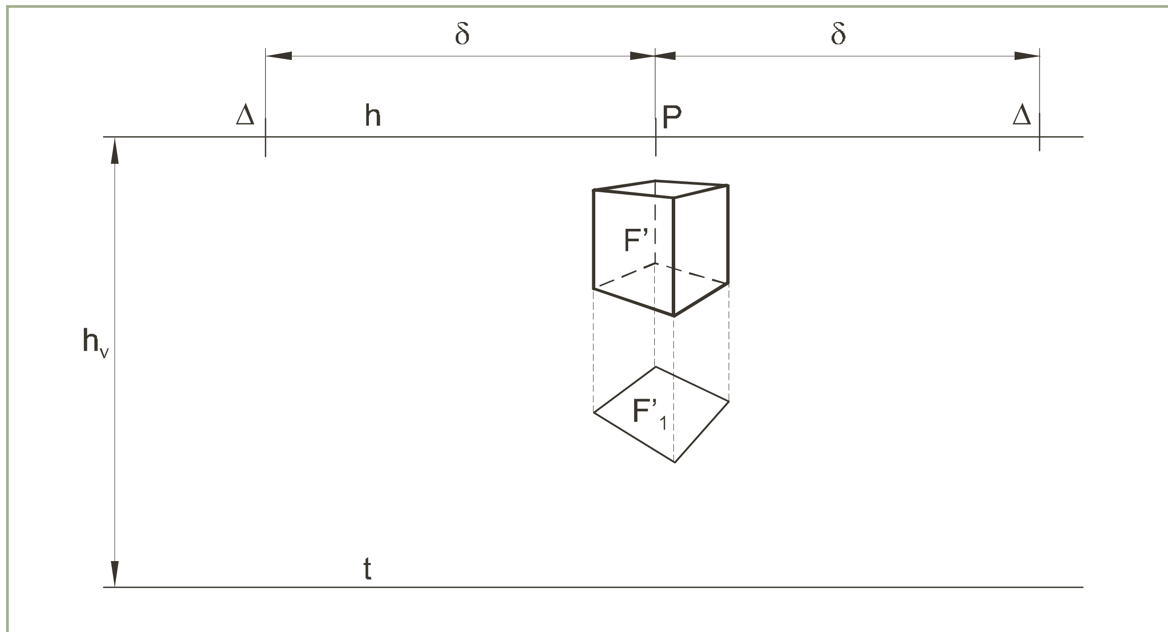


Ilustración 2

La perspectiva cónica del objeto así obtenida [Ilustración 2] consta de:

- La proyección *F'* del objeto *F* sobre el plano del cuadro, llamada proyección directa o **perspectiva cónica**.
- La proyección F'_1 sobre el cuadro, de la proyección F_1 del objeto sobre el geometral, llamada **proyección horizontal**.
- Las **líneas de tierra *t* y del horizonte *h***. Son las de intersección del plano del cuadro con el geometral y con su paralelo que pasa por *V*, llamado **plano del horizonte**. La distancia h_v entre *t* y *h* se llama **altura de visión** por corresponderse con la altura sobre el suelo del ojo del observador *V*.
- La proyección ortogonal *P* del punto de vista *V* sobre el plano del cuadro, llamada **punto principal**.
- Los **puntos de distancia** Δ, situados en la línea del horizonte a una distancia δ de *P* igual a la que existe entre el punto de vista *V* y el plano del cuadro, llamada **distancia de visión**.

1.2. Características y utilidad

En la Ilustración 2 puede verse que las caras del cubo no mantienen la forma, ni el tamaño al ser proyectadas, por lo que no se pueden medir directamente las longitudes ni los ángulos. Además, como puede observarse con las aristas verticales, cuanto más alejadas del plano del cuadro estén, más se reducen las longitudes. Estas características hacen que el dibujo de perspectivas cónicas, o la obtención de verdaderas magnitudes sobre ellas, revista una especial dificultad.

Si embargo, la representación del cubo de la Ilustración 2 reviste un mayor grado de realismo que el obtenido mediante una perspectiva axonométrica. Al ser el centro de proyección V un punto propio, el observador se sitúa próximo al espacio representado, mientras que en la axonométrica está en el infinito. Si se añade que la línea del horizonte se corresponde con la que se observa en la realidad y que los tamaños de las formas dibujadas disminuyen según se alejan del punto de vista, se obtiene un sistema de representación adecuado para ver como se presentarán ante el público los espacios, edificios, esculturas ... proyectados.

La **perspectiva cónica** responde a una búsqueda de un modo de representación que se asemeje lo más posible al modo en que el ser humano ve la realidad. En este sentido, si al mirar un perspectiva cónica se desea tener la sensación de encontrarse en presencia del objeto representado, se deberá situar un único ojo abierto mirando en dirección perpendicular al **punto principal** *P*, desde una distancia igual a la de visión δ. Se obtiene así una imagen estática, al forzar al globo ocular a permanecer inmóvil observando en dicha dirección.

1.3. Representación del punto

Un punto *A* se representa mediante su proyección directa *A'* y su proyección horizontal A'_1.

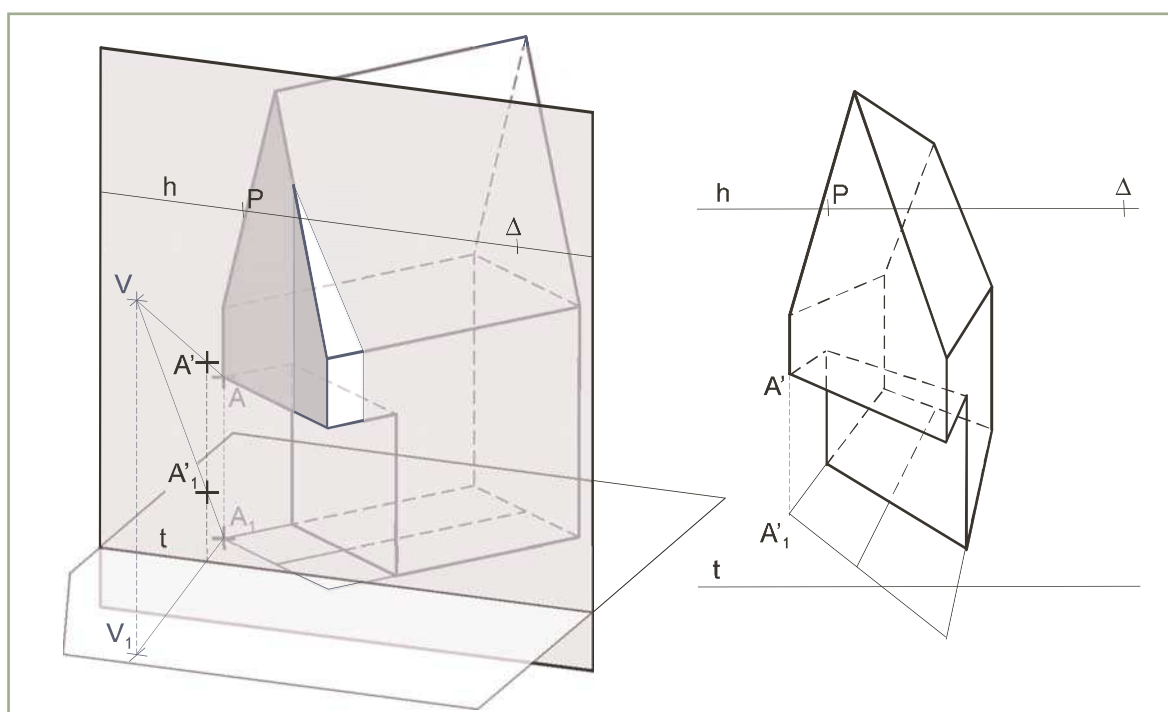


Ilustración 3

Primero se proyecta el punto *A* sobre el **plano geometral** trazando un rayo proyectante perpendicular a él, obteniendo su proyección horizontal A_1 [Ilustración 3 izquierda]. A continuación se trazan los rayos proyectantes *VA* y VA_1 que determinan en el **plano del cuadro** la proyección directa *A'* y la horizontal A'_1. La línea de referencia que las une es perpendicular a la de horizonte.

Las dos proyecciones *A'* y *A'₁*, que forman la representación del punto, aparecen situadas en el sistema de referencia espacial de la perspectiva [Ilustración 3 derecha], formado al menos por las líneas del horizonte *h* y tierra *t* y los puntos principal *P* y de distancia Δ.

1.4. Posiciones del punto

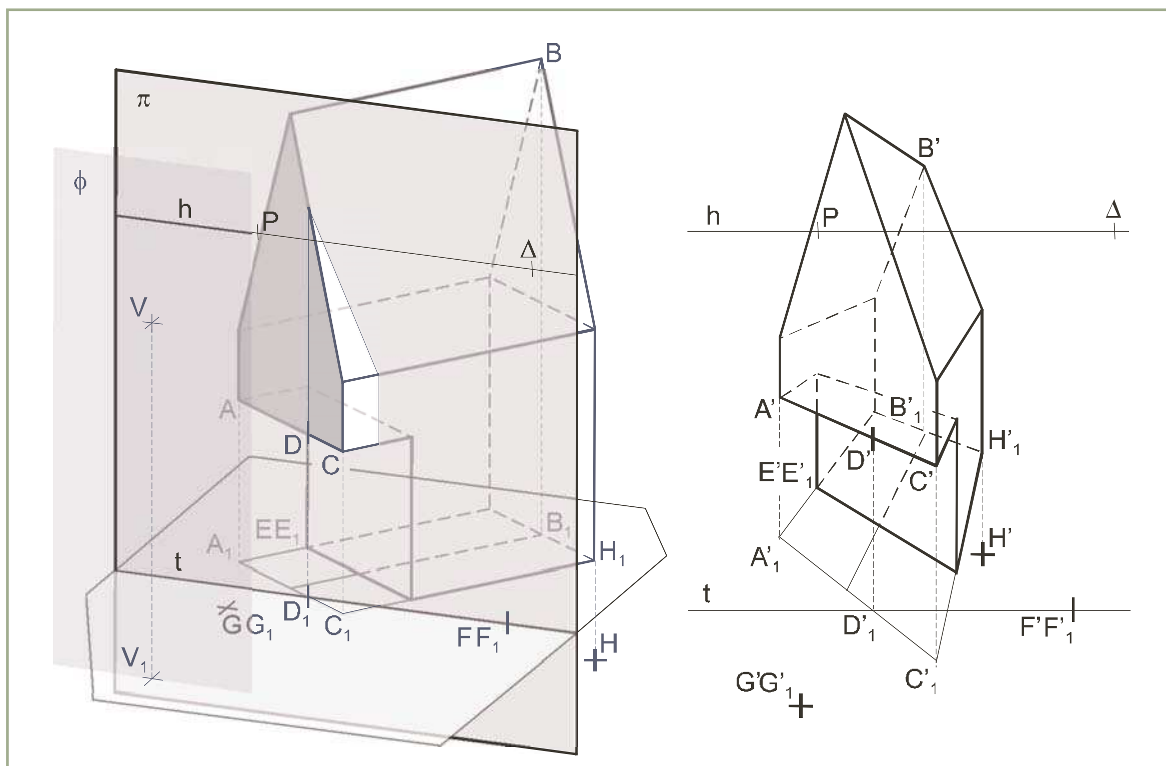


Ilustración 4

Los puntos pueden ocupar cualquier posición en el espacio; lo más común es encontrarlos situados delante de un plano paralelo al del cuadro que pasa por el punto de vista *V*, llamado de desvanecimiento ϕ por ser la perspectiva de sus puntos un punto impropio.

En la ilustración 4 izquierda se han dibujado los tipos de punto más usuales, situándolos en la perspectiva de un edificio. A su derecha aparece su representación en perspectiva cónica. Se puede observar que:

- Según que la proyección horizontal esté situada en la línea de tierra (D'_1, F'_1), debajo de ella (C'_1, G'_1) o por encima (A'_1, B'_1, E'_1, H'_1), así el punto se hallará en el plano del cuadro (*D*, *F*), delante (*C*, *G*), o detrás de él (*A*, *B*, *E*, *H*).
- Para puntos situados por encima del geometral (*A*, *B*, *C*, *D*) la proyección directa estará por encima de la horizontal, invirtiéndose su posición en los puntos situados por debajo (*H*), y coincidiendo ambas en los contenidos en él (*E*, *F*, *G*).

1.5. Representación de la recta. Puntos notables

Una recta *r* se representa mediante su proyección directa *r'* y su proyección horizontal r'_1. Sus puntos notables son las trazas T_r, G_r con los planos del cuadro y geometral y su punto impropio F_r, cuya perspectiva se llama punto de fuga.

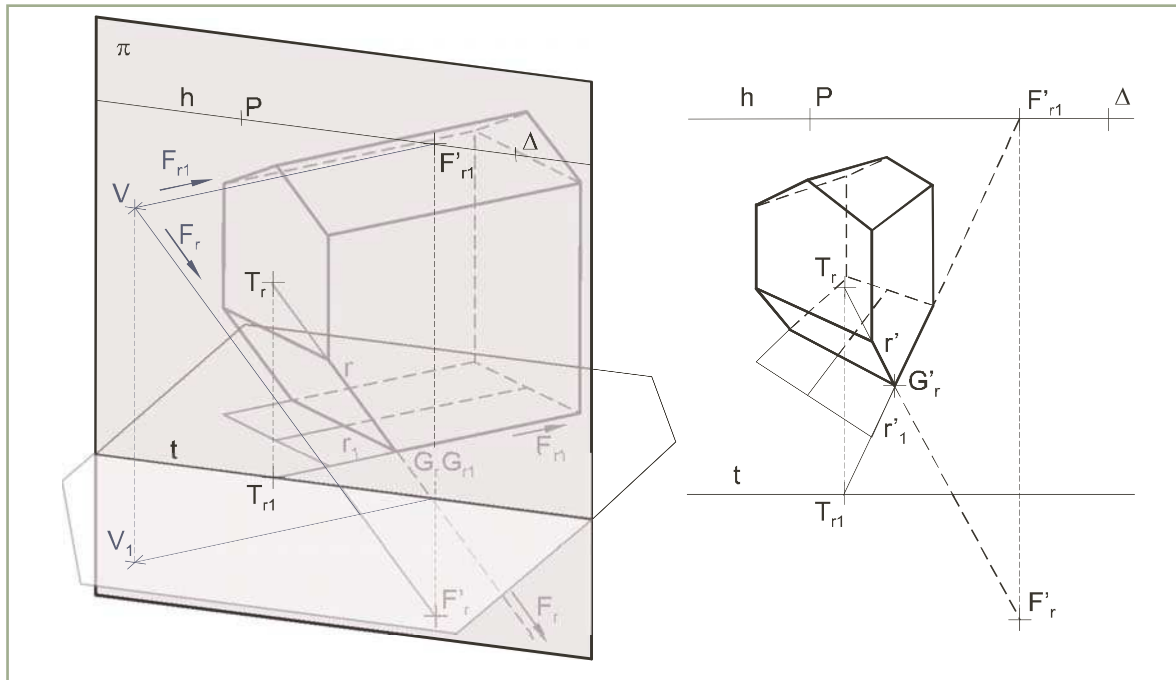


Ilustración 5

En la ilustración 5 izquierda puede verse el proceso de realización de la perspectiva cónica de un edificio. A la derecha aparece la perspectiva cónica obtenida.

Primero se ha proyectado el edificio sobre el geometral y a continuación se han obtenido desde *V* sus proyecciones directa y horizontal sobre el plano del cuadro π. Una de sus rectas, la oblicua *r* cuya proyección horizontal es r_1, presenta los siguientes puntos notables:

- La traza con el plano del cuadro T_r llamada simplemente traza de la recta, cuya proyección horizontal T_{r1} es la intersección de r_1 con la línea de tierra *t*. Su perspectiva coincide con ella por estar en el plano del cuadro, por lo que al designar sus proyecciones se prescinde de la prima.
- La traza con el geometral G_r que es el punto de corte de *r* con r_1, por lo que coincide con su proyección horizontal G_{r1}. En la perspectiva coinciden las proyecciones directa y horizontal nombrándose únicamente la primera G'_r.
- El punto impropio F_r cuya proyección horizontal F_{r1} es, a su vez, el punto del infinito de r_1. Sus proyecciones directa F'_r y horizontal F'_{r1}, llamadas puntos de fuga, son los puntos de corte con el cuadro de los rayos proyectantes trazados desde *V* paralelos a la recta *r* y a su proyección r_1.

1.6. Posiciones de la recta

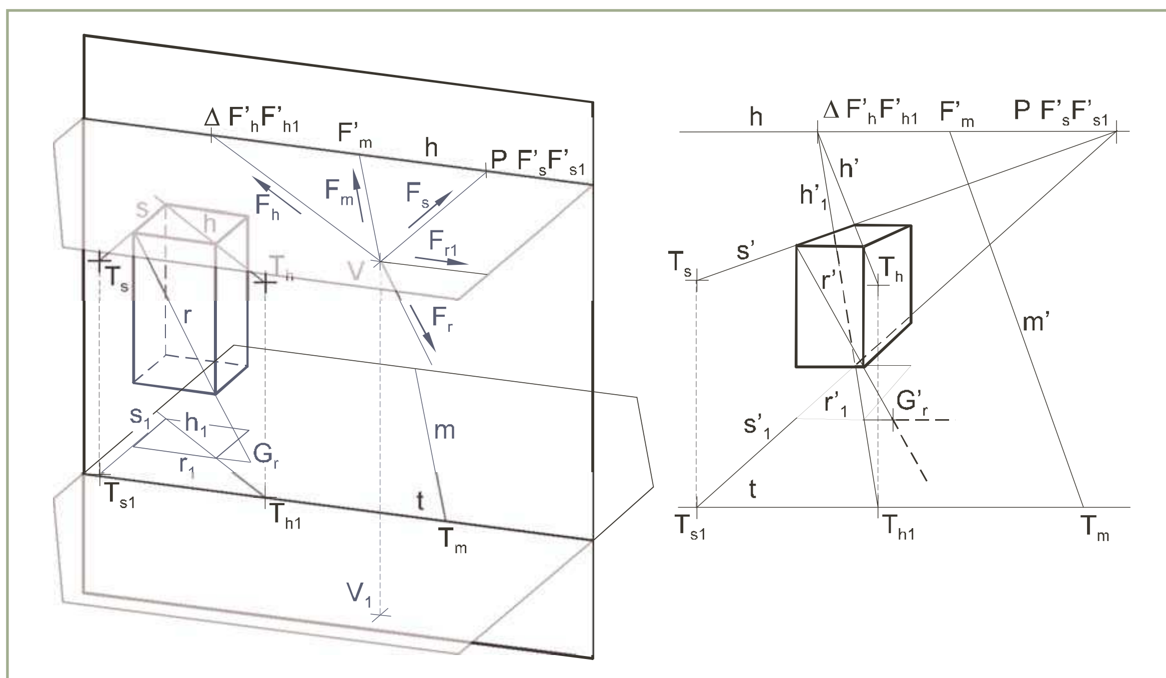


Ilustración 6

En la ilustración 6 izquierda se han dibujado los tipos de recta más usuales, situándolos en la perspectiva de un prisma de base cuadrada. A su derecha aparece su representación en perspectiva cónica. Dichas rectas son:

- Paralelas al plano del cuadro o **frontales** (*r*). El punto de fuga y la traza con el cuadro son puntos impropios por lo que la proyección directa (*r'*) se mantiene paralela a la recta real y la horizontal (r'_1) paralela a la línea de tierra.

- Paralelas al plano geometral u **horizontales** (*h*, *s*). La traza con el geometral es un punto impropio ya que la proyección horizontal (h_1, s_1) es paralela a la recta real (*h*, *s*). El punto de fuga tiene sus dos proyecciones (F'_h, F'_{h1} o F'_s, F'_{s1}) confundidas sobre la línea de horizonte. Dicho punto de fuga coincidirá con el punto principal *P* para las rectas perpendiculares al cuadro (*s*) y con el punto de distancia Δ para las que forman un ángulo de 45º con él (*h*).

- Contenidas en el geometral (*m*). Tienen las características de las horizontales, pero su representación se simplifica prescindiendo de las proyecciones horizontales de la recta, su traza y su punto de fuga, por ser coincidentes.

1.7. Paralelismo entre rectas

Dos rectas son paralelas si tienen el mismo punto de fuga.

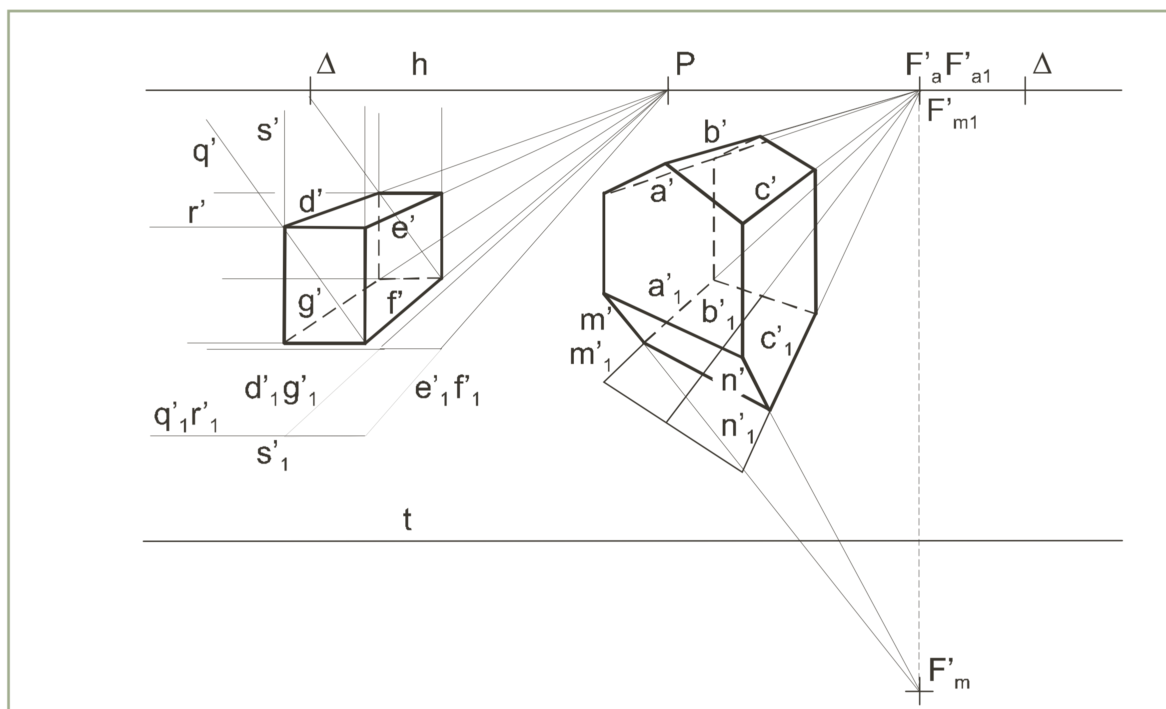


Ilustración 7

En la ilustración 7 se presentan los casos más habituales de paralelismo entre las rectas que conforman un sólido. En las figuras aparecen:

- Horizontales *a*, *b*, *c*. Las proyecciones directas *a'*, *b'*, *c'* y las horizontales a'_1, b'_1, c'_1 convergen en un punto de fuga común, cuyas proyecciones F'_a y F'_{a1} están confundidas sobre la línea de horizonte. Dicho punto de fuga coincide con el punto principal *P* para las rectas perpendiculares al cuadro (*d*, *e*, *f*, *g*).
- Oblicuas *m*, *n*. Las proyecciones horizontales m_1, n_1 son paralelas a a_1, b_1, c_1 por lo que m'_1, n'_1 y a'_1, b'_1, c'_1 comparten el punto de fuga $F'_{a1} = F'_a = F'_{m1}$. Las proyecciones directas *m'*, *n'* convergen en el punto de fuga F'_m situado sobre la línea de referencia vertical de $F'_{m1} = F'_{a1}$.
- Frontales paralelas a las rectas *q*, *r* o *s*. Las proyecciones directas y las horizontales conservan el paralelismo de las rectas reales.

1.8. Representación del plano

Un plano α se representa mediante sus trazas t_α, g_α con los planos del cuadro y geometral y su recta impropia l_α, cuya perspectiva se llama recta límite o recta de fuga.

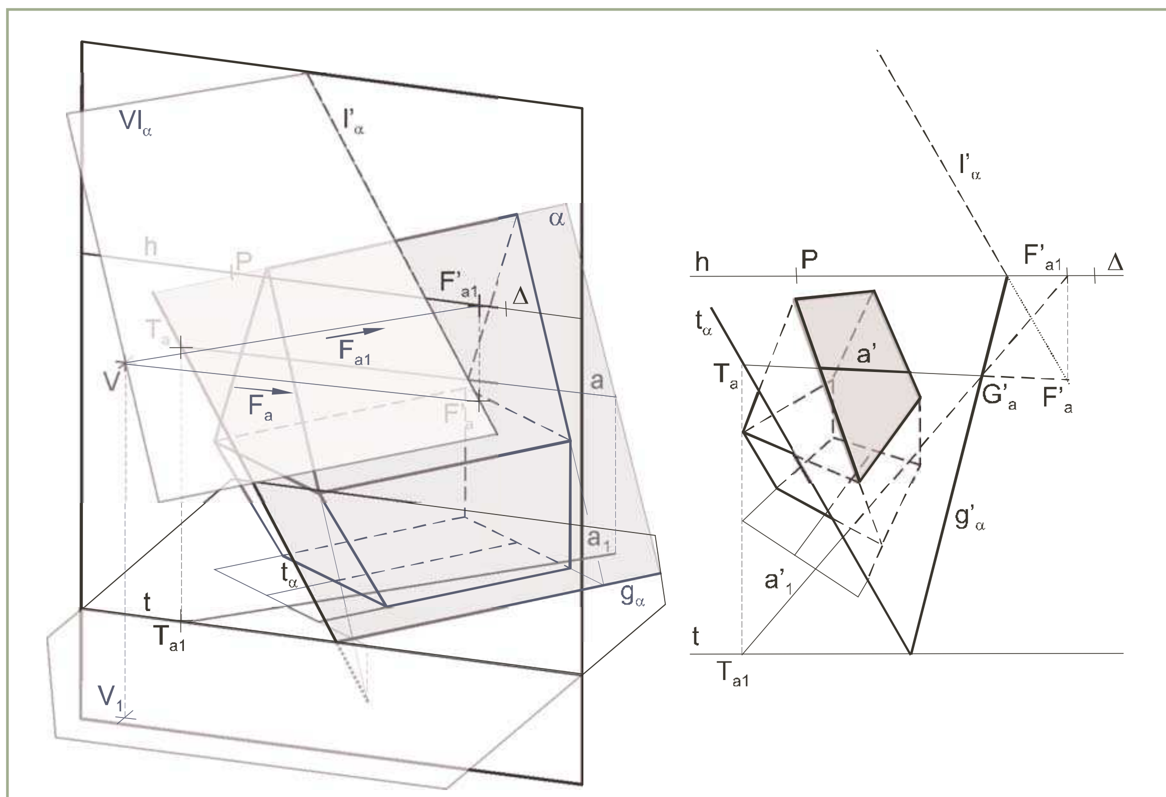


Ilustración 8

En la ilustración 8 izquierda puede verse el proceso de realización de la perspectiva cónica de un edificio. A la derecha aparece la perspectiva cónica obtenida. Para representar el plano α, determinado por un faldón del tejado, se utilizan:

- La traza con el plano del cuadro t_α llamada simplemente traza del plano α.
- La traza con el geometral g_α que coincide con su proyección horizontal $g_{\alpha 1}$. En la perspectiva coinciden las proyecciones directa y horizontal nombrándose únicamente la primera g'_α. Se corta con t_α en un punto de la línea de tierra.
- La recta impropia l_α formada por los puntos impropios del plano α. Su proyección directa l'_α , llamada recta límite o de fuga, es la recta de corte con el plano del cuadro paralelo a α que pasa por *V* (plano proyectante Vl_α de la recta impropia l_α). Su proyección horizontal es la recta impropia del geometral, que a su vez se proyecta sobre el cuadro en la línea de horizonte, pero no se indica. La recta límite l'_α corta a la traza con el geometral g'_α en un punto de la **línea del horizonte** y es paralela a la traza t_α.

La condición de pertenencia de una recta a un plano en perspectiva cónica es:

Una recta pertenece a un plano si sus trazas y punto de fuga están contenidas respectivamente en las trazas y recta límite del plano.

En la ilustración 8 la recta *a* está contenida en el plano α. Sus trazas T_a, G'_a están contenidas en t_α, g'_α, respectivamente y el punto de fuga tiene su proyección directa F'_a en l'_α y la horizontal F'_{a1} en *h*.

1.9. Posiciones del plano

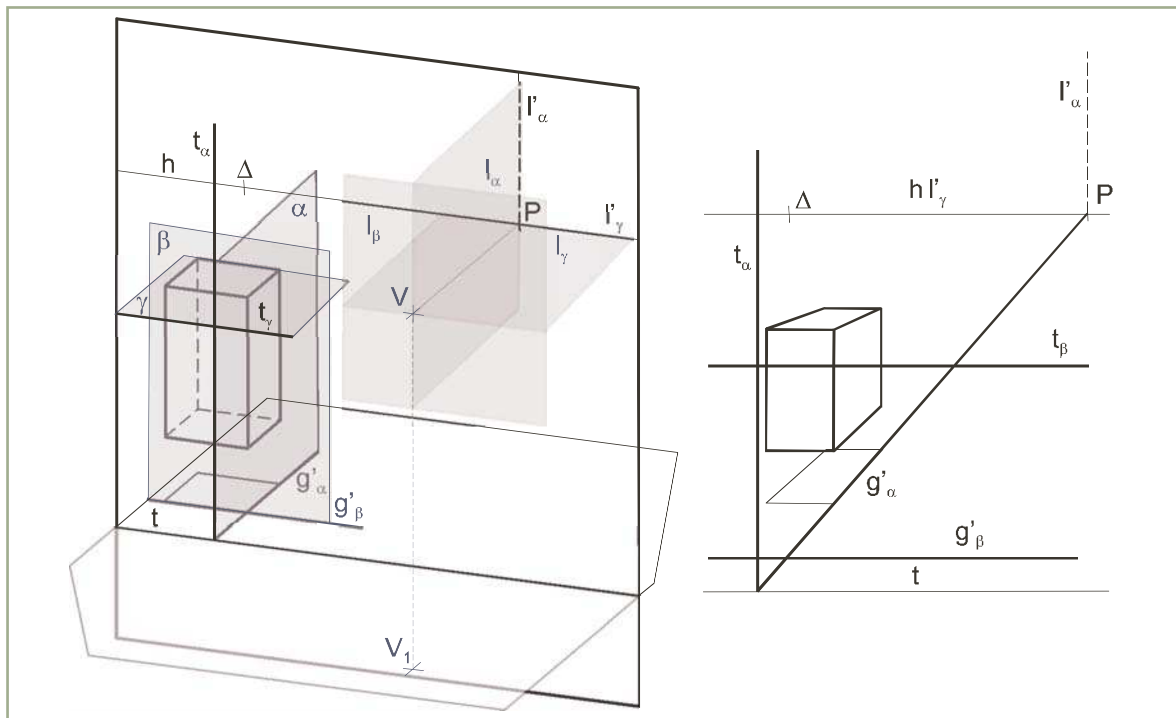


Ilustración 9

En la ilustración 9 izquierda se han dibujado los tipos de plano más usuales, situándolos en la perspectiva de un prisma de base cuadrada. A su derecha aparece su representación en perspectiva cónica. Dichos planos son:

- Perpendiculares al geometral o **verticales** (α). Su traza t_α y recta límite l'_α son perpendiculares a la línea de horizonte *h*. Si el plano es además perpendicular al cuadro la traza con el geometral g'_α fugará en *P*.
- Paralelos al plano del cuadro o **frontales** (β). La recta límite y la traza son rectas impropias y la traza con el geometral g'_β es paralela a la línea de tierra *t*. Las figuras contenidas en este tipo de planos mantienen sus ángulos y proporciones, pero no su tamaño.
- Paralelos al plano geometral u **horizontales** (γ). La traza con el geometral es una recta impropia, la traza con el cuadro t_γ es paralela a la línea de tierra y la recta límite l'_γ está en la de horizonte.

1.10. Paralelismo entre planos y entre recta y plano

Dos planos son paralelos si tienen la misma recta límite.

Una recta es paralela a un plano si su punto de fuga está contenido en la recta límite del plano.

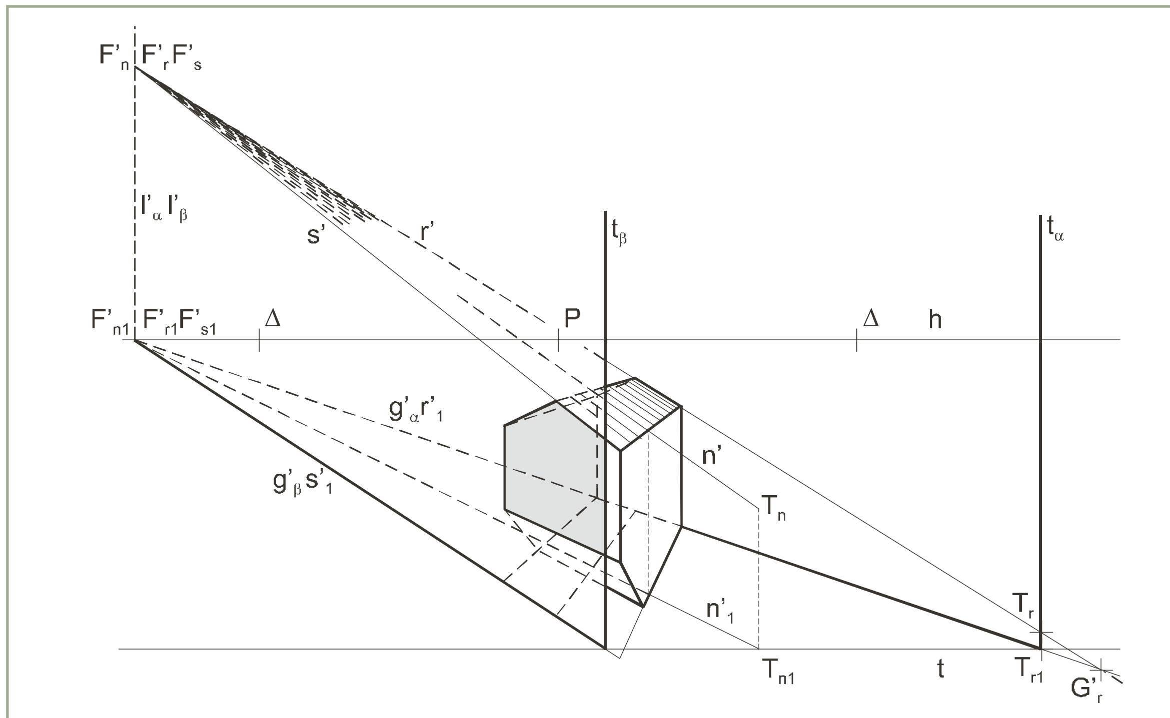


Ilustración 10

En la ilustración 10 se han representado los planos paralelos definidos por dos fachadas de un edificio y las canales del tejado que están situadas en planos paralelos a ellos. Puede verse como:

- Los planos paralelos α y β comparten la misma recta límite l'_α, por lo que sus trazas t_α, t_β son paralelas.
- La canal del tejado *n* es paralela al plano α por lo que el **punto de fuga** F'_n de su proyección directa *n'* está contenido en l'_α.

2. Perspectiva de superficies

2.1. Abatimiento del plano geometral

La proyección en el geometral de un sólido y su proyección horizontal son figuras homológicas. Al abatir el plano geometral sobre el cuadro dichas figuras se sitúan en el mismo plano, definiéndose una homología entre figuras coplanarias.

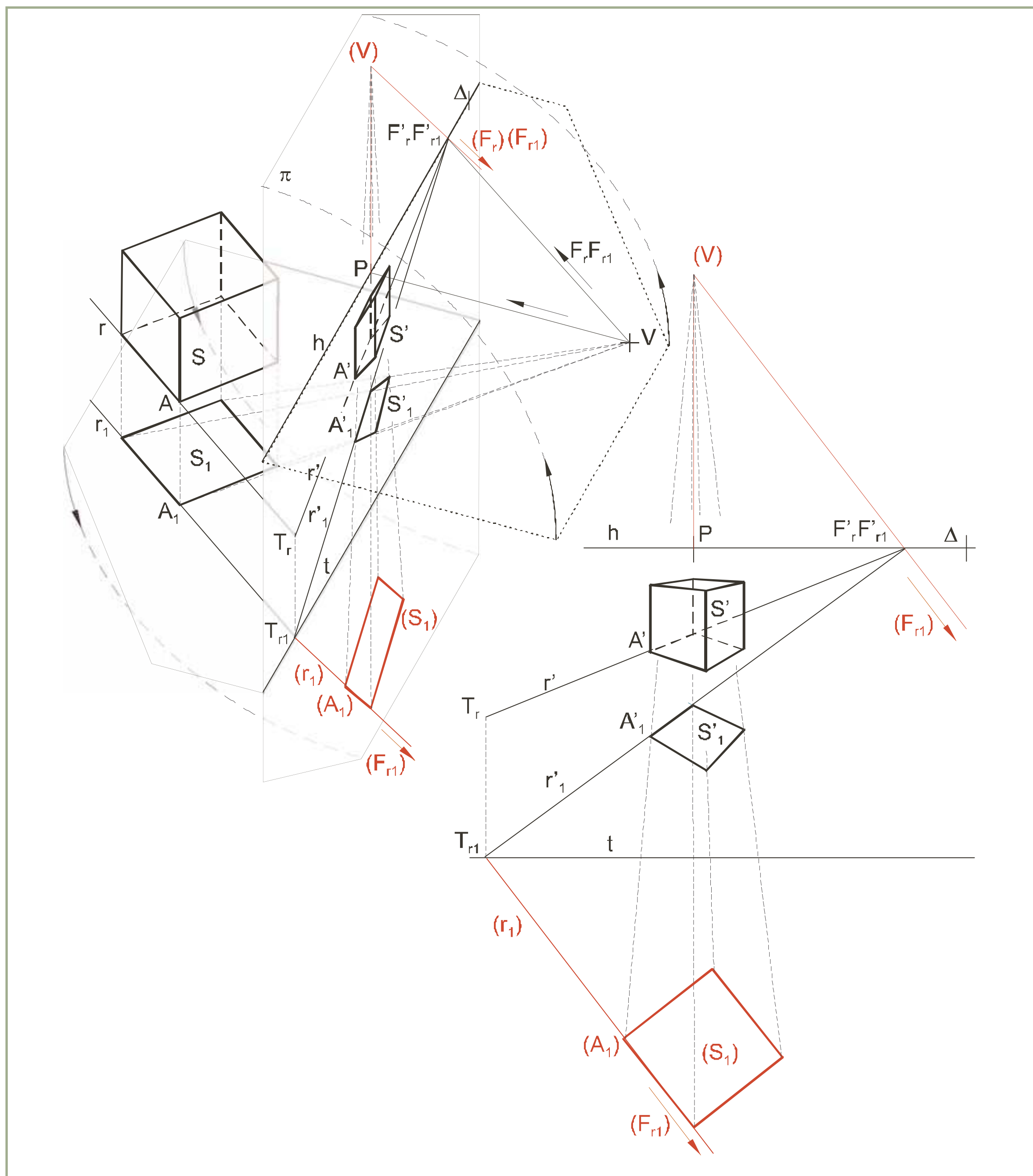


Ilustración 11

En la ilustración 11 izquierda puede verse el proceso de realización de la perspectiva cónica de un cubo. A la derecha aparece la perspectiva cónica obtenida.

Al abatir simultáneamente y en el mismo sentido el plano geometral y el **plano del horizonte** sobre el cuadro, usando como charnela las líneas de tierra *t* y del horizonte *h* respectivamente, se define una homología en la que:

- La proyección horizontal S'_1 del cubo y la proyección sobre el geometral abatida (S_1) son figuras homólogas.
- El centro de proyección abatido *(V)* es el centro de homología.
- La línea de tierra *t* es el eje de homología.
- La línea del horizonte *h* es la recta límite de la proyección horizontal S'_1.

En dicha homología se puede obtener el homólogo (A_1) de la proyección horizontal A'_1 de un punto *A* del cubo mediante el siguiente procedimiento:

- La proyección horizontal r'_1 de la recta *r*, que contiene el punto *A*, tiene un punto doble T_{r1} (traza) en el eje de homología *t* y otro punto F'_{r1} (punto de fuga) en la recta límite *h*.
- Su homóloga (r_1) pasa por T_{r1} y es paralela a la dirección $(V)F'_{r1}$ del punto impropio (F_{r1}), homólogo de F'_{r1}.
- El punto de corte de la recta $(V)A'_1$ con (r_1) es (A_1).

Se pueden obtener por este procedimiento los homólogos de los demás puntos y rectas de la proyección horizontal S'_1, hasta completar el abatimiento (S_1) en el cuadro de la proyección S_1 del cubo sobre el geometral. Procediendo a la inversa puede obtenerse la proyección horizontal S'_1 de la representación en perspectiva cónica del cubo.

2.2. Perspectiva cónica, mediante abatimiento, de un hexágono situado en el plano geometral

Sea *r* el radio de la circunferencia circunscrita del hexágono regular, δ la distancia de visión y h_v la altura de visión [Ilustración 12].

Se traza la línea de horizonte *h* y paralela a ella, a la distancia h_v, la de tierra *t.* Se elige un punto cualquiera de *h* como punto principal *P* y se traza por él, perpendicular a *h*, la dirección de abatimiento de *V*. Se transporta la distancia δ sobre ella, a partir de *P*, obteniendo *(V)*.

Se traza sobre el geometral abatido la circunferencia circunscrita, con radio *r* y el centro que se desee, construyendo el hexágono regular inscrito a partir de un diámetro perpendicular a la línea de tierra *t*. Al estar el hexágono contenido en el plano geometral su abatimiento y su proyección directa son figuras homólogas, siendo *t* el eje de homología, *(V)* el centro y *h* la recta límite.

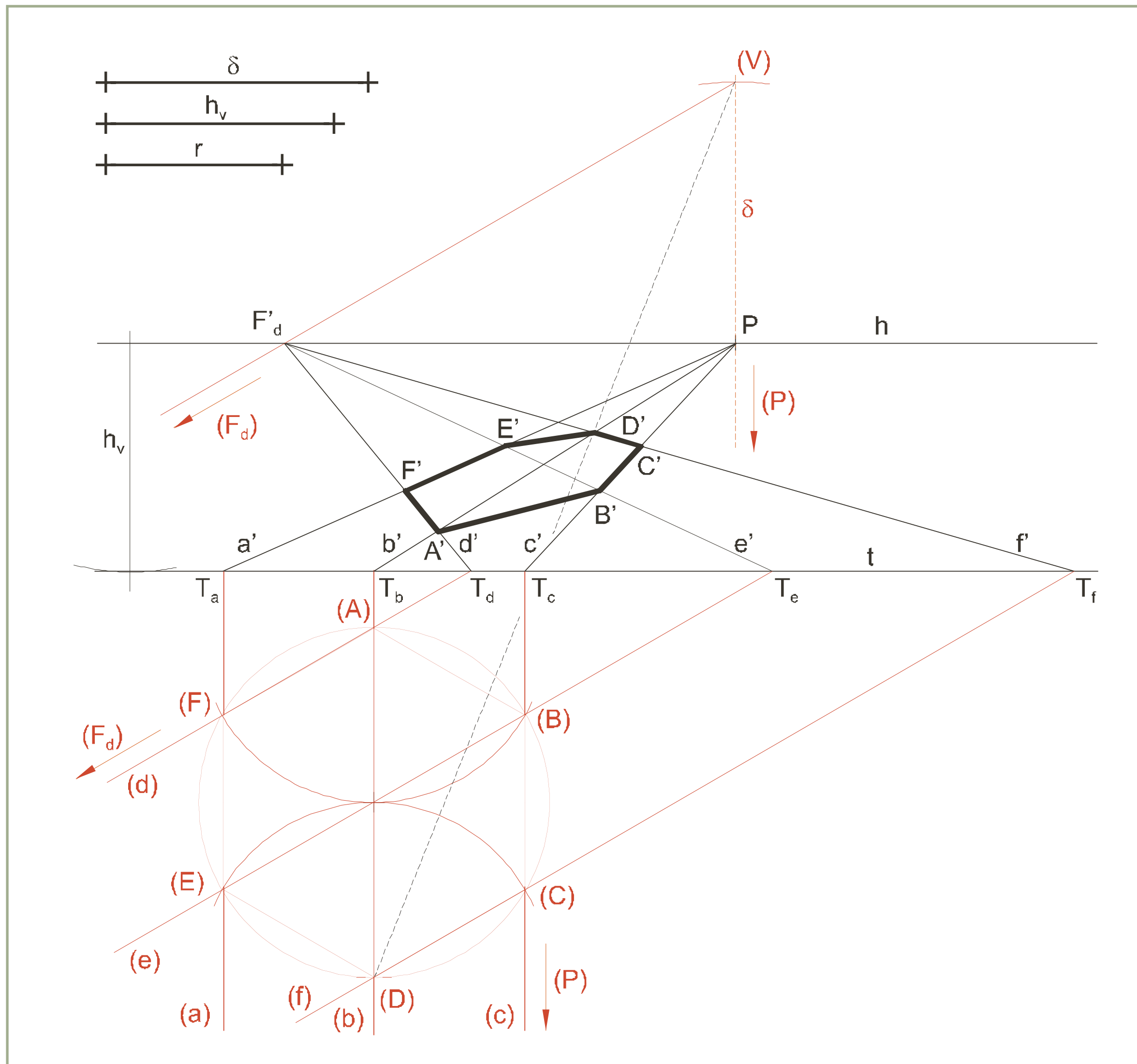


Ilustración 12

Se trazan por los vértices del hexágono las rectas *(a)*, *(b)*, *(c)* perpendiculares a *t*, cuyo punto impropio es *(P)* y cuyas trazas T_a, T_b, T_c son puntos dobles. Sus homólogas *a'*, *b'*, *c'* están definidas por dichas trazas y por el punto principal *P*, homólogo de *(P)*.

El homólogo *D'* de cualquier vértice *(D)* del hexágono puede obtenerse en el punto de corte de *b'* con la recta *(V)(D)*, pero es más exacto determinarlas mediante su intersección con las rectas *d'*, *e'*, *f'*, homólogas de *(d)*, *(e)*, *(f)*. La paralela a éstas trazada por (*V*) corta a *h* en el homólogo F'_d (punto de fuga) de su punto impropio (F_d).

2.3. Perspectiva cónica, mediante abatimiento, de una circunferencia situada en el plano geometral o en otro paralelo a él

Sea *r* el radio de la circunferencia, δ la distancia de visión, h_v la altura de visión y t_α, l'_α la traza y recta límite de un plano horizontal [Ilustración 13].

Se traza la línea de horizonte *h* y paralela a ella, a la distancia h_v, la línea de tierra *t*. Se elige un punto cualquiera de *h* como punto principal *P* y se traza por él, perpendicular a *h*, la dirección de abatimiento de *V*. Se transporta la distancia δ sobre ella, a partir de *P*, obteniendo *(V)*.

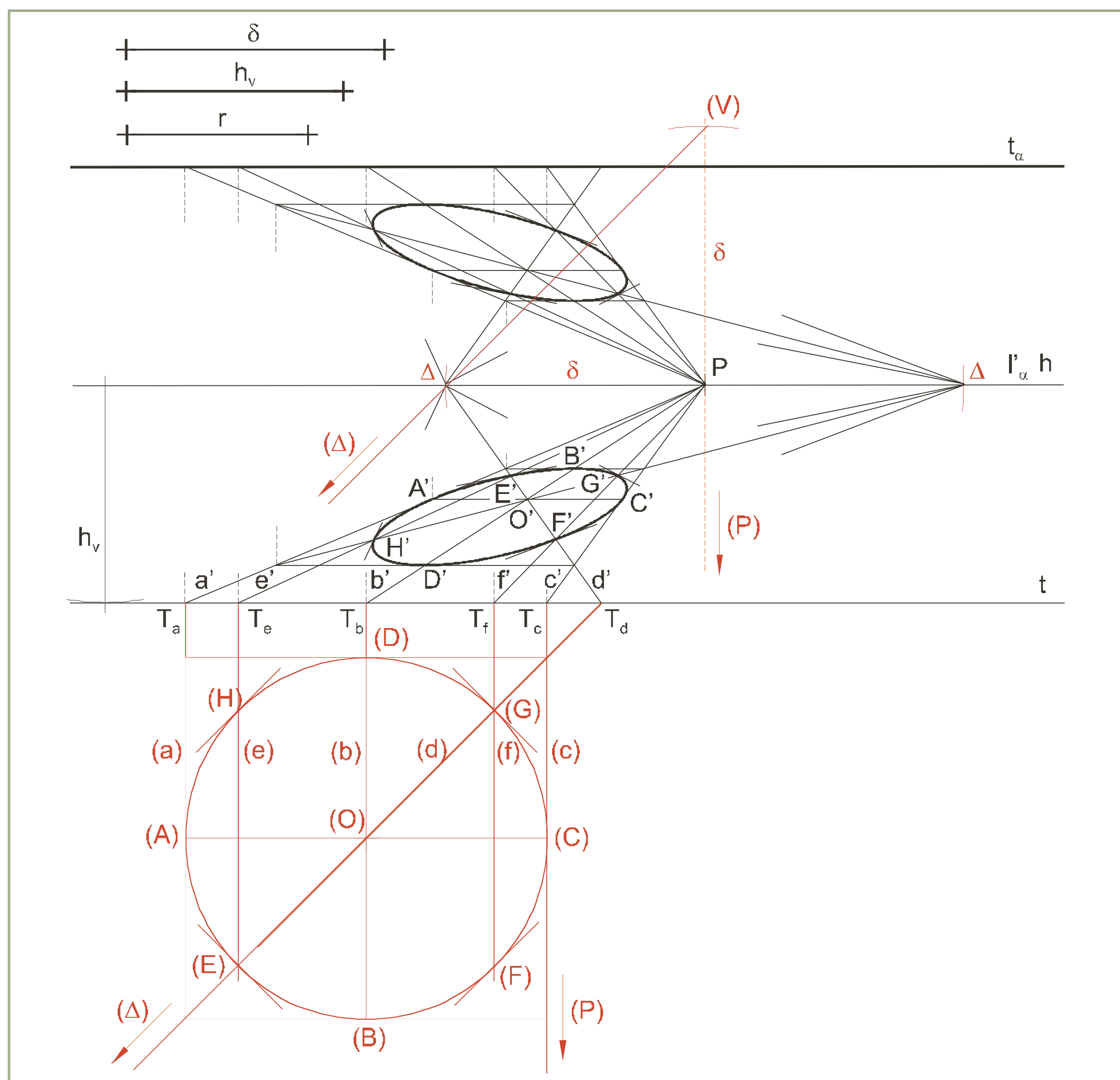


Ilustración 13

Se traza sobre el geometral abatido la circunferencia, con radio *r* y el centro que se desee; un diámetro *(A)(C)* paralelo a la línea de tierra y otro *(B)(D)* perpendicular a ella; y el cuadrado formado por las tangentes en sus extremos. Una de sus diagonales *(d)* corta a la circunferencia en *(E)*, *(G)*, trazando por ellos las rectas *(e)*, *(f)* perpendiculares a *t* se determinan otros dos puntos *(F)*, *(H)*.

Al estar la circunferencia contenida en el plano geometral su abatimiento y su proyección directa son figuras homólogas, siendo *t* el eje de homología, *(V)* el centro y *h* la recta límite. Obteniendo los homólogos de los ocho puntos y las tangentes a la curva en ellos se podrá trazar su perspectiva.

Las homólogas *a'*, *e'*, ... de las rectas *(a)*, *(e)*, *(b)*, *(f)*, *(c)* pasan por las trazas T_a, T_e, ... y por el punto principal *P*, homólogo de su punto impropio *(P)* y situado por tanto en su recta límite *h*. La homóloga *d'* de la diagonal *(d)*, que forma 45º con *h*, pasa por T_d y por el punto de medida Δ, homólogo de su punto impropio, ya que $\overline{P\Delta} = \overline{P(V)}$. Las paralelas a *t* trazadas por los puntos de corte de *d'* con *a'*, *b'*, *c'* completan la perspectiva de los diámetros y sus tangentes. Sus dos diagonales cortan a *e'*, *f'* en *E'*, *F'*, *G'*, *H'*, por los que pasan tangentes a la curva paralelas a ellas y por tanto convergentes en los puntos de medida Δ.

Para situar la circunferencia en un plano horizontal se procederá de manera análoga aunque sustituyendo la línea de tierra *t* por la traza del plano t_α.

2.4. Puntos de medida de rectas horizontales

Punto de medida de una recta es el de fuga de rectas paralelas (rectas de medida) que interceptan segmentos iguales sobre la recta y sobre la traza del plano que determinan (plano de medida). Para obtener la verdadera magnitud de un segmento representado en perspectiva cónica se trazan rectas de medida por sus extremos y se mide la distancia entre sus trazas.

En la ilustración 14 puede verse el proceso de realización de la perspectiva cónica de un edificio. A la derecha aparece la perspectiva cónica obtenida.

Para medir la longitud del alero *AB*, situado en la horizontal *r*, deben trazarse dos rectas de medida *m*, *n* que intercepten segmentos iguales $\overline{AB}$ y $\overline{T_mT_n}$ sobre *r* y sobre la traza del plano de medida t_α. El cuadrilátero ABT_nT_m es un trapecio isósceles pues tiene dos bases *m*, *n* paralelas y dos lados *AB*, T_nT_m iguales. Los rayos proyectantes VF'_r, VF'_m trazados desde *V* para obtener los puntos de fuga de las rectas *r* y *m*, forman con la línea de horizonte *h* un triángulo $VF'_rF'_m$ semejante al isósceles BT_nT_r. Al punto de fuga de *m* y *n* se le llama de medida de *r* y se escribe M_r en lugar de F'_m.

Así pues el **punto de medida** M_r de una recta horizontal *r* está situado sobre la línea del horizonte *h*, y dista de su punto de fuga F'_r lo mismo que éste del punto de vista *V*. Para dibujarlo se abate *V* y se traza un arco de centro F'_r y radio $(F'_r)(V)$ que corta a *h* en el punto de medida M_r. Existe un punto de medida a cada lado de F'_r.

En particular, **el punto de medida de las rectas perpendiculares al plano del cuadro, cuyo punto de fuga es *P*, son los puntos Δ situados a la distancia de visión δ respecto a él.**

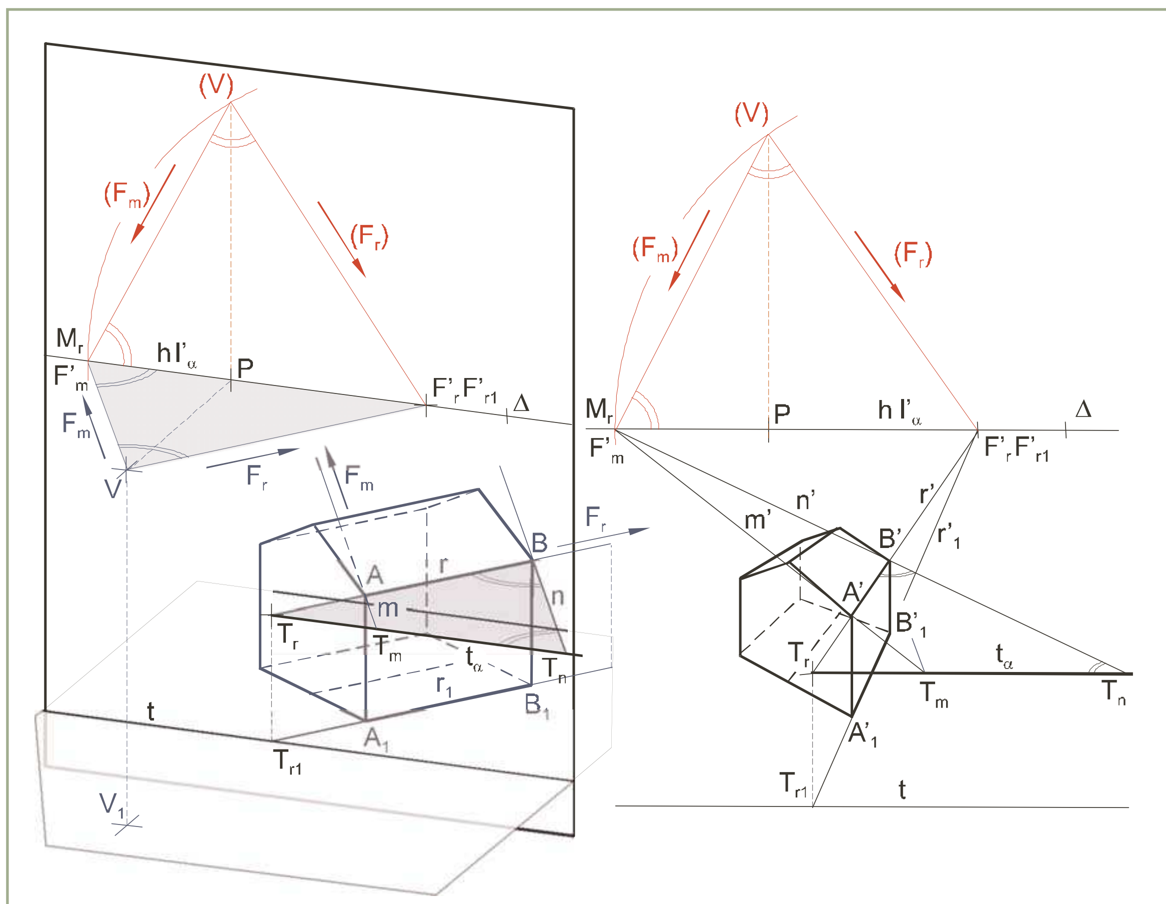


Ilustración 14

2.5. Puntos de medida de rectas frontales

Para obtener la verdadera magnitud de un segmento representado en perspectiva cónica y situado en posición frontal, se mide la distancia entre las trazas de dos rectas paralelas que pasen por sus extremos. Lo más sencillo es utilizar rectas horizontales.

En la ilustración 15 se presentan los casos más habituales de obtención de la verdadera magnitud de segmentos situados en posición frontal. En las figuras aparecen:

Segmento vertical $\overline{MN}$. Se elige un punto de fuga $F'_m = F'_n$ cualquiera sobre h y se trazan desde él las proyecciones directas *m'*, *n'* pasando por *M'*, *N'* y las horizontales $m'_1 = n'_1$ pasando por $M'_1 = N'_1$. Éstas últimas cortan a la línea de tierra *t* en $T_{m1} = T_{n1}$, cuya línea de referencia corta a *m'*, *n'* en las trazas T_m, T_n. El segmento definido por ellas es la medida de $\overline{MN}$.

Segmento frontal $\overline{AB}$ y horizontal $\overline{AC}$. En este caso se elige *P* como punto de fuga por lo que las rectas *a*, *b*, *c* empleadas serán perpendiculares al cuadro, pero se procede de manera análoga.

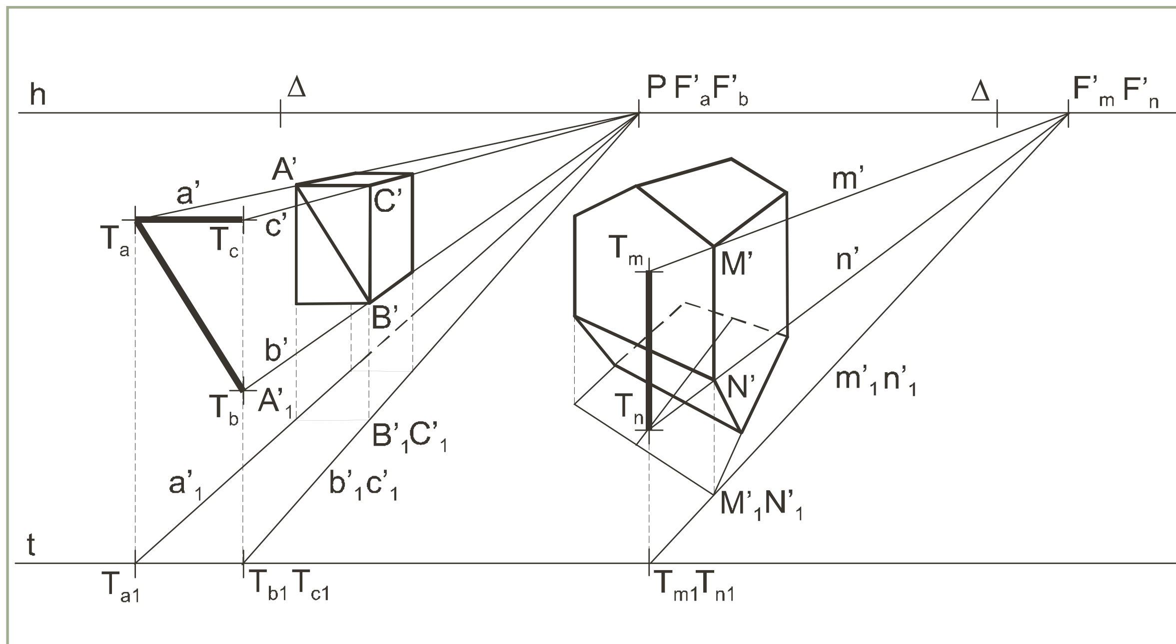


Ilustración 15

2.6. Perspectiva cónica del cono recto utilizando puntos de fuga y métricos

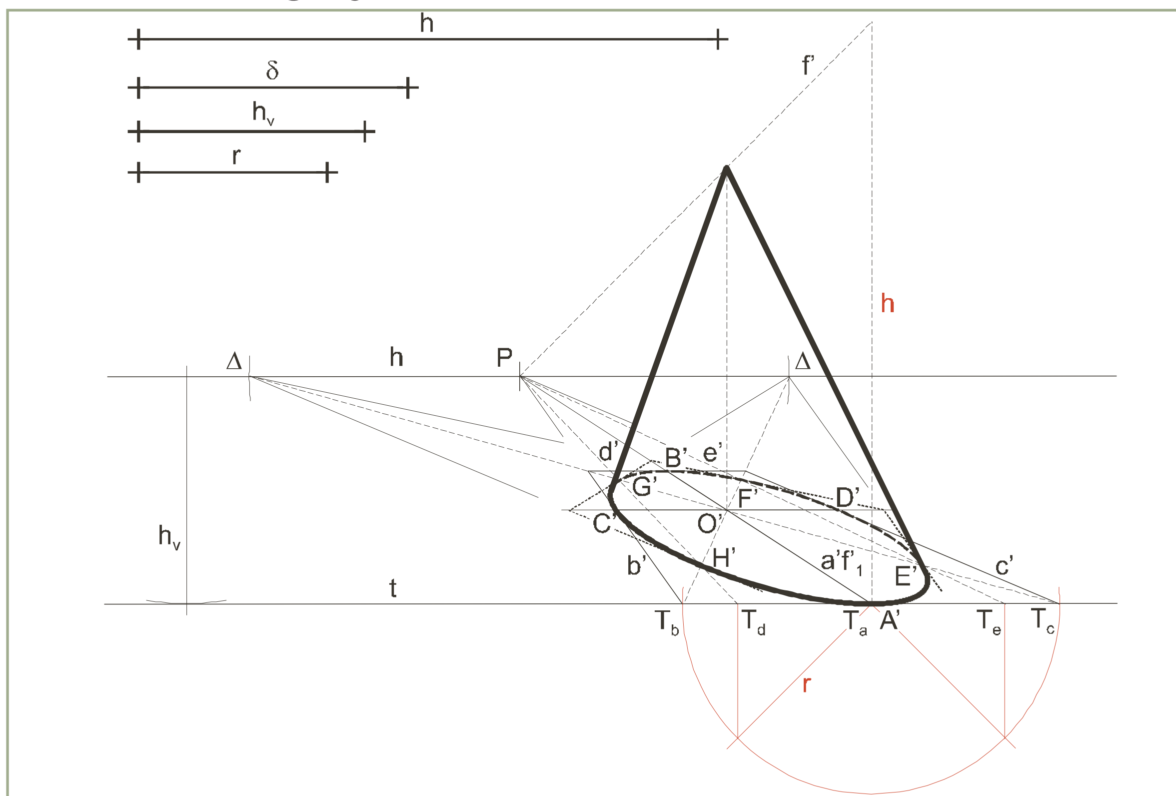


Ilustración 16

Sea *r* el radio de la base del cono recto, *h* la altura, δ la distancia de visión y h_v la altura de visión [Ilustración 16].

Se traza la línea del horizonte *h* y paralela a ella a la distancia h_v, la de tierra *t.* Se sitúa en *h* el punto principal *P* y los puntos Δ separados de él la distancia de visión δ.

Se elige situar la base sobre el plano geometral, tangente a la línea de tierra *t*, en un punto cualquiera *A*. Para construir su perspectiva es preciso trazar antes dos diámetros, *CD* perpendicular y paralelo a *t* y las tangentes en sus extremos.

Una semicircunferencia de radio *r* y centro *A'* sitúa la longitud del diámetro en *t*, cuyos extremos son la trazas T_b, T_c de las tangentes *b*, *c*, siendo A' la traza T_a de la recta base *a* del diámetro *AB*. Se trazan las proyecciones directas *a'*, *b'*, *c'*, que fugan en *P* y dos rectas de medida de trazas T_b, T_c desde sus puntos de medida Δ, que determinan las medidas de los radios en perspectiva, aportando el centro *O* por el que se traza el diámetro *CD* y la tangente posterior.

Las perpendiculares a *t* por los puntos de corte con la semicircunferencia anteriormente dibujada, de dos radios a 45º de centro *A'*, determinan las trazas T_d, T_e de las rectas *d*, *e*, cuyas perspectivas *d'*, *e'* cortan a las rectas de medida en *E'*, *F'*, *G'*, *H'*. Las tangentes en dichos puntos fugan en Δ y ayudan en el trazado a mano alzada de la elipse que es perspectiva de la circunferencia.

La altura del cono puede transportarse sobre una perpendicular a *t* en *A'* y situarla en perspectiva sobre el eje levantado en *O'* mediante dos paralelas *a'* y *f'*. Las tangentes a la curva trazadas desde el vértice forman el contorno aparente del cono.

2.7. Perspectiva cónica del octaedro utilizando puntos de fuga y métricos

Sea *l* la arista del octaedro situado con una diagonal perpendicular al geometral a una altura *k* y un vértice en el plano del cuadro, α y 90 - α los ángulos que las aristas horizontales forman con el cuadro, δ la distancia de visión y h_v la altura de visión [Ilustración 17].

Se traza la línea del horizonte *h* y paralela a ella, a la distancia h_v, la línea de tierra *t.* Se elige un punto cualquiera de *h* como punto principal *P* y se traza por él, perpendicular a *h*, la dirección de abatimiento de *V*. Se transporta la distancia δ sobre ella, a partir de *P*, obteniendo *(V)*. Se trazan dos rayos proyectantes desde *(V)* que formen ángulos α y 90 - α con (V)P determinando los puntos de fuga F'_a, F'_b de las aristas horizontales. Arcos de radios $F'_a(V)$, $F'_b(V)$ y centros F'_a, F'_b cortan a la línea del horizonte *h* en los puntos de medida M_a, M_b.

Primero se dibuja la proyección horizontal del octaedro, después se levantan sus vértices a las alturas correspondientes para situarlos en perspectiva.

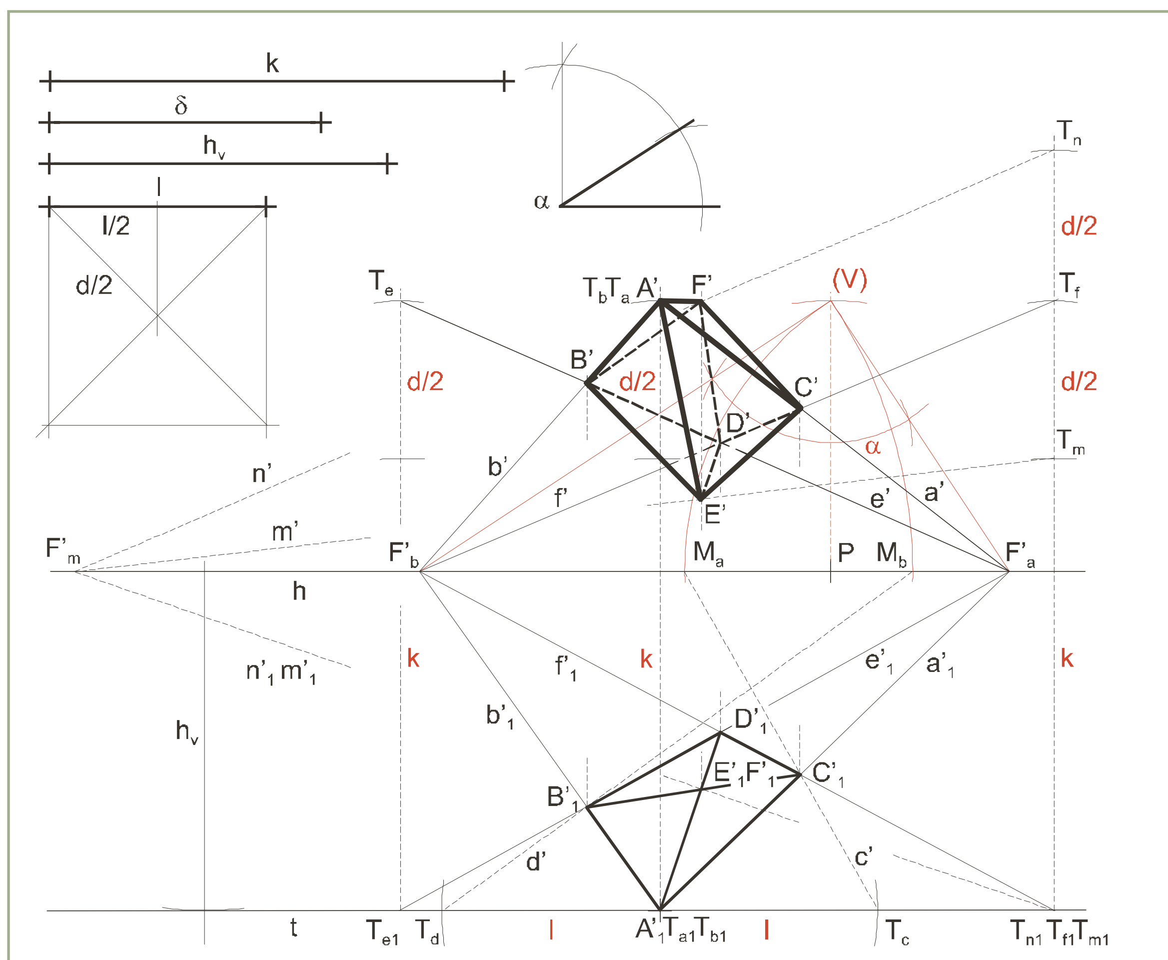


Ilustración 17

Se elige un punto de *t* como proyección horizontal A'_1 del vértice que está en contacto con el plano del cuadro y se trazan desde él las proyecciones horizontales a'_1, b'_1 de las rectas base de las aristas horizontales *a*, *b* que concurren en A y fugan en F'_a, F'_b. Se transporta *l* sobre *t*, a ambos lados de $A'_1 = T_{a1} = T_{b1}$, para situar las trazas T_c, T_d de las rectas de medida *c'*, *d'* que cortan a a'_1, b'_1 en las proyecciones horizontales C'_1, B'_1 de los vértices *C*, *B*. Las proyecciones horizontales e'_1, f'_1 de las otras dos rectas base de las aristas horizontales que concurren en *D* pasan por B'_1, C'_1 y fugan en F'_a, F'_b. Se completa la proyección horizontal del octaedro con las diagonales $A'_1D'_1$, $B'_1C'_1$, que determinan E'_1, F'_1.

Las trazas $T_a = T_b$, T_e, T_f de las proyecciones directas *a'*, *b'*, *e'*, *f'* están situadas en las líneas de referencia de $T_{a1} = T_{b1}$, T_{e1}, T_{f1} a una distancia de ellas igual a $k + d/2$ siendo *d* la diagonal del octaedro, que se obtiene del cuadrado de lado *l*. Se dibujan *a'*, *b'*, *e'*, *f'* uniendo sus trazas con sus puntos de fuga F'_a, F'_b según corresponda, obteniéndose las perspectivas de los vértices *A'*, *B'*, *C'*, *D'* en sus puntos de corte.

Los vértices inferior *E* y superior *F* se obtienen trazando por E'_1, F'_1 las proyecciones horizontales m'_1, n'_1 de dos rectas horizontales *m*, *n*, coincidiendo las proyecciones horizontales $T_{m1} = T_{n1}$ de sus trazas con T_{f1} y siendo su punto de fuga $F'_m = F'_n$ el de corte de m'_1, n'_1 con *h*. Las trazas T_m y T_n se encuentran en la línea de referencia de $T_{m1} = T_{n1}$ a las alturas *k* y $k + d$. Las proyecciones directas m', n' cortan a la línea de referencia de $E'_1 = F'_1$ en *E'*, *F'*. Para discriminar aristas vistas y ocultas nos atenemos a la proyección horizontal.

2.8. Intersección de un sólido poliédrico por un plano oblicuo

Sea un octaedro y un plano oblicuo α representados en perspectiva cónica, y sean *P*, Δ, *h*, *t* los elementos que la definen [Ilustración 18].

Para hallar la intersección con las aristas que forman el cuadrado *A'F'C'E'* se traza el plano β que lo contiene. Su traza con el geometral g'_β coincide con las proyecciones horizontales de dichas aristas, la traza t_β es perpendicular a *t* y l'_β paralela a t_β. Su recta *a* de intersección con α se obtiene uniendo los puntos de corte de t_α y t_β con los de l'_α y l'_β. Dicha recta corta a *A'E'* y *C'F'* en dos puntos de la sección.

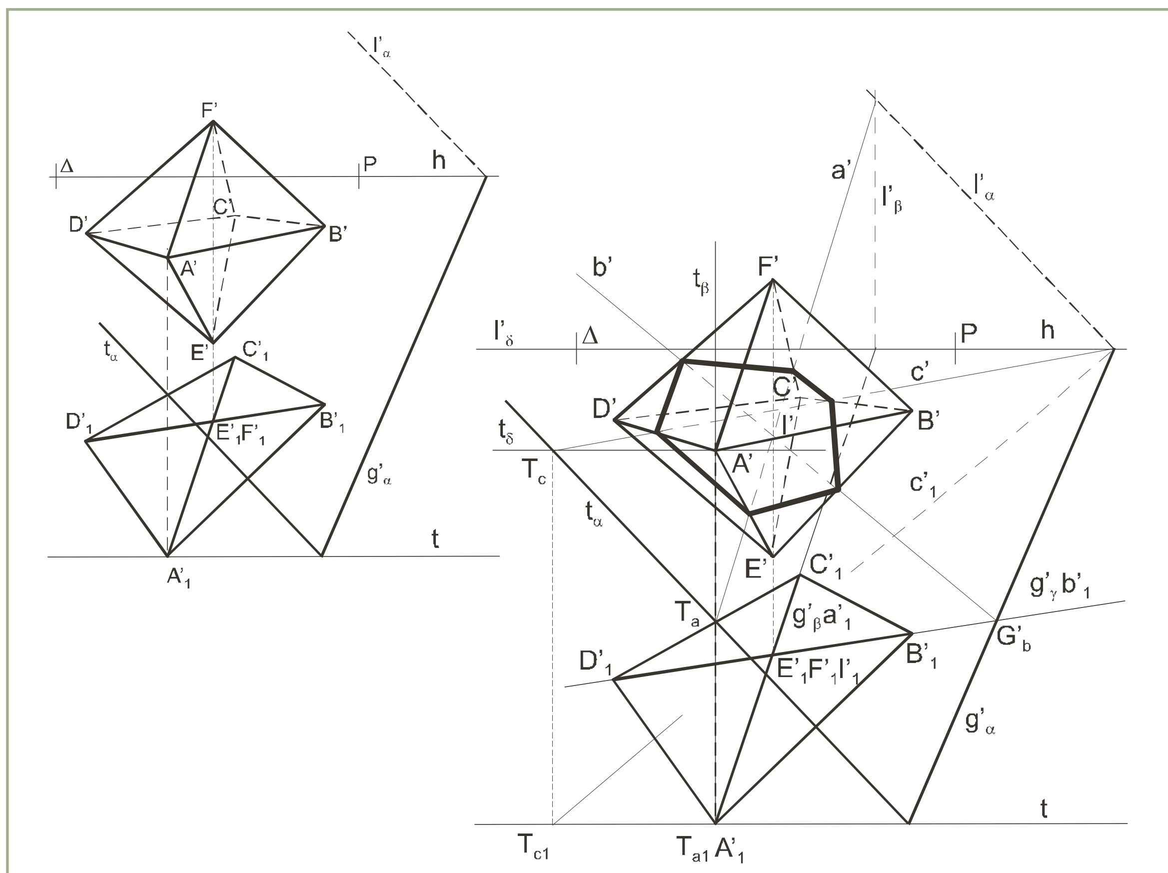


Ilustración 18

Para hallar la intersección con las aristas que forman el cuadrado *A'B'C'D'* se traza el plano horizontal δ que lo contiene. Su traza con el cuadro t_δ es paralela a *t* y pasa por la proyección directa *A'* del punto de contacto con el cuadro y su recta límite l'_δ coincide con *h*. Su recta *c* de intersección con α se obtiene uniendo los puntos de corte de t_α y t_δ con los de l'_α y l'_δ. Dicha recta corta a *A'D'* y *C'B'* en dos puntos de la sección.

El plano vertical γ, cuya traza g'_γ con el geometral coincide con $E'_1D'_1F'_1B'_1$ contiene las cuatro aristas restantes que forman el cuadrado *E'D'F'B'*. La perspectiva *b'* de su recta intersección une el punto de corte de g'_α, g'_γ con el de *a'*, *E'F'*. La recta obtenida G'_bI' corta a *E'B'* y *D'F'* en los últimos dos puntos de la sección, que unidos a los anteriores forman un hexágono.

2.9. Intersección de una superficie de revolución con una recta

Sea un cono recto y una recta oblicua *r* representados en perspectiva cónica, y sean *P*, Δ, *h*, *t* los elementos que la definen [Ilustración 19].

Para hallar la intersección de la superficie cónica con la recta *r* se traza el plano α que la contiene y pasa por el vértice *V*. La paralela *s* a *r* trazada por *V* define junto con *r* el plano α. Su punto de fuga coincide con el de *r* y su traza con el cuadro T_s se obtiene mediante una línea de referencia trazada en el punto de corte de s'_1 y *t*, que es su proyección horizontal T_{s1}.

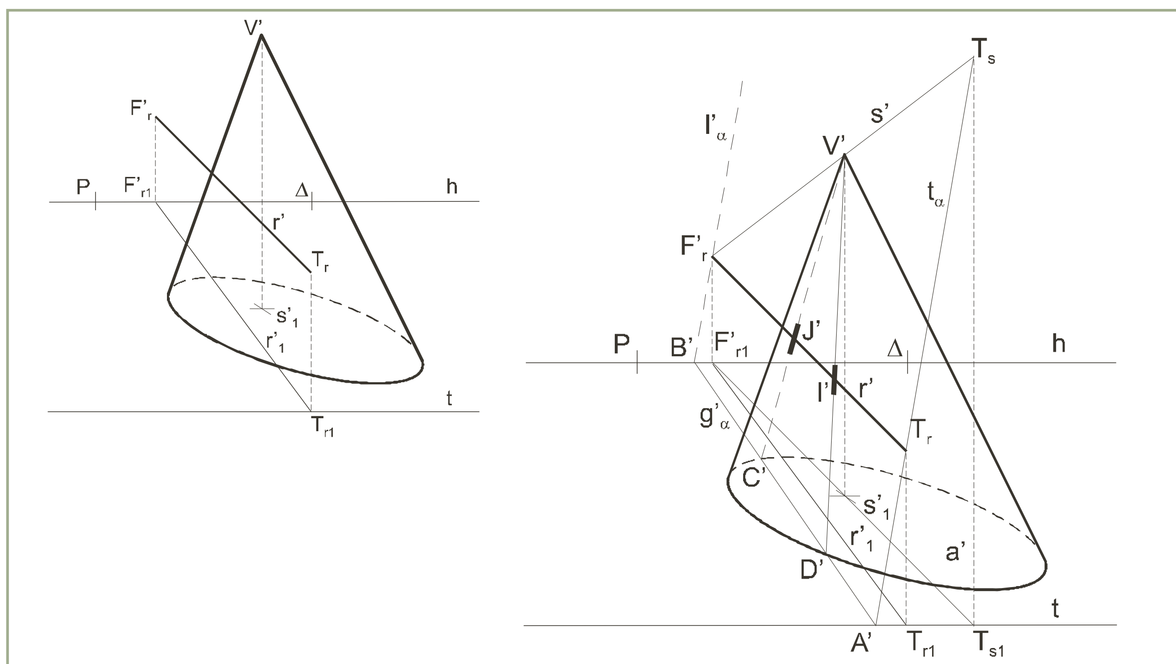


Ilustración 19

La traza t_α pasa por T_r, T_s y corta a *t* en *A'*; l'_α es paralela a ella, pasa por F'_r y corta a *h* en *B'*, que unida con *A'* es la traza con el geometral g'_α. Por los puntos de corte *C'*, *D'* de la perspectiva de la base con g'_α pasan las generatrices *C'V'*, *D'V'* que determinan los puntos de corte *I'*, *J'* con la recta *r*.

3. Perspectiva cónica de exteriores

3.1. Perspectiva cónica central y oblicua

Atendiendo a la disposición del plano del cuadro respecto del objeto o espacio representado la perspectiva cónica se llamará [Ilustración 20]:

- Oblicua, cuando el plano del cuadro está en posición oblicua respecto a las caras o planos del objeto representado. Para edificios o espacios asimilables al ortoedro, de las líneas paralelas a las tres direcciones fundamentales del espacio, las alturas se mantienen paralelas al proyectarse en el cuadro, pero las de ancho y profundidad se proyectan como dos haces convergentes en puntos de fuga situados en la línea del horizonte.

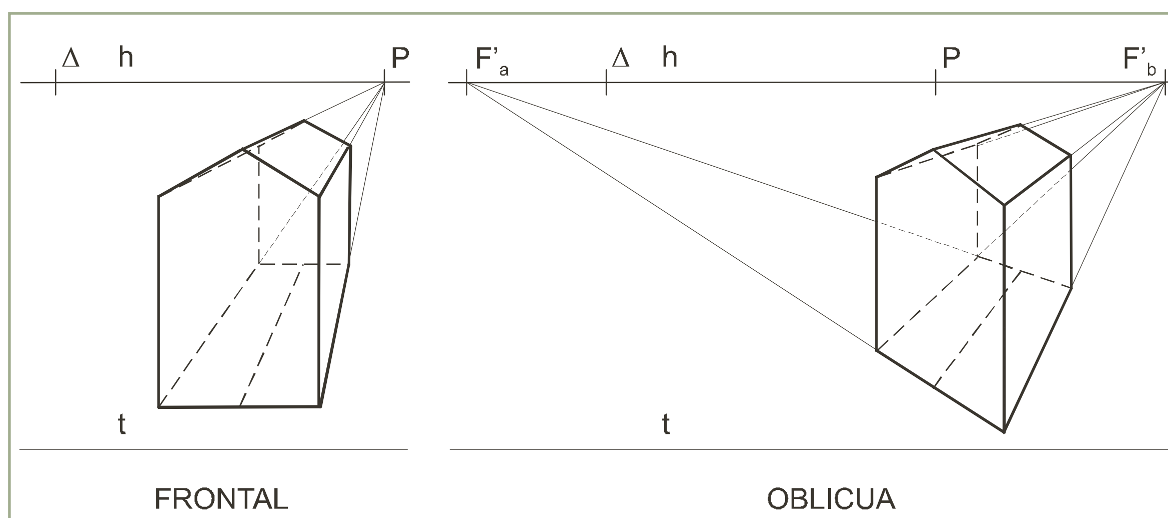


Ilustración 20

- Frontal, cuando el plano del cuadro es paralelo a alguna de las caras o planos del objeto representado. En este caso las figuras planas que conforman el edificio, situadas en planos paralelos al cuadro, se proyectan semejantes a las originales y las líneas de profundidad son perpendiculares al cuadro y convergen en el punto principal.

3.2. Influencia de la distancia de visión en la naturalidad de la perspectiva

Cuando se observa una perspectiva situando el ojo a la distancia δ del punto principal *P* la sensación de realidad es adecuada, pero cuando nos alejamos más pueden aparecer zonas del dibujo distorsionadas. Ésta sensación se debe a que el campo de visión del ser humano está formado por una zona de nitidez correspondiente a un cono de eje la dirección de la mirada, cuyo ángulo en el vértice es de 60º, y otra zona de visión difusa a su alrededor. Las zonas que parecen deformadas son las correspondientes a la zona de visión difusa que al retirar el ojo se incluyen en la zona de nitidez.

Para evitar este efecto, ya que las perspectivas se observan habitualmente desde cualquier distancia y punto de vista, sin sujetar el ojo a su posición correcta, se sitúa todo el dibujo dentro de la zona de nitidez, es decir, en el interior del cono óptico o de visión.

Éstas deformaciones pueden apreciarse en la Ilustración 21, en la que se ha obtenido el radio del cono óptico abatiendo el punto de vista y trazando desde *(V)* una generatriz horizontal abatida del cono que forme *30º* con la dirección de la mirada *(V)P*. Las partes situadas fuera del circulo no parecen naturales.

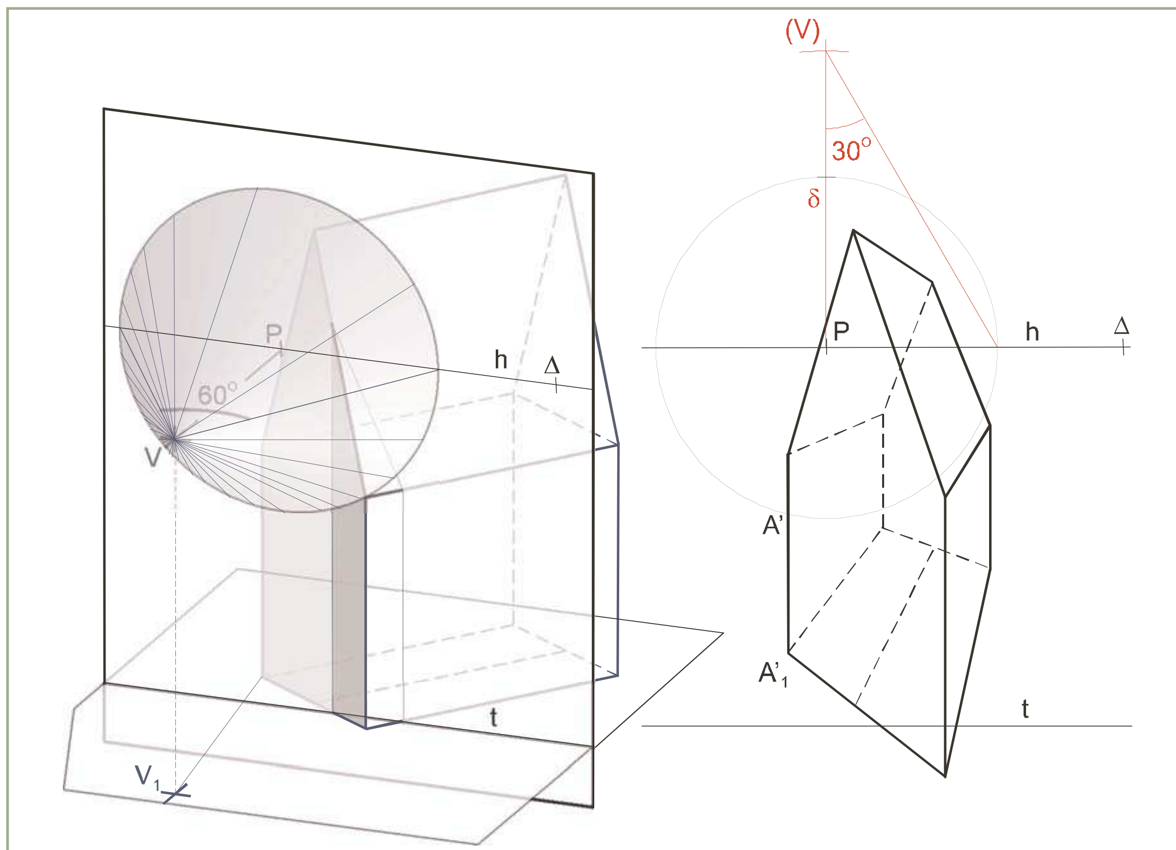


Ilustración 21

3.3. Influencia de la altura de visión en la naturalidad de la perspectiva

La altura de visión se corresponde en el dibujo de arquitectura con la altura del ojo del observador. En las ilustraciones 20 y 22 se presentan tres perspectivas cónicas oblicuas y otras tantas centrales del mismo edificio, situado en la misma posición respecto al plano del cuadro, en las que se han elegido distintas alturas de visión. Podemos ver el edificio como si estuviéramos frente a él y situados por encima de su cubierta, a la altura de su cornisa o paseando por la calzada.

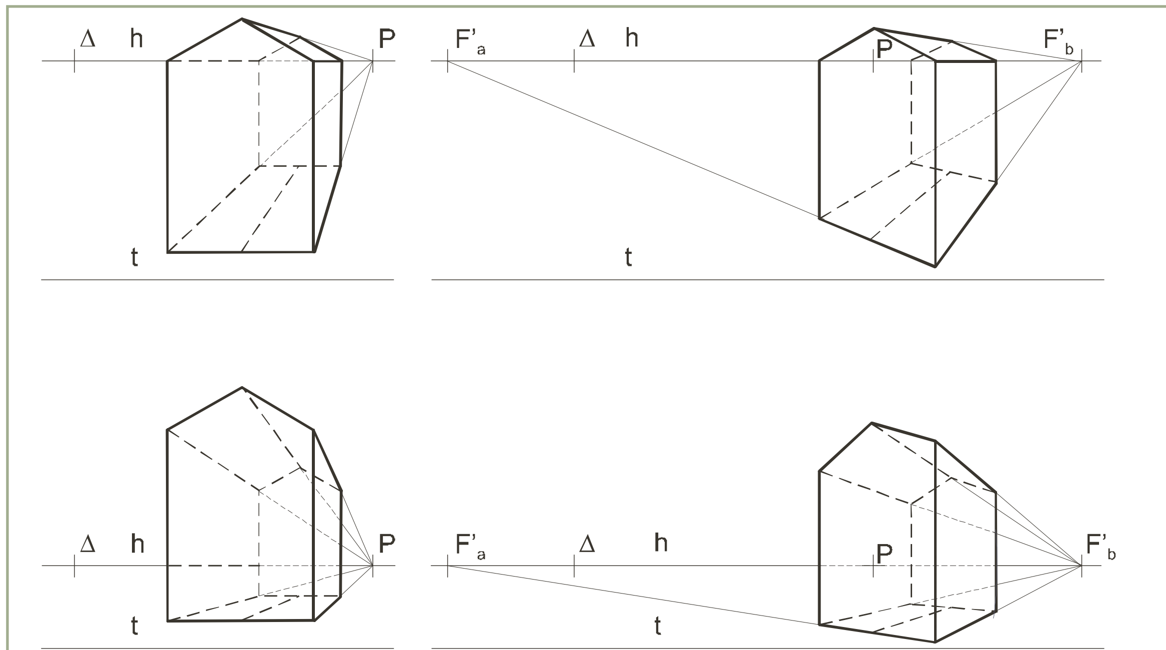


Ilustración 22

3.4. Elección de los elementos de la perspectiva de un edificio representado en diédrico

Sea la representación de un edificio por el método del tercer diedro [Ilustración 23 arriba izquierda].

En la Ilustración 23 abajo se han elegido los elementos de una perspectiva cónica oblicua:

1. Se traza dirección de la mirada V_1P_1 de acuerdo con las fachadas o partes del edificio que se desea que aparezcan en la perspectiva.
2. Se elige la altura del punto de vista *V* situando la línea del horizonte h_2 de acuerdo con la altura de los ojos del observador.
3. Se halla la verdadera magnitud *a*, *b* de las distancias al eje del cono óptico (dirección de la mirada) de los puntos *A*, *B* más alejados de él. Dichas distancias *a*, *b* se obtienen como hipotenusas de los triángulos rectángulos cuyos catetos son sus primeras proyecciones a_1, b_1 y las diferencias de cota entre sus extremos.
4. Se estudia la posición más próxima del punto de vista que sitúe el edificio dentro del cono óptico. Las distancias *a*, *b* obtenidas son los radios de la base del cono óptico. Dibujados en posición horizontal, se trazan por sus extremos generatrices que formen 60º con dicho radio y que corten al eje en dos posiciones posibles para *V*, escogiéndose la más alejada. Ésta es la posición de *V* más próxima al edificio para que la perspectiva parezca natural.

5. Se traza el plano del cuadro π perpendicular a la dirección de la mirada, en cualquier lugar pero preferiblemente delante del edificio y en contacto con él.

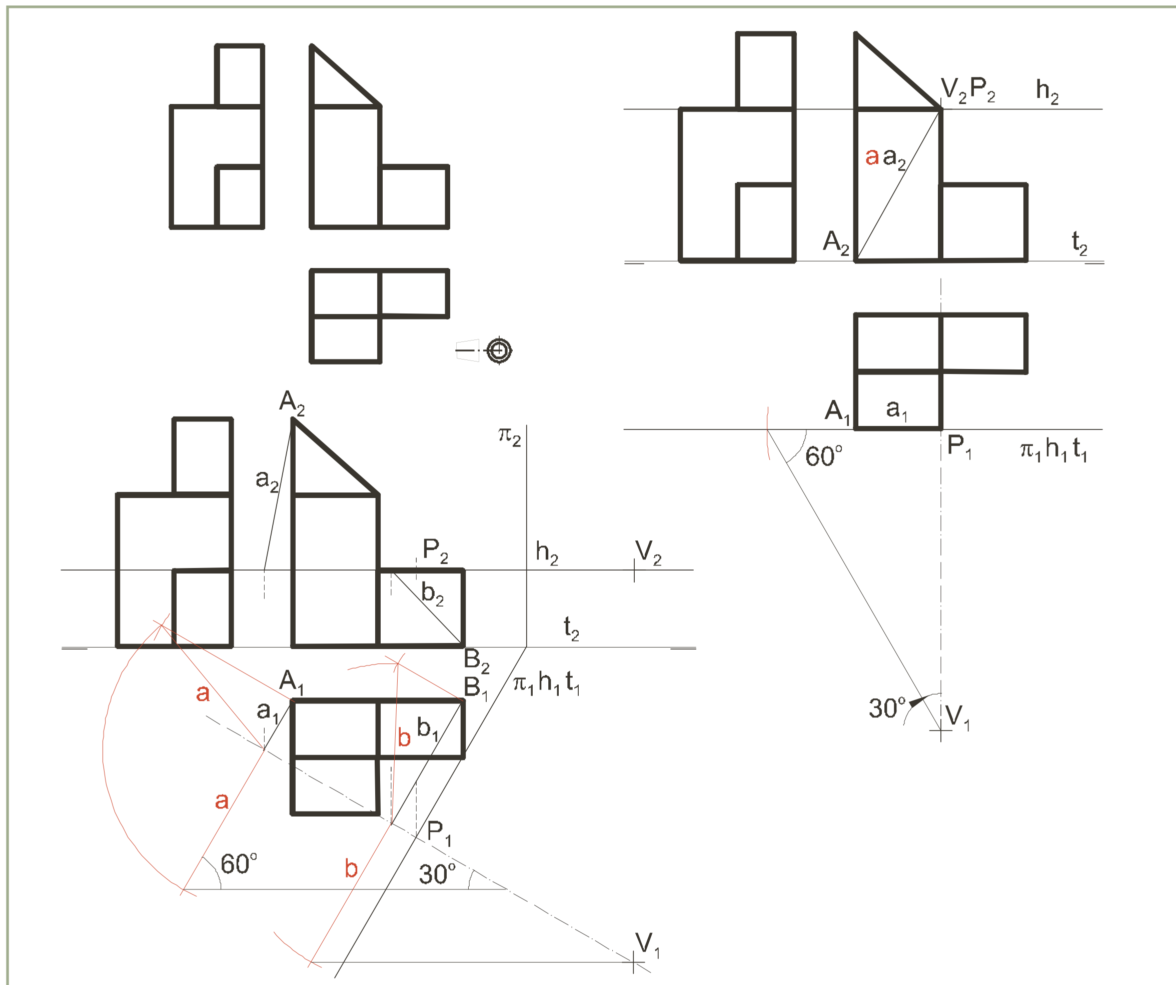


Ilustración 23

En la Ilustración 23 derecha se han elegido los elementos de una perspectiva cónica frontal:

1. Se traza dirección de la mirada V_1P_1 perpendicular a una de las fachadas.
2. Se elige la altura del punto de vista *V* situando la línea del horizonte h_2.
3. Se halla la verdadera magnitud *a* de la distancia al eje V_1P_1 del cono óptico, del punto *A* más alejado de él. Ésta coincide con su segunda proyección a_2.
4. Se obtiene la posición más próxima del punto de vista que sitúa el edificio dentro del cono óptico. Las distancia *a* es el radio de la base del cono óptico, que dibujado en posición horizontal conjuntamente con la generatriz que forma 60º con él, corta al eje en *V*.
5. Se elige como plano del cuadro π el definido por la fachada elegida en el punto primero.

3.5. Perspectiva cónica oblicua de un edificio a partir de su representación diédrica

Sea la representación de un edificio por el método del tercer diedro y *V*, *t*, *h*, π la de los elementos de la perspectiva [Ilustración 24 arriba].

La perspectiva se realiza por el método de trazas y puntos de fuga. Se inicia trazando en la representación diédrica las rectas *a*, *b*, ... que contienen sus aristas y cuyas intersecciones definen sus vértices, obteniendo sus trazas T_a, T_b, ... con el plano del cuadro π. A continuación se obtienen los puntos de fuga F_a , F_f de dichas rectas, que son los puntos de corte con el plano del cuadro π de las paralelas a ellas trazadas por *V*.

Las líneas de tierra y horizonte, en las que aparecen situadas las proyecciones horizontales de las trazas y los puntos de fuga de las rectas y principal, se amplían proporcionalmente al tamaño deseado conjuntamente con la altura *n* y se transportan hasta el espacio de dibujo [Ilustración 24 abajo].

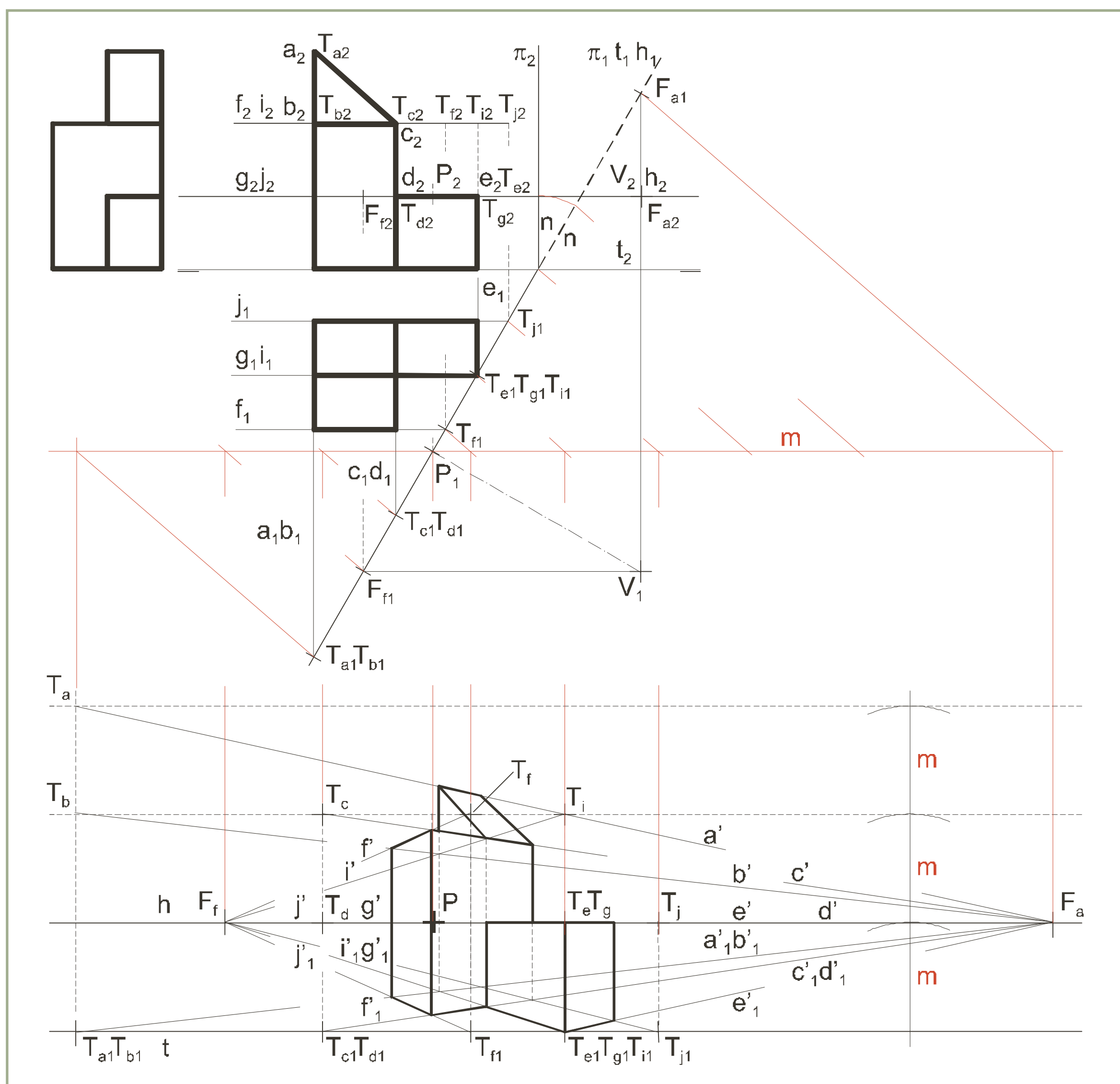


Ilustración 24

Se disponen *h* y *t* separadas por la distancia *m* (*n* ampliada) y en ellas los puntos de fuga y principal F_a, F_f, *P* y las proyecciones horizontales de las trazas T_{a1}, T_{b1}, ..., respectivamente. Trazando paralelas a *t* se sitúan en el plano del cuadro las alturas *m*, 2*m*, 3*m*, de las trazas que se obtienen mediante líneas de referencia trazadas desde sus proyecciones horizontales.

Al trazar las proyecciones directas *a'*, *b'*, ... y horizontales a'_1, b'_1, ... de las rectas *a*, *b*, ... desde sus trazas a sus puntos de fuga, quedan determinados por sus intersecciones los vértices del edificio. Las líneas de referencia de dichos vértices determinan las aristas verticales. Por último es preciso interpretar los trazados para destacar en trazo grueso la perspectiva.

3.6. Perspectiva cónica frontal de un edificio a partir de su representación diédrica

Sea la representación de un edificio por el método del tercer diedro y *V*, *t*, *h*, π la de los elementos de la perspectiva [Ilustración 25 arriba].

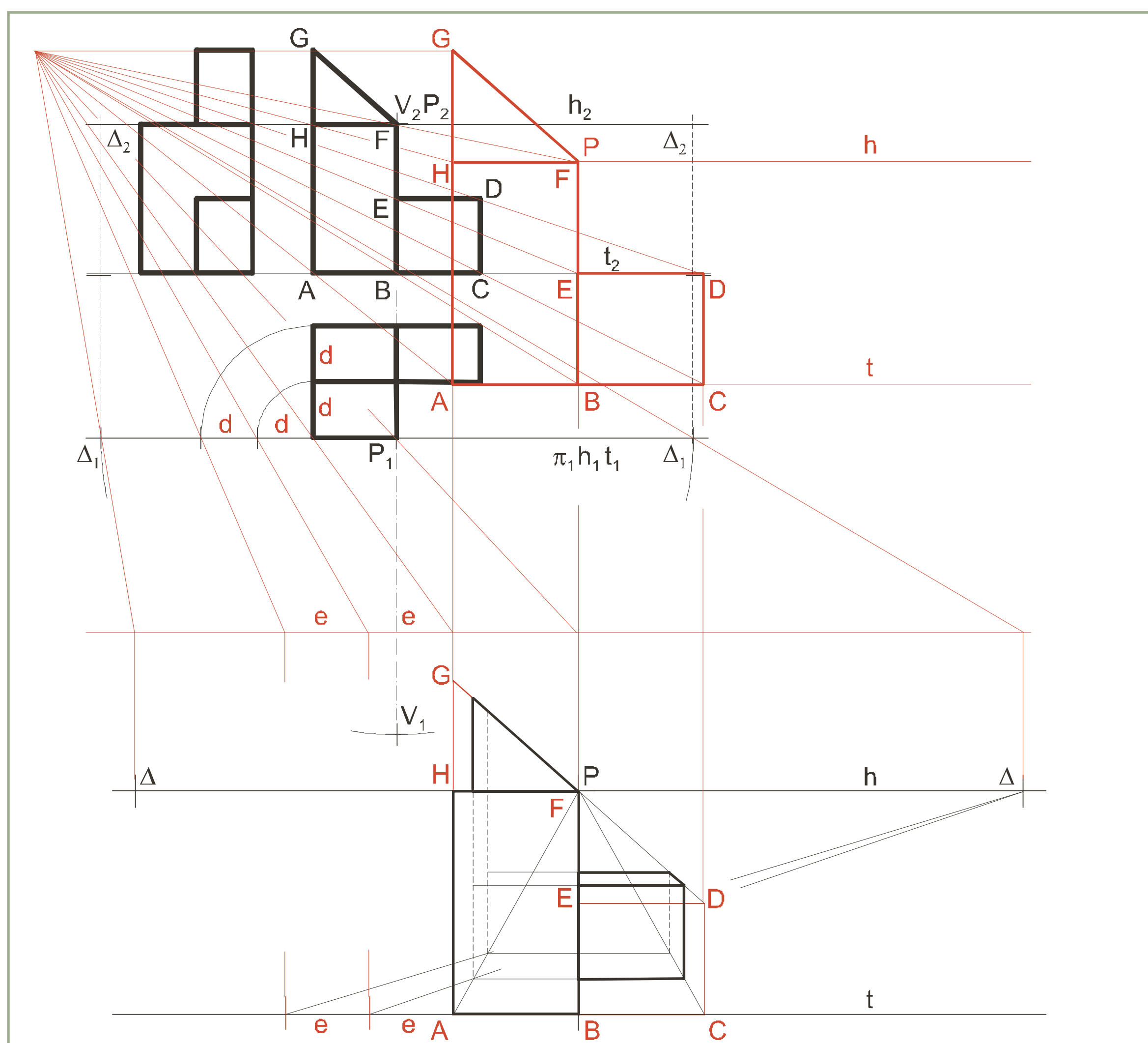


Ilustración 25

La perspectiva se realiza por el método de puntos de fuga y métricos. El punto de fuga de las perpendiculares al cuadro es *P* y sus puntos métricos Δ están en *h*. Llevando la distancia P_1V_1 sobre h_1 a ambos lados de P_1 se obtienen sus primeras proyecciones.

Los elementos de la perspectiva situados en el plano del cuadro *h*, *t*, *P*, Δ, el alzado *ABCDEFGH* y la profundidad *d*, se amplían proporcionalmente al tamaño deseado mediante una homotecia transportándose hasta el espacio de dibujo [Ilustración 25 abajo].

Se trazan las perpendiculares al cuadro *AP*, *BP*, *CP*, ... , llevando sobre *AP* la medida de profundidad *e* (*d* ampliada) dos veces consecutivas, y se dibuja dos veces el alzado, mediante homotecia de centro *P*, situándola primero a la distancia *e* y luego 2*e* del plano del cuadro.

Por último es preciso interpretar los trazados para destacar en trazo grueso la perspectiva.

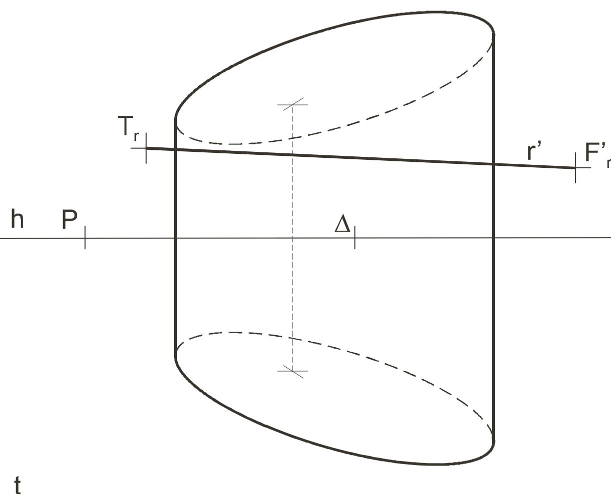
 **Recuerda**

- Un punto *A* se representa mediante su proyección directa *A'* y su proyección horizontal A'_1.
- Una recta *r* se representa mediante su proyección directa *r'* y su proyección horizontal r'_1. Sus puntos notables son las trazas T_r, G_r con los planos del cuadro y geometral y su punto impropio F_r, cuya perspectiva se llama punto de fuga.
- Dos rectas son paralelas si tienen el mismo punto de fuga.
- Un plano α se representa mediante sus trazas t_α, g_α con los planos del cuadro y geometral y su recta impropia l_α, cuya perspectiva se llama recta límite o de fuga.
- Una recta pertenece a un plano si sus trazas y su punto de fuga están contenidas respectivamente en las trazas y la recta límite del plano.
- Dos planos son paralelos si tienen la misma recta límite.
- Un recta es paralela a un plano si su punto de fuga está contenido en la recta límite del plano.
- Entre la proyección horizontal de un sólido y su proyección en el geometral abatida en el cuadro existe una homología de eje la línea de tierra y centro el punto de vista abatido en el cuadro.
- Punto de medida de una recta es el de fuga de rectas paralelas (rectas de medida) que interceptan segmentos iguales sobre la recta y sobre la traza del plano que determinan (plano de medida).
- El punto de medida de las rectas perpendiculares al plano del cuadro, cuyo punto de fuga es *P*, son los puntos Δ situados a la distancia de visión δ respecto a él.
- Se llama frontal u oblicua a la perspectiva cónica de un edificio o espacio según que el plano del cuadro sea paralelo o no a alguna de sus fachadas o planos característicos.
- El cono óptico del ser humano forma un ángulo en el vértice de 60º.

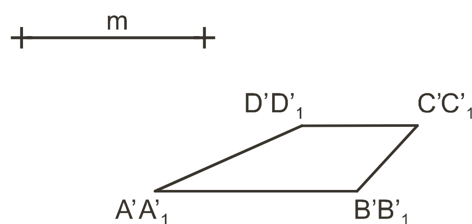


Actividades

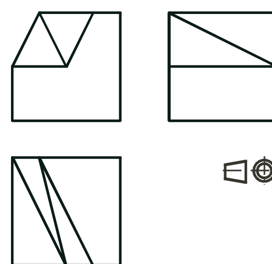
1. Hallar los puntos de intersección del cilindro representado en perspectiva cónica, cuya base está apoyada en el plano geometral, con la recta *r* definida por su proyección directa *r'*, su traza T_r y su punto de fuga F'_r.



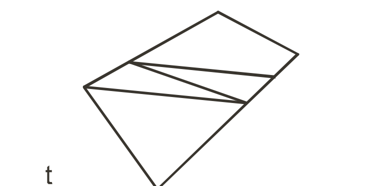
2. En la ilustración aparece un trapecio que representa un cuadrado en perspectiva cónica. Está situado en el plano geometral con su lado *AB* paralelo a la línea de tierra a la distancia *m*. Obtener el punto principal, las líneas de tierra y del horizonte y un punto de distancia.

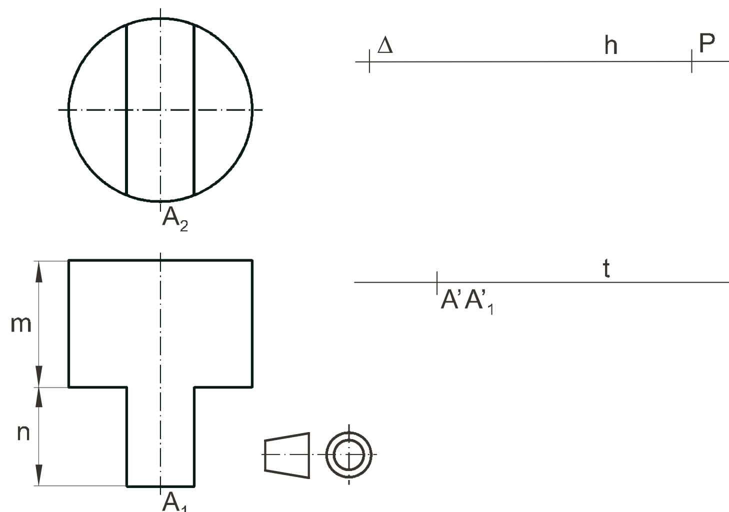
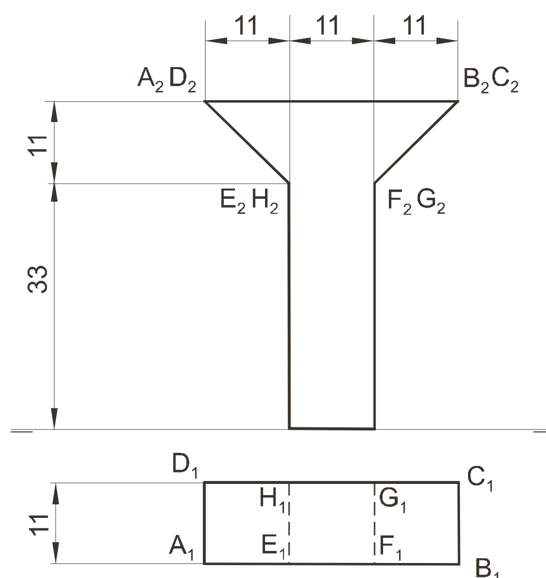


3. De la pieza representada en diédrico a escala 1:2 se ha dibujado la proyección horizontal, de su representación en perspectiva cónica. Dibujar su proyección directa de modo que la pieza esté apoyada en el plano geometral.







4. Dibujar a escala 2:1 la perspectiva cónica frontal de la pieza representada en diédrico conocidos sus elementos y las proyecciones de su punto *A*.	
5. Dibujar la perspectiva cónica oblicua de la escultura representada en diédrico. Se situará apoyada en el plano geometral, con una altura de visión igual a un tercio de su altura, aproximadamente, y de modo que su arista *AB* forme un ángulo de 30º con el plano del cuadro. Elegir los demás elementos para que la perspectiva parezca natural.	

Puedes acceder pulsando aquí al recurso interactivo *Construcción de la perspectiva cónica en la obra de Rafael La Escuela de Atenas* de Mª Luisa Bermejo López.

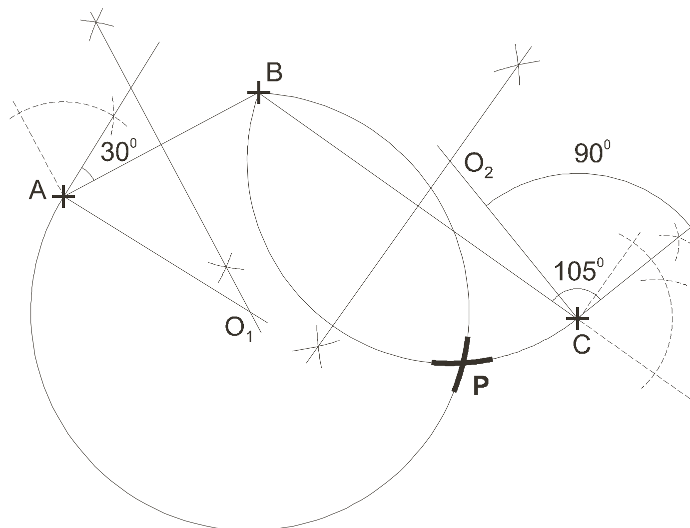





UNIDAD 1.
TRAZADOS EN EL PLANO. POTENCIA

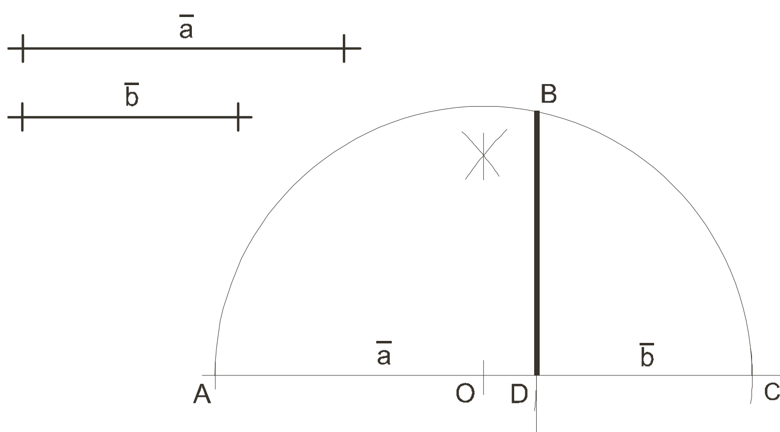
1. Se traza el arco capaz del ángulo de 30º sobre el segmento $\overline{AB}$ en el semiplano correspondiente a la posición esperada de *P*, de los dos en que éste divide al plano. Para ello se construye el ángulo de 30º con vértice en *A* a partir del lado *AB* y en el semiplano opuesto al del arco capaz, trazando la perpendicular al nuevo lado por *A*. Ésta cortará a la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ en el centro O_1 del arco capaz.
Análogamente, se traza el arco capaz del ángulo de 105º sobre el segmento $\overline{BC}$ y se obtiene su intersección con el anterior en *P*.

Puede obtenerse otra solución trazando los arcos capaces en el otro semiplano.

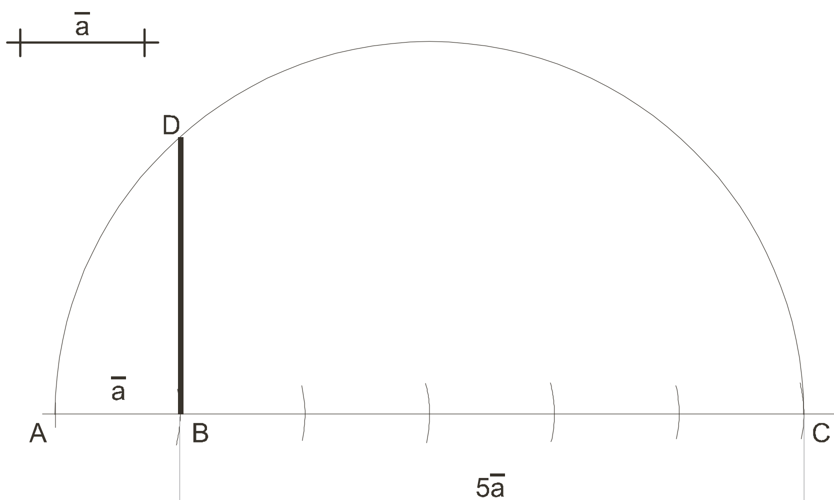


2. Se transportan los segmentos $\overline{a}$ y $\overline{b}$, consecutivamente, sobre una semirrecta de origen *A*. Se traza la semicircunferencia de diámetro $\overline{AC} = \overline{a} + \overline{b}$ y se levanta la perpendicular a éste por *D*.

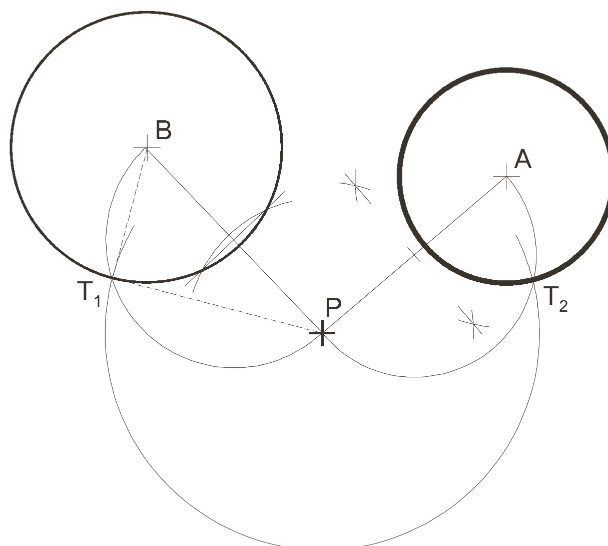
El segmento $\overline{BD}$ es media proporcional de $\overline{a}$ y $\overline{b}$.



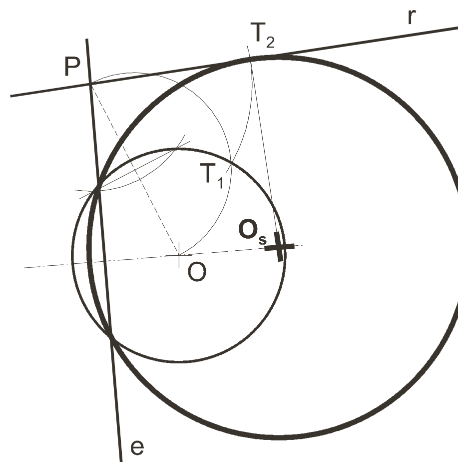
3. Se transporta el segmento $\overline{a}$ seis veces consecutivas sobre una semirrecta de origen *A*. Se traza la semicircunferencia de diámetro $\overline{AC} = 6 \times \overline{a}$ y se levanta la perpendicular a éste por *B*. El segmento $\overline{BD} = \sqrt{5} \times \overline{a}$.



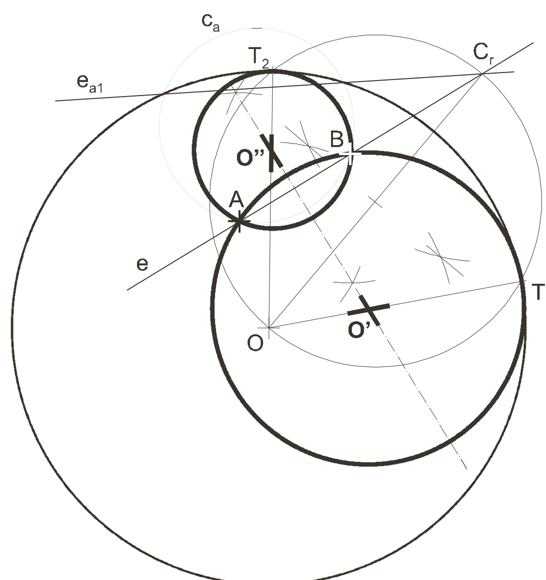
4. Se halla el segmento representativo $\overline{PT_1}$ de la potencia del punto *P*, que es la tangente a la circunferencia de centro *B* trazada desde él.
El punto de corte del arco de centro *P* y radio $\overline{PT_1}$ con el arco capaz de 90º sobre el segmento $\overline{AP}$ es el punto de tangencia T_2, del segmento representativo de la potencia de *P* respecto de la circunferencia de centro *A*. El radio de la circunferencia solución es AT_2.



5. El punto de corte *P* del eje radical *e* con la recta *r*, tiene una potencia respecto de la circunferencia de centro *O* cuyo segmento representativo $\overline{PT_1}$, trasladado sobre *r* a partir de *P*, nos da el punto de tangencia T_2 de la circunferencia solución. La perpendicular a *r* por T_2 corta a la línea de centros en O_s.



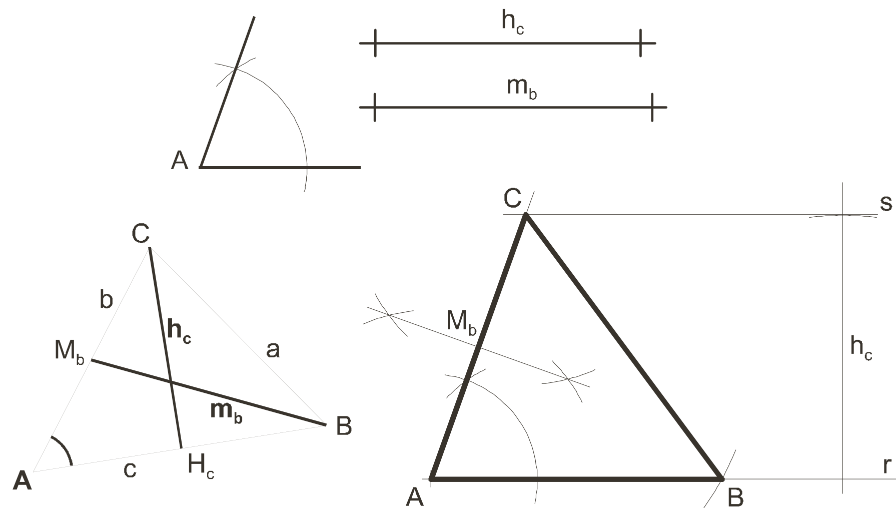
6. Con centro en un punto cualquiera de la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, se traza una circunferencia auxiliar c_a, secante a la dada. El eje radical con ella e_{a1} corta al de todas las circunferencias que pasan por *A* y *B* en el centro radical C_r. Las rectas tangentes a la circunferencia de centro *O* desde C_r, determinan los puntos de tangencia T_1 y T_2 con las soluciones. Las rectas OT_1, OT_2 cortan a la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, en sus centros *O'*, *O"*.



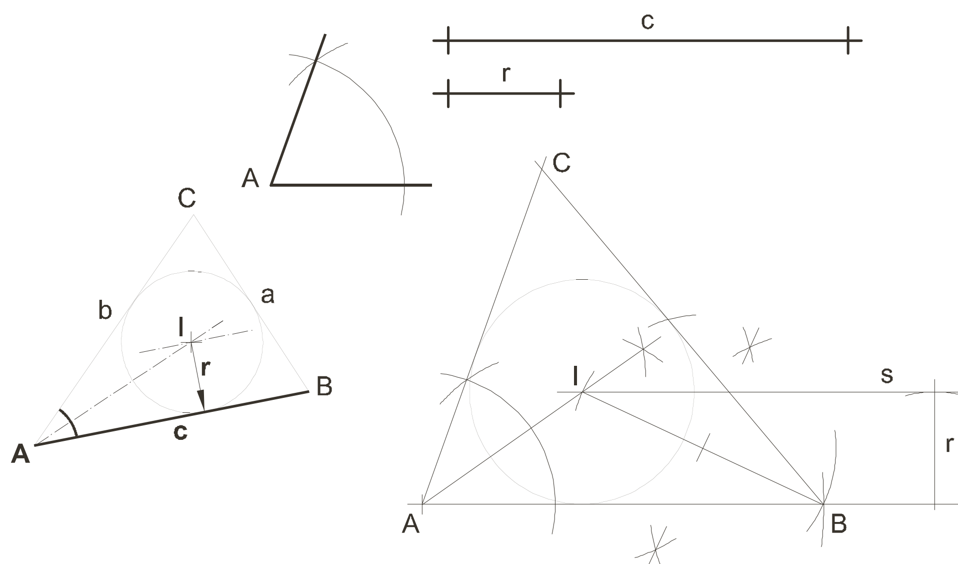
1. Se traza una figura de análisis y en ella se relacionan datos y solución mediante la paralela M_cM_a al lado *b*.
Se transporta el lado *c* sobre una semirrecta de origen *A* y el ángulo *A* a partir de él. Se traza la mediatriz de *c* y con centro en su punto medio M_c la paralela al lado *b*. Ésta corta al arco de centro *A* y radio m_a en M_a. Uniendo *B* y M_a se obtiene el tercer lado.

2. A partir de una recta *r* se transportan los ángulos *A* y *B* para formar un triángulo *A'B'C'*, semejante al buscado. Se halla el punto medio M_c del lado *A'B'* y se une con el vértice *C* para formar la mediana M_cC'. Mediante un arco de centro M_c y radio m_c se superpone la mediana M_cC del triángulo solución. Dos paralelas *CA* y *CB* a *C'A'* y *C'B'* forman los lados no comunes.

3. Se transporta el ángulo *A* a partir de una semirrecta de origen *A*. Su paralela *s* a la distancia h_c determina el lado *AC*. Con centro en su punto medio M_b se traza un arco de radio la mediana m_b que determina el tercer vértice *B*.

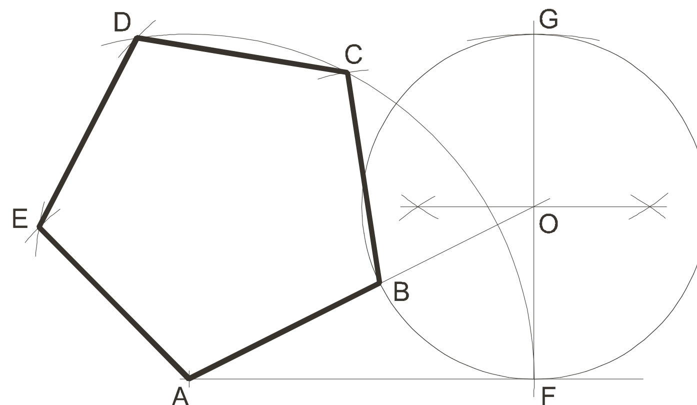


4. Se transporta el ángulo *A* a partir de una semirrecta de origen *A*. Su paralela *s* a la distancia *r* corta a su bisectriz en el incentro *I*. Se traza la circunferencia inscrita y su tangente desde *B* que forma el tercer lado *BC*.



5. Se transporta la diagonal $d = \overline{AF}$ sobre una semirrecta de origen *A* y se halla su segmento áureo *AB*, que es el lado del pentágono.

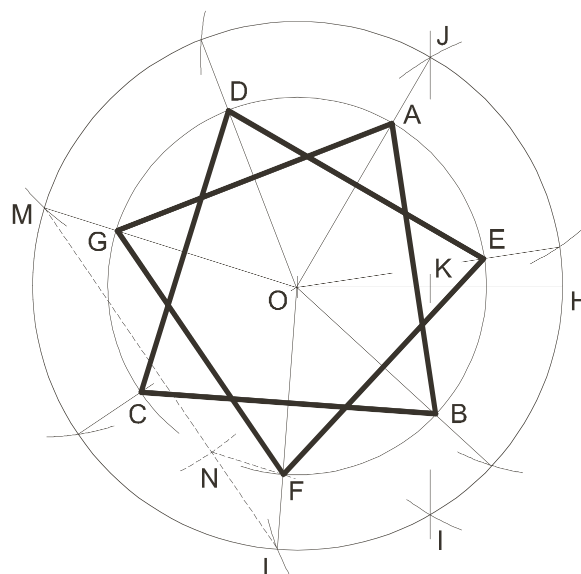
El vértice superior *D* es el punto de corte de dos arcos de centros *A*, *B* y radio la diagonal *AF*. El vértice *C* se obtiene mediante dos arcos de centros *A*, *B* y radios la diagonal *AF* y el lado *AB*. Análogamente se obtiene *E*.



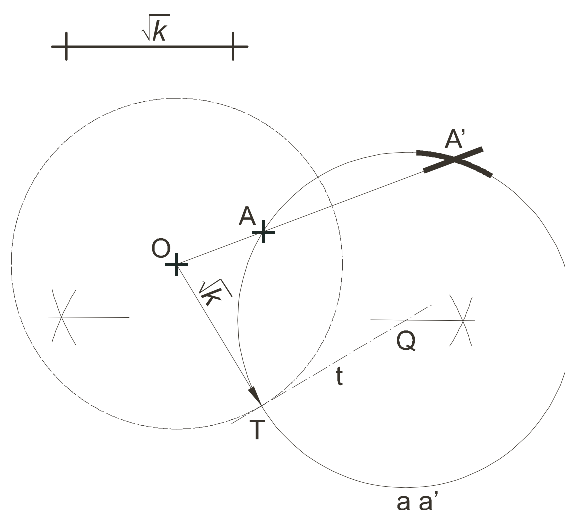
6. Se traza una circunferencia cualquiera, un radio *r* = *OH* y la cuerda *IJ* que coincide con su mediatriz. La mitad *JK* de dicha cuerda se lleva seis veces sobre la circunferencia determinando 7 puntos de división.

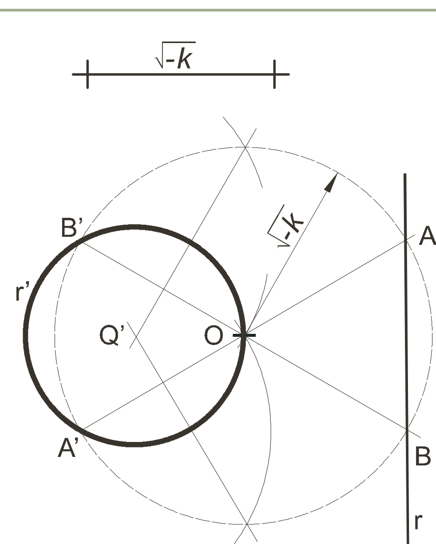
Sobre una cuerda *ML* se superpone el lado *MN* = *l*, trasladándolo según el vector *MG* hasta la posición *GF*.

Se traza la circunferencia circunscrita de la solución con centro *O* y radio *OG* y se obtienen sobre ella los 7 puntos de división mediante homotecia de centro *O*. Se unen estos de dos en dos para obtener el heptágono estrellado de segunda especie.



1. Se traza la circunferencia de puntos dobles con radio $\sqrt{k}$ y centro *O* y su tangente *t* en un punto cualquiera *T*. La mediatriz del segmento $\overline{AT}$ corta a *t* en el centro *Q* de la circunferencia doble *a*. La secante *OA* determina sobre ella el inverso *A'*.



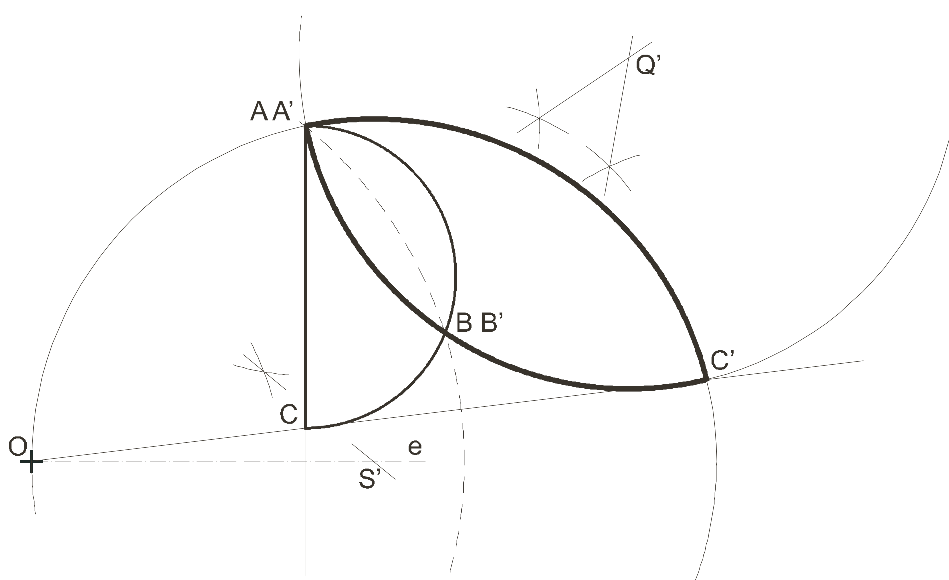


2. Se traza la circunferencia de puntos dobles con radio $\sqrt{-k}$ y centro *O*. Ésta corta a la recta *r* en los puntos *A, B* cuyos inversos son los diametralmente opuestos *A', B'*. La circunferencia *r'* de centro Q', que pasa por *O, A', B',* es la figura inversa de *r*. Su centro *Q'* se obtiene mediante las mediatrices de las cuerdas $\overline{OA'}$ y $\overline{OB'}$.

3. La figura inversa de la recta *AC*, que no pasa por *O,* es la circunferencia que pasa por *O* y por *A'*, cuyo centro *S'* está situado en el eje de simetría *e*, que es la perpendicular a dicha recta por *O*.

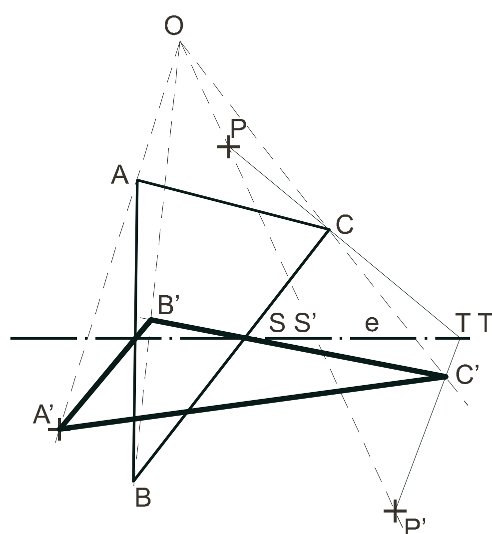
La mediatriz de *OA'* corta a *e* en dicho centro *S'*. El homólogo *C'* de *C* es el punto de corte de la recta *OC* con la circunferencia de centro *S'*. De los dos arcos *A'C'* posibles, el inverso del segmento $\overline{AC}$ es el que no contiene al centro *O*, por ser éste el homólogo del punto del infinito de la recta *AC*.

La figura inversa del arco *ABC* es el arco *A'B'C'*, siendo *B* un punto doble obtenido al trazar por *A* la circunferencia de puntos dobles. Su centro *Q'* se obtiene mediante las mediatrices de las cuerdas $\overline{A'B'}$ y $\overline{B'C'}$.



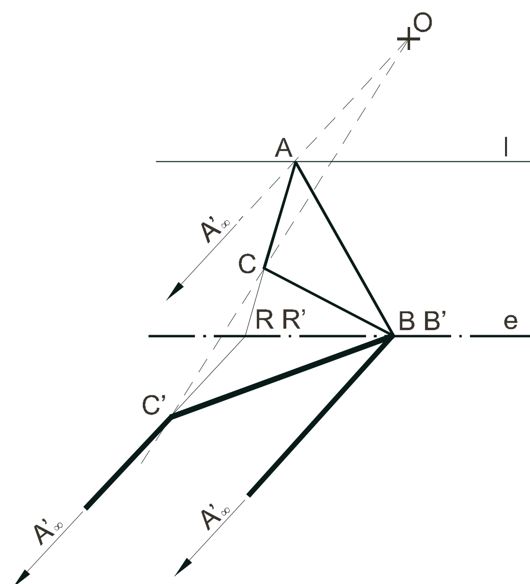
4. El centro de homología *O* es el punto de corte de las rectas dobles *AA'* y *PP'*.
Se obtiene el homólogo *C'* de *C* en el punto de corte de la recta doble *OC* con la transformada *P'T'* de *PT*.

Se halla el homólogo *B'* de *B* en el punto de corte de la recta doble *OB* con la transformada *C'S'* de *CS*.



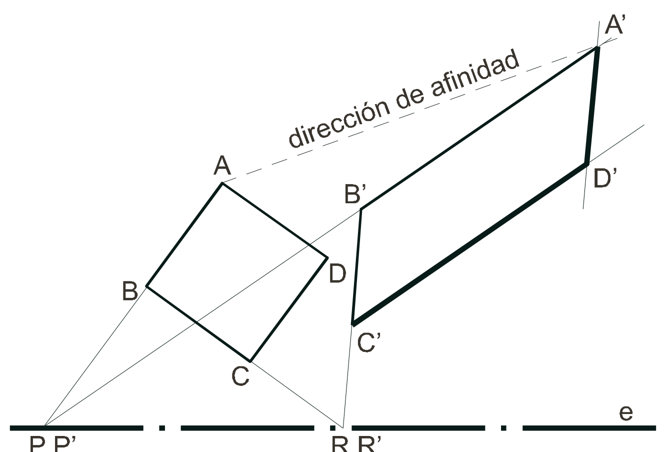
5. El homólogo de *A* es el punto impropio A'_∞ y el de *B* coincide con sí mismo por ser doble.
El homólogo de *C* es el punto de corte de la recta doble *OC* con la homóloga $R'A'_\infty$ de *AR*.

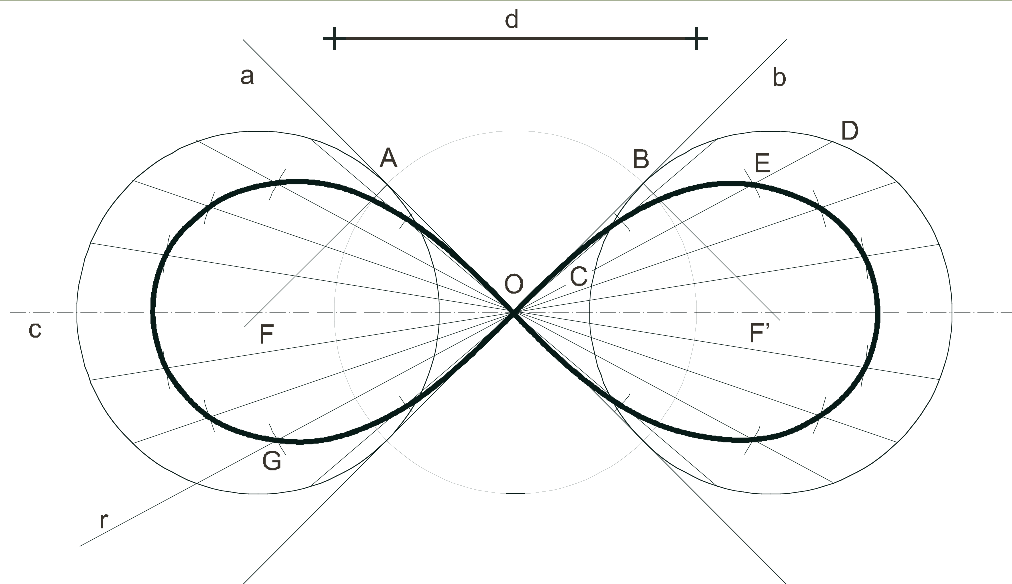
La homóloga de *AB* es $B'A'_\infty$.



6. Se obtienen los puntos de corte de *AB* con *A'B'* y de *CD* con *C'D'* que definen el eje de afinidad *e*.
La dirección de afinidad es la de las rectas paralelas a *AA'*.

El homólogo *D'* de *D* es el punto de corte de las paralelas a *B'C'* y *B'A'* por *A'* y *C'* respectivamente.

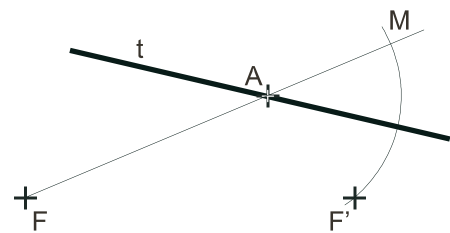




1. Se traza una circunferencia de centro *O* y diámetro *d*, dos rectas perpendiculares *a*, *b* que pasen por *O* y la corten en *A*, *B* y su bisectriz *c*. Las rectas tangentes en *A* y *B* cortan a la bisectriz *c* en los centros *F*, *F'* de las circunferencias generadoras.
Se obtienen puntos de la curva mediante secantes como la recta *r* que pasa por *O* y corta a una de ellas en *C* y *D*. Arcos de radio *CD* y centro *O* cortan a la secante en dos puntos *E* y *G* de la lemniscata.

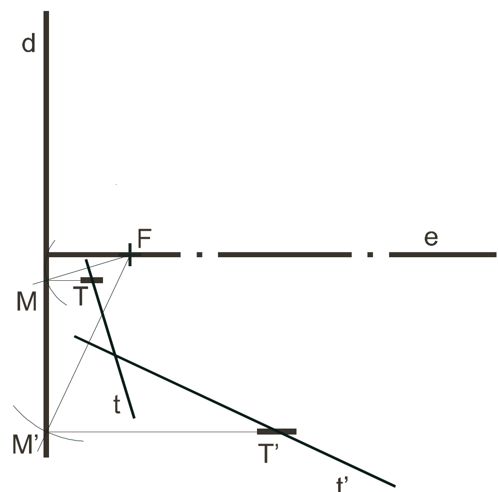
Al unir los puntos obtenidos mediante sucesivas secantes, a mano alzada o con plantilla de curvas, se dibuja la lemniscata.

2. Se traza la recta *FA* y el arco de centro *A* y radio *AF'* que la corta en el punto *M* de la circunferencia focal. La mediatriz de *F'M* es la tangente *t* a la elipse en *A*.



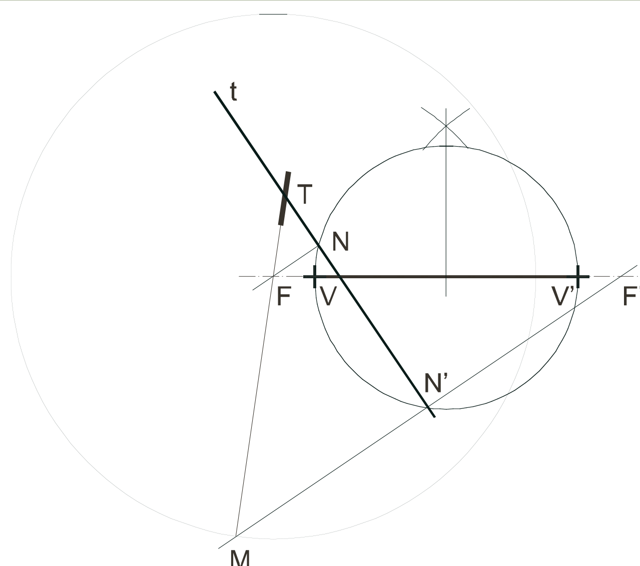
3. Los simétricos del foco respecto de las tangentes son puntos *M, M'* de la directriz *d*. Las perpendiculares a ésta desde *M, M'* cortan a las tangentes *t, t'* en los puntos de tangencia *T, T'*.

La perpendicular a la directriz que pasa por el foco *F* es el eje *e* de la parábola.

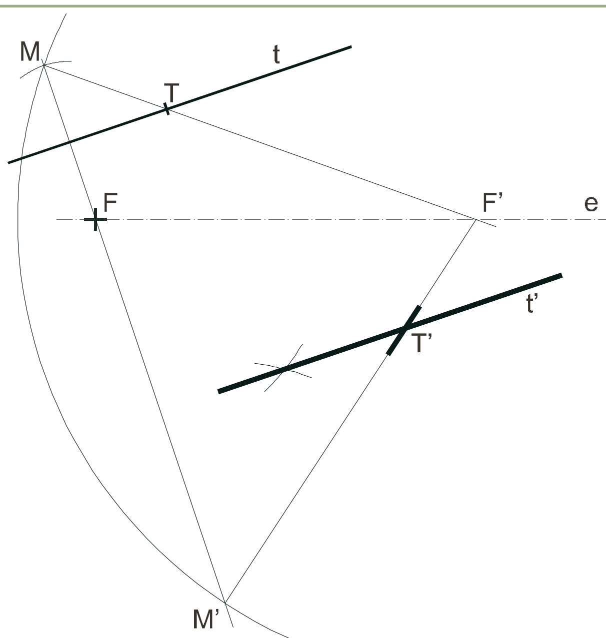


4. Se traza la circunferencia principal cuyo diámetro es *VV'*. Por los puntos de corte *N, N'* de la tangente *t* con ella se trazan perpendiculares que cortan al eje de simetría *VV'* de la elipse en los focos *F, F'*.

La circunferencia focal de centro *F* y radio *VV'* corta a la perpendicular trazada por *N'* en *M*. La recta *MF* corta a la tangente *t* en el punto de tangencia *T*.

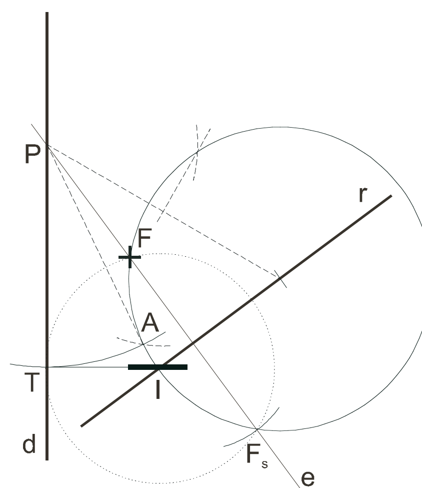


5. El simétrico del foco *F* respecto de la tangente *t* es un punto *M* de la circunferencia focal. El radio de ésta cuyo extremo es *M*, pasa por *T* y corta al eje e en su centro *F'*.
La recta *MF*, perpendicular a *t*, corta a la circunferencia focal en *M'*. La mediatriz de $\overline{M'F}$ es la tangente *t'*, paralela a *t*, que es cortada por el radio *M'F'* de la focal en el punto de tangencia *T'* con la elipse.



6. Se obtiene el simétrico F_s del foco *F*, respecto de *r*. El centro *I* de una de las circunferencias tangentes a la directriz *d* que pasan por *F* y F_s es un punto de intersección de *r* con la parábola.

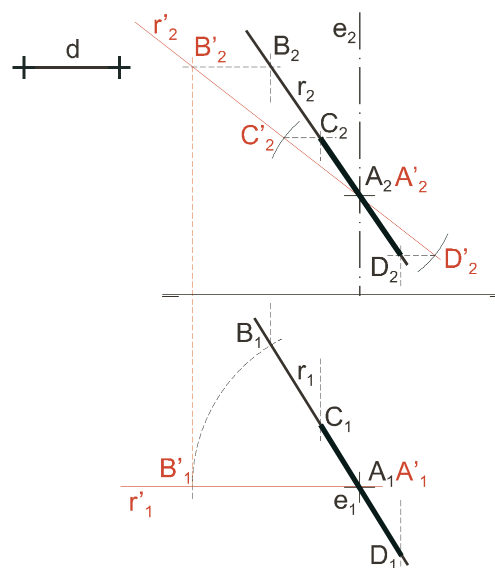
Se traza una de las circunferencias que pasan por *F* y F_s y su tangente $\overline{PA}$ desde el punto de corte *P* de la directriz *d* y el eje radical *e*. Mediante un arco *AT*, de centro *P*, se transporta sobre la directriz el segmento representativo $\overline{PA}$ de la potencia de *P*, que determina el punto de tangencia *T* de la circunferencia buscada. Su centro *I* está en la perpendicular a la directriz *d* trazada desde *T*.



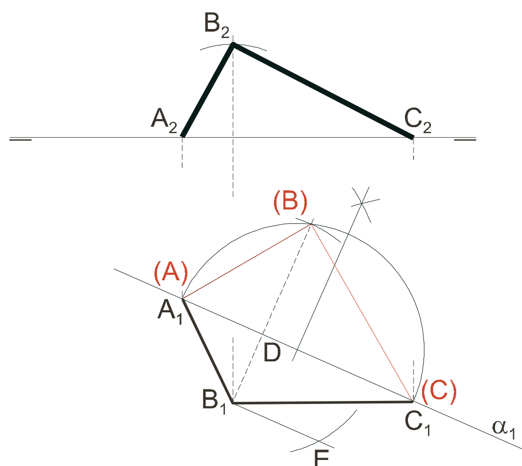
1. Se elige un eje vertical *e*, que pase por el punto *A*, para girar la recta *r* hasta convertirla en frontal.

Se traza la primera proyección en su posición girada r'_1, sin más que dibujarla paralela a *L.T.* pasando por e_1. Un arco de radio cualquiera y centro e_1 corta a r_1 en B_1 y a r'_1 en B'_1. Una paralela a *L.T.* trazada por B_2 cortará a la línea de referencia de B'_1 en B'_2. Sobre la segunda proyección r'_2, que pasa por el punto doble A'_2 y por B'_2, se transporta la distancia *d* en los dos sentidos a partir de *A*.

Desde las proyecciones C'_2, D'_2 se trazan paralelas a *L.T.* que cortan a r_2 en C_2, D_2. Líneas de referencia trazadas desde éstas dan las primeras proyecciones C_1, D_1 de los puntos *C, D*.

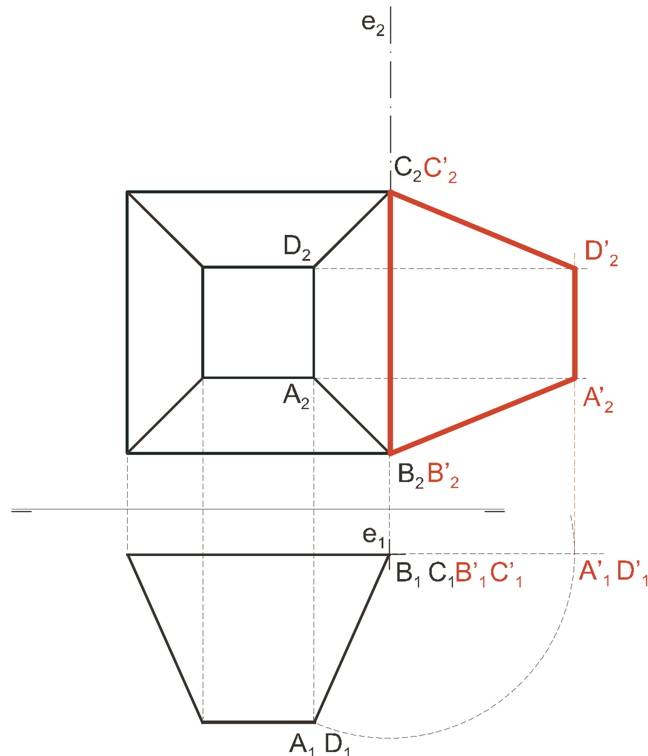


2. Por las proyecciones A_1, C_1 pasa la traza α_1 del plano α, que contiene a los puntos *A, B, C*. Al abatir estos sobre el plano horizontal deberá obtenerse el ángulo recto *(A)(B)(C)*, siendo *(A), (C)* puntos dobles en la afinidad de eje α_1, que existe entre la primera proyección y el abatimiento de dichos puntos. Se obtiene *(B)* en el punto de corte de la dirección de afinidad de B_1 y un arco capaz de 90º sobre el segmento . El arco de centro D y radio D(B) determina sobre la paralela a α_1 por B_1 la cota B_1E de B. Las segundas proyecciones de *A, C* están en *L. T.* y la de *B* se obtiene transportando su cota B_1E, sobre la línea de referencia trazada desde B_1.



3. La cara *ABCD* está situada en un plano vertical. Un giro alrededor del eje vertical $e = AB$ colocará dicho plano en posición frontal y la cara *ABCD* en verdadera magnitud.

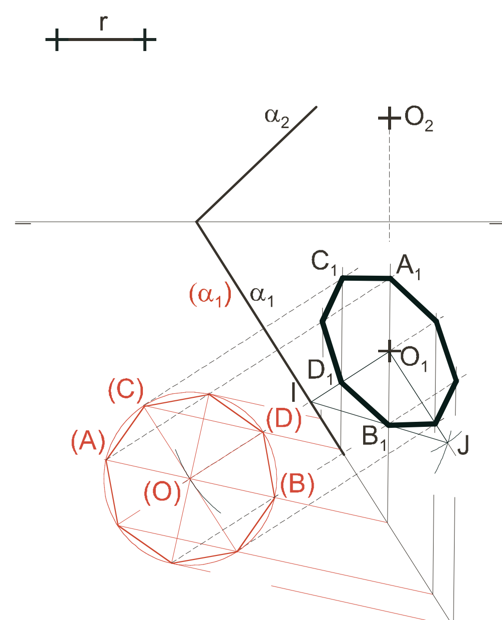
Un arco de centro e_1, que pasa por A_1, D_1, corta a la paralela a *L.T.* trazada desde e_1 en A'_1, D'_1. Los puntos de corte de las paralelas a *L.T.* que pasan por A_2, D_2 con la línea de referencia de A'_1, D'_1, son A'_2, D'_2. La proyección $A'_2B'_2C'_2D'_2$ está en verdadera magnitud.



4. Se comienza abatiendo el punto *O* para definir la afinidad. Para ello se traza la dirección de abatimiento de O_1 que corta a la charnela α_1 en *I*. Se construye el triángulo rectángulo O_1IJ, siendo el cateto $\overline{O_1J}$ la cota del punto *O*. Un arco de centro *I* y radio $\overline{IJ}$ corta a la dirección de abatimiento en *(O)*. A continuación se traza con centro en (O) la circunferencia circunscrita, se divide en ocho partes mediante diámetros paralelos, perpendiculares y a 45º con la traza α_1, y se unen las divisiones para formar el octógono.

Se obtienen los afines A_1, B_1 de los vértices *(A)*, *(B)* en los puntos de corte de las direcciones de afinidad con la afín de la recta *(A)(B)*, que pasa por O_1 y por el punto doble del eje α_1.

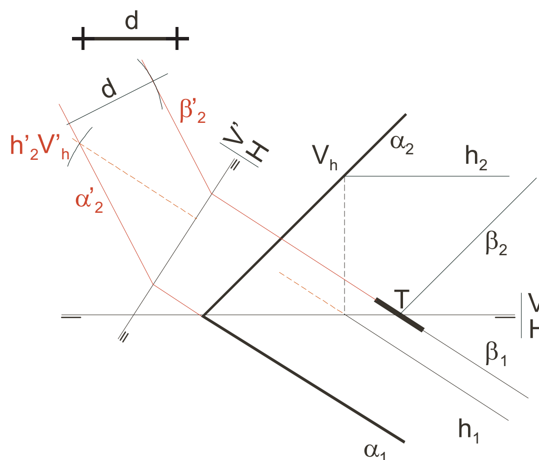
Se obtienen los afines C_1, D_1 , ... de los vértices *(C)*, *(D)*, ... en los puntos de corte de sus respectivas direcciones de afinidad con las afines de las rectas *(C)(D)*, ... paralelas a *(A)(B)*, que son, a su vez, paralelas a A_1B_1 y pasan por los puntos dobles del eje.



5. Un plano β paralelo a α, a la distancia *d* cortará a la *L.T.* en el punto pedido.

Se construye β mediante un cambio de plano vertical que sitúa al plano α en posición de canto. La línea de tierra del nuevo sistema *{V'H}* se elige perpendicular a a_1. La traza vertical α'_2 se obtiene mediante una horizontal de plano *h*, que se sitúa en posición de punta.

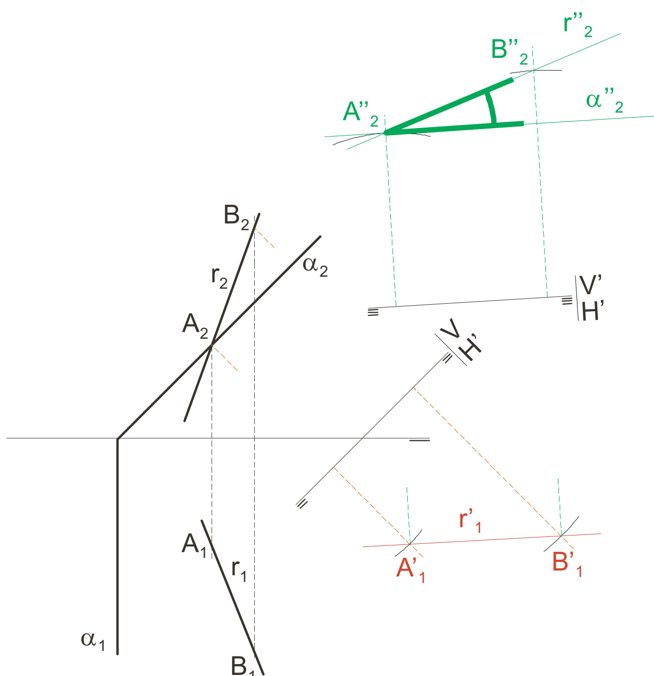
Llevando *d* perpendicularmente a α'_2 situamos β'_2. La traza horizontal β_1 es paralela a α_1. Su punto de corte *T* con *L.T.* es el pedido.



6. La línea de tierra del primer sistema *{VH'}* se elige paralela a α_2 y convierte al plano α en horizontal. La proyección vertical r_2 de la recta *r* se mantiene y obtenemos r'_1 uniendo las nuevas proyecciones horizontales A'_1, B'_1 de dos de sus puntos *A*, *B*.

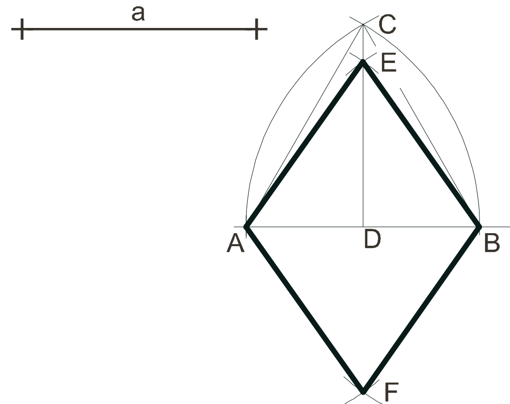
La línea de tierra del segundo sistema {*V'H'*} se elige paralela a r'_1. Al tratarse de un cambio de plano vertical la cota no se modifica. Así α''_2 mantiene la misma distancia y paralelismo a *L.T.* que α_2, y A''_2, B''_2 mantienen las mismas cotas del sistema anterior.

El ángulo formado por r''_2, que pasa por $A''_2B''_2$, y a''_2 es la verdadera magnitud del que forman la recta *r* y el plano α.



1. La sección principal es un rombo de lado igual a la altura de una cara y diagonales iguales a la arista y la diagonal del octaedro.

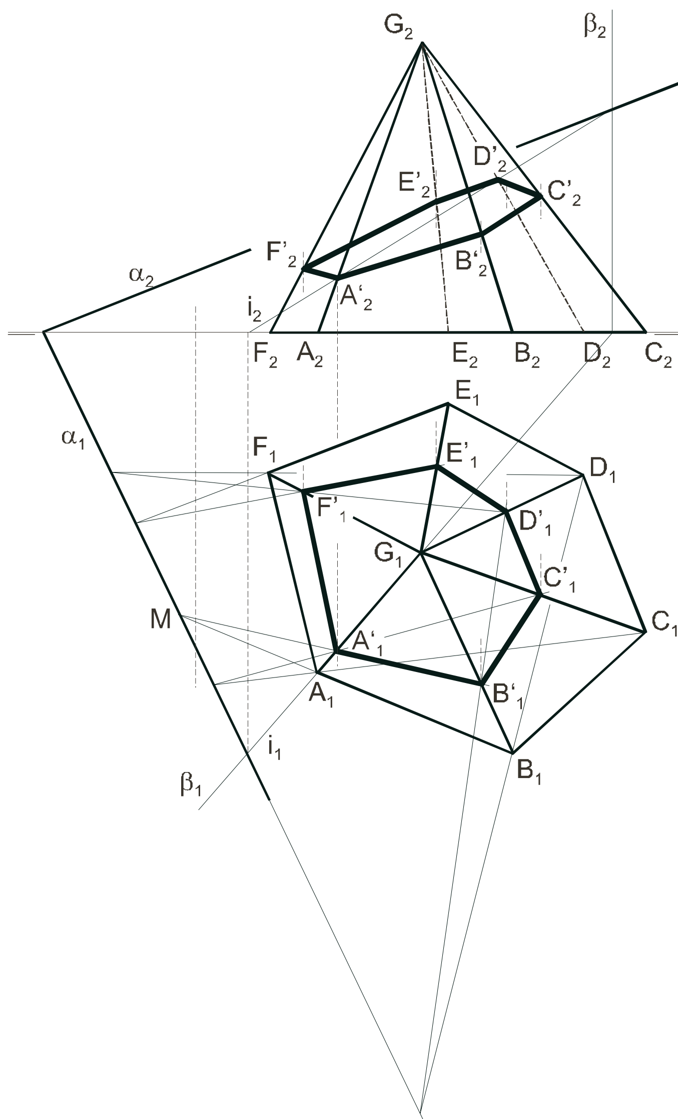
Se construye un triángulo equilátero *ABC* y se halla su altura *CD*. Con centro en *A* y *B* se trazan arcos de radio *CD* que se cortan en *E* y *F*. El rombo *AFBE* es la sección principal del octaedro regular.



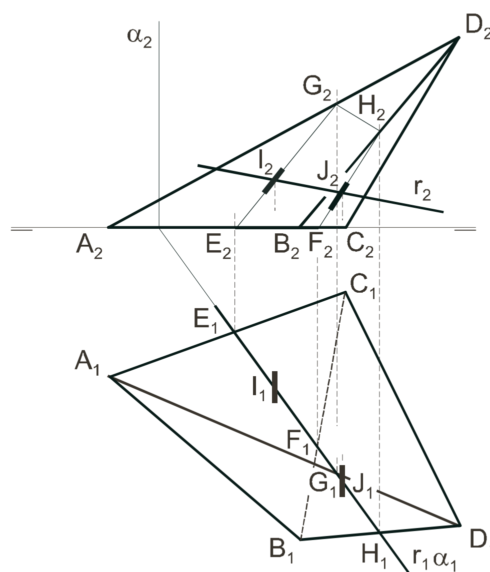
2. Se halla la sección de la arista *AG* con el plano α. Para ello se traza el plano vertical β, de modo que su traza horizontal β_1 coincida con A_1G_1. Trazada la recta *i* de intersección de los planos α y β, se obtiene A'_2 en el punto de corte de las proyecciones segundas i_2 y A_2G_2. La línea de referencia trazada desde A'_2 hasta A_1G_1 dará A'_1.

Se define una homología entre la base de la pirámide A_1, B_1, C_1, ... y la sección por el plano α en la que A_1 y A'_1 son homólogos, α_1 es el eje de homología y G_1 el centro de homología. Se obtiene el homólogo B'_1 de B_1 en el punto de corte de la recta doble G_1B_1 con la transformada $M A'_1$ de B_1A_1. Análogamente se obtienen C'_1, D'_1, ...

La segunda proyección de la sección se obtiene trazando líneas de referencia desde B'_1, C'_1, D'_1, ... hasta las segundas proyecciones G_2B_2, G_2C_2, G_2D_2,... de las aristas, obteniéndose B'_2, C'_2, D'_2, ...

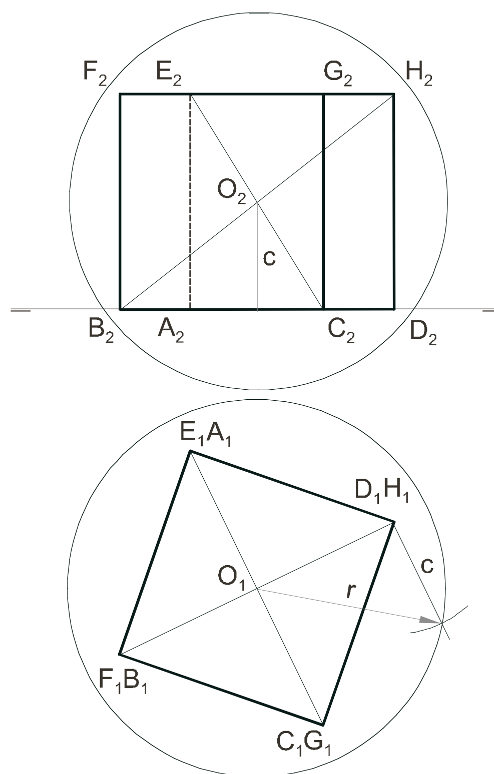


3. Un plano vertical α que contenga a la recta *r* produce una sección en la pirámide que es un polígono *EFHG*, cuya proyección horizontal $E_1F_1H_1G_1$ coincide con la traza α_1. Su proyección vertical se obtiene trazando líneas de referencia desde E_1, F_1, H_1, G_1 hasta las aristas correspondientes. Los puntos de corte con ella de la proyección r_2 de la recta, son las proyecciones verticales I_2, J_2 de los puntos de intersección de la recta con la pirámide. Sus proyecciones horizontales I_1, J_1 se obtienen mediante líneas de referencia.



4. Se trazan las diagonales *BH* y *CE* del cubo, que se cortan en su centro *O*. El radio *r* de la esfera circunscrita es la semidiagonal *OD*. Su verdadera magnitud se obtiene como hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos son la proyección O_1D_1 y la diferencia de cota *c*.

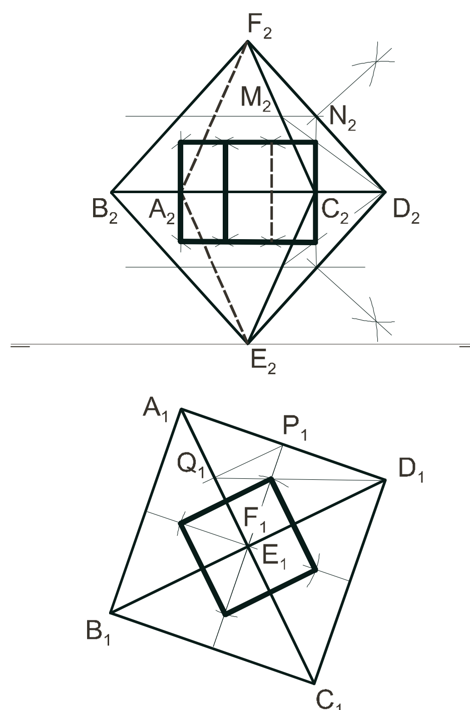
La esfera se proyecta en los planos horizontal y vertical como dos circunferencias de radio r y centros O_1 y O_2 respectivamente.



5. El cubo conjugado tiene sus vértices en los baricentros de las caras del octaedro, basta hallarlos y unirlos para obtener sus aristas.

La mediatriz de F_2D_2 permite obtener su punto medio N_2, y los F_2B_2, F_2A_2, F_2C_2, mediante una paralela a *l. t.* que pase por él. Las medianas D_2M_2, C_2N_2 se cortan en el baricentro de la segunda proyección de la cara *CDF*. Análogamente se obtienen los baricentros de las proyecciones verticales de las demás caras.

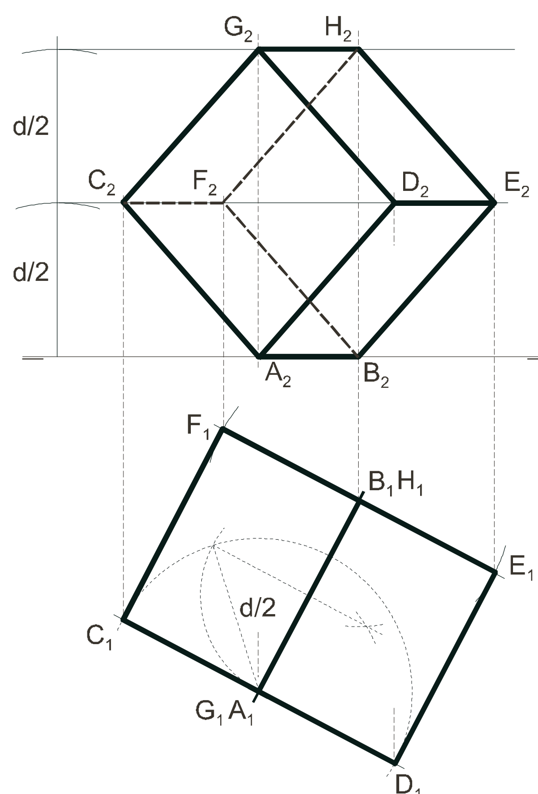
Las medianas de las proyecciones horizontales de las caras son las paralelas medias del cuadrado $A_1B_1C_1D_1$. La paralela por P_1 a la diagonal B_1D_1 corta a A_1F_1 en su punto medio Q_1, que unido con D_1 es la mediana, y corta a P_1F_1 en el baricentro de la primera proyección de las caras *AED* y *AFD*. Arcos de circunferencia de centro F_1 y radio F_1Q_1 cortan a las paralelas medias en los demás baricentros.



6. La primera proyección tiene como contorno aparente $C_1F_1D_1E_1$ la sección principal en verdadera magnitud, dividida en *dos* rectángulos por las aristas de apoyo A_1B_1 y de cota más alta G_1H_1 superpuestas.

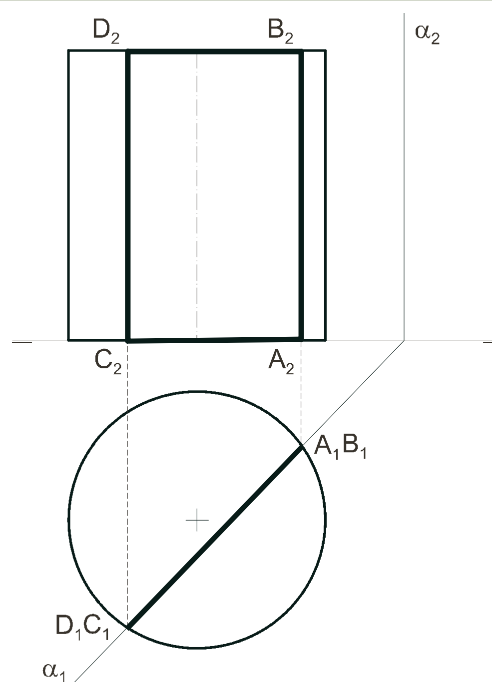
Se construye, a partir de A_1B_1, la semidiagonal *d/2* de la cara y la sección principal del cubo, que es el rectángulo $C_1F_1D_1E_1$ de lados *d* y A_1B_1.

Se trazan líneas de referencia desde A_1, B_1 hasta *l. t.*, desde C_1, F_1, D_1, E_1 hasta la cota *d/2*, y desde G_1, H_1 hasta la cota *d*, obteniendo A_2, B_2, C_2, F_2, D_2, E_2, G_2, H_2 respectivamente, que unidos entre sí, dan las segundas proyecciones de las aristas del cubo. En la primera proyección puede verse como las caras *ACGD*, *ADEB*, *DEHG* más próximas al observador, al realizar la proyección vertical, ocultan las aristas que concurren en *F*.



1. La sección de la superficie lateral del cilindro por un plano paralelo a sus generatrices está formada por dos de ellas. La sección de las bases son dos cuerdas.
La primera proyección de la sección es el segmento $\overline{A_1C_1}$ de la traza α_1 que coincide con la proyección horizontal del cilindro.

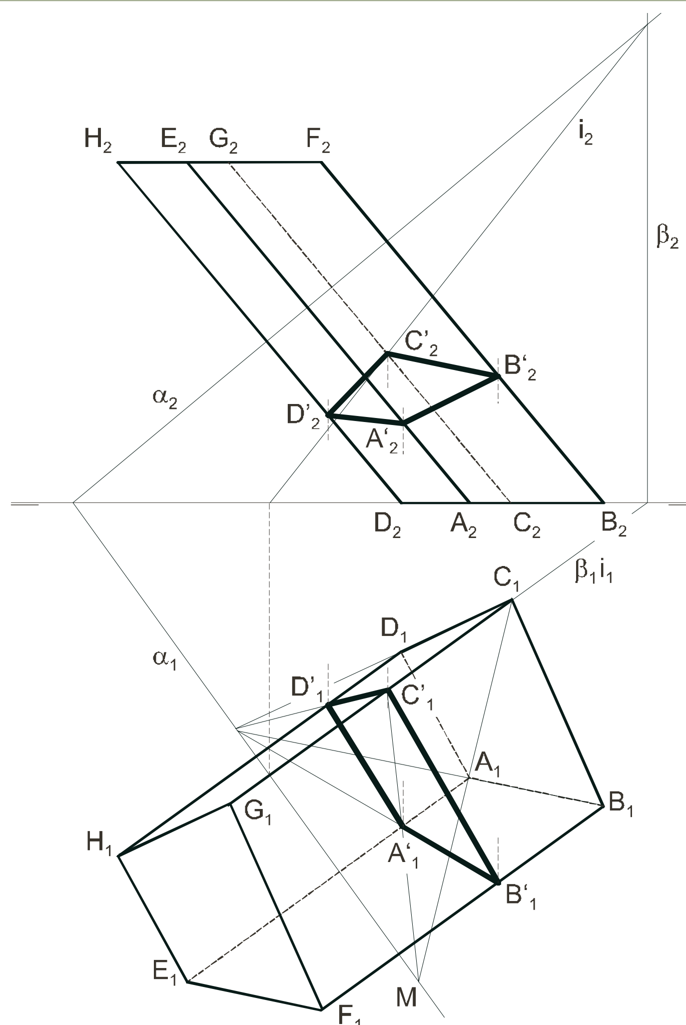
La segunda proyección son las generatrices C_2D_2 y A_2B_2, que forman un rectángulo con las cuerdas C_2A_2 y D_2B_2 de las bases.



2. Para obtener la sección recta se dibuja un plano α, cuyas trazas sean perpendiculares a las proyecciones de las aristas laterales.
Se halla la sección de la arista *CG* con el plano α. Para ello se traza el plano vertical β, y se obtiene C'_2 en el punto de corte de i_2 con C_2G_2, donde *i* es la recta de intersección de los planos α y β. La línea de referencia trazada desde C'_2 hasta C_1G_1 dará C'_1.

Se obtiene el homólogo A'_1 de A_1 en el punto de corte de la recta doble A_1E_1 con la transformada MC'_1 de A_1C_1. Análogamente se obtienen B'_1, D'_1.

La segunda proyección se obtiene trazando líneas de referencia desde A'_1, B'_1, D'_1, hasta A_2E_2, B_2F_2, D_2H_2, obteniéndose A'_2, B'_2, D'_2.

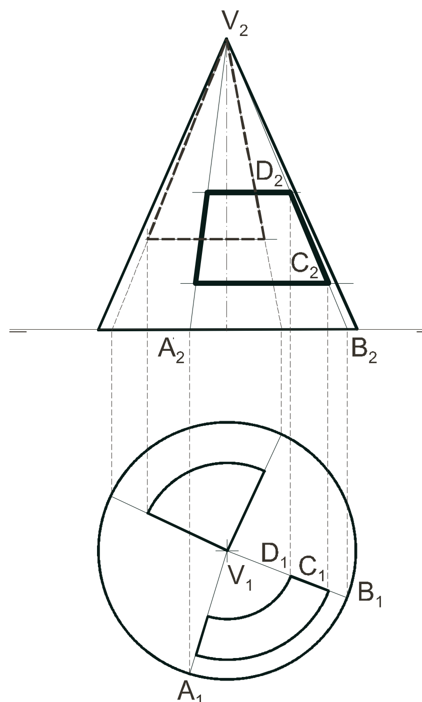


3. Las figuras dibujadas en la superficie lateral están formadas por segmentos de generatriz y arcos de circunferencia situados en planos horizontales, que tienen su centro en el eje y que se proyectan verticalmente como líneas paralelas a la de tierra.

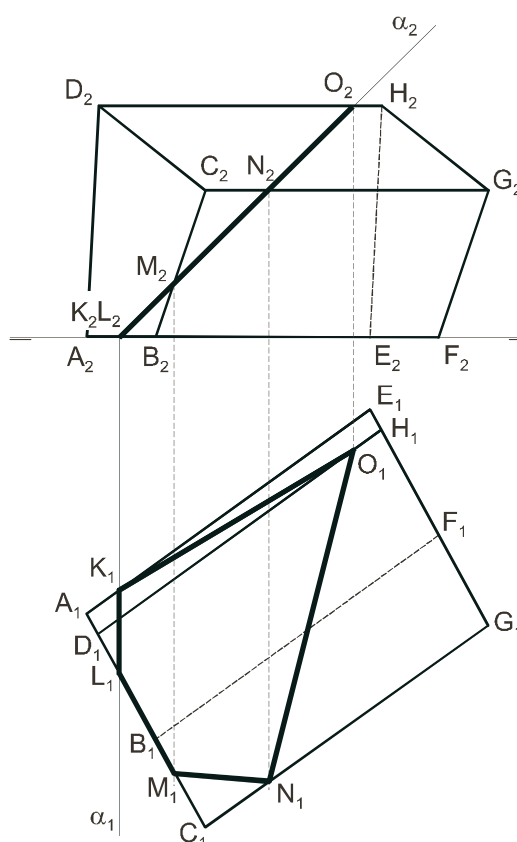
Las segundas proyecciones de puntos como *C, D* se obtienen trazando la primera proyección V_1B_1 de la generatriz *VB* que pasa por ellos, hallando B_2 mediante una línea de referencia, trazando B_2V_2, y levantando hasta ella líneas de referencia desde C_1, D_1, para obtener C_2, D_2.

Las paralelas a *l. t.* que pasan por C_2, D_2 cortan a la generatriz A_2V_2 en los puntos que completan la segunda proyección de la forma situada en la parte anterior del cono, y por tanto vista.

Por el motivo contrario la otra forma será oculta.



4. La proyección vertical coincide con la traza α_2, y la horizontal se obtiene mediante líneas de referencia. Por ejemplo, el punto N_2 es el punto de corte de la traza α_2 con la proyección C_2G_2 de la arista *CG* y su línea de referencia corta a C_1G_1 en N_1. Uniendo las primeras proyecciones se obtiene un pentágono que es la primera proyección de la sección.





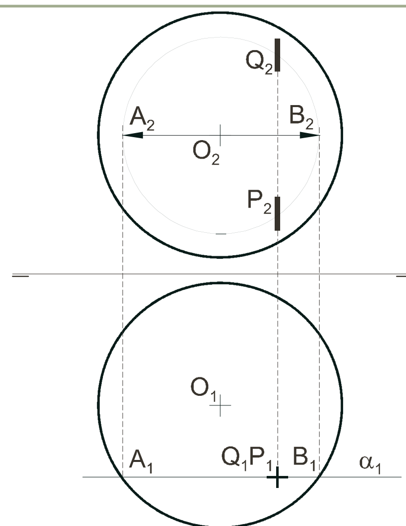
5. Un plano horizontal α que contenga la recta *r* corta a la superficie lateral del cono según una circunferencia. Su traza vertical α_2 coincide con r_2 y corta a la generatriz del contorno aparente, y al eje, en los puntos A_2, O_2, que definen el radio de la circunferencia sección. Se traza su primera proyección con centro en V_1 obteniéndose sus puntos de corte I_1, J_1 con r_1. Las segundas proyecciones I_2 y J_2, de los puntos de intersección del cono con la recta, se obtienen mediante líneas de referencia.

6. Un cambio de plano vertical cuya *l. t.* sea perpendicular a la actual sitúa el plano en posición de canto. La traza α'_2 se obtiene mediante el arco de centro X_1 que es primera proyección del punto de corte de las trazas verticales antigua y nueva. La proyección vertical de la elipse sección y de su diámetro principal *AB* coincide con α'_2.

La horizontal $\overline{A_1B_1}$ se obtiene mediante líneas de referencia trazadas hasta las primeras proyecciones de las generatrices del contorno aparente vertical.

El punto medio O'_2 de $\overline{A'_2B'_2}$, coincide con la segunda proyección $\overline{C'_2D'_2}$ del diámetro principal menor. La primera $\overline{C_1D_1}$ es la cuerda interceptada sobre su línea de referencia por la circunferencia de centro V_1 y diámetro $\overline{E'_2F'_2}$, que es sección del cono por el plano horizontal γ que pasa por *O*. Transportando las cotas de la nueva proyección a la inicial se obtienen $\overline{A_2B_2}$ y $\overline{C_2D_2}$, que también serán diámetros principales. Las elipses se trazan mediante cualquier método a partir de los diámetros principales (no aparece en la construcción).

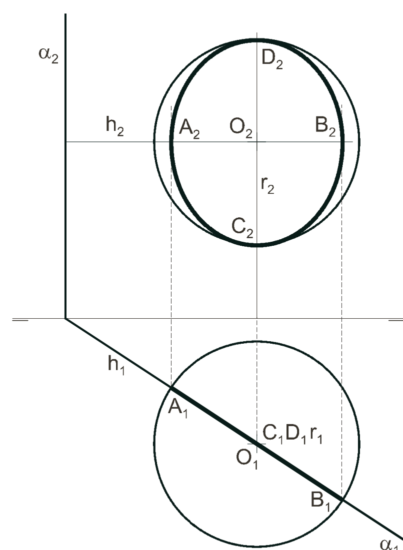
1. Un plano frontal α, cuya traza α_1 pase por P_1, corta a la esfera según un círculo cuya primera proyección es el segmento $\overline{A_1B_1}$. La proyección segunda está en verdadera magnitud y es concéntrica con la proyección vertical de la esfera. Su diámetro $\overline{A_2B_2}$.= $\overline{A_1B_1}$
Una línea de referencia trazada desde P_1, Q_1 corta a ésta en las segundas proyecciones de P, Q.



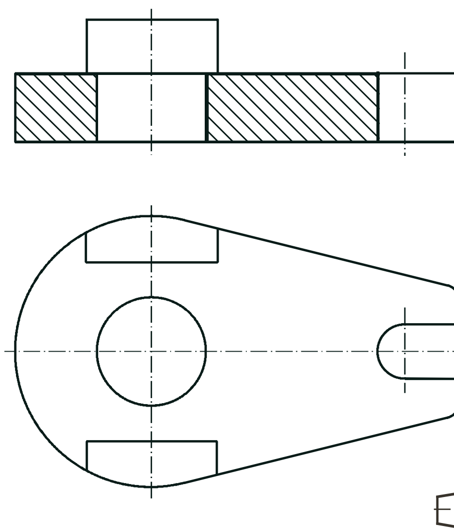
2. El plano α, que pasa por el centro de la esfera, corta a ésta según un círculo máximo cuya proyección horizontal coincide con α_1. Los diámetros AB y CD de la sección, que son paralelo y perpendicular al plano horizontal, se proyectan como $\overline{A_1B_1}$, en verdadera magnitud y $\overline{C_1D_1}$ en O_1.

La proyección vertical es la elipse cuyos diámetros principales son $\overline{A_2B_2}$ y $\overline{C_2D_2}$, obtenidos mediante líneas de referencia trazadas hasta la paralela a *l. t.* que pasa por O_2 y hasta el contorno aparente de la proyección vertical respectivamente.

La elipse se traza mediante cualquier método a partir de los diámetros principales $\overline{A_2B_2}$ y $\overline{C_2D_2}$ (no aparece en la construcción).

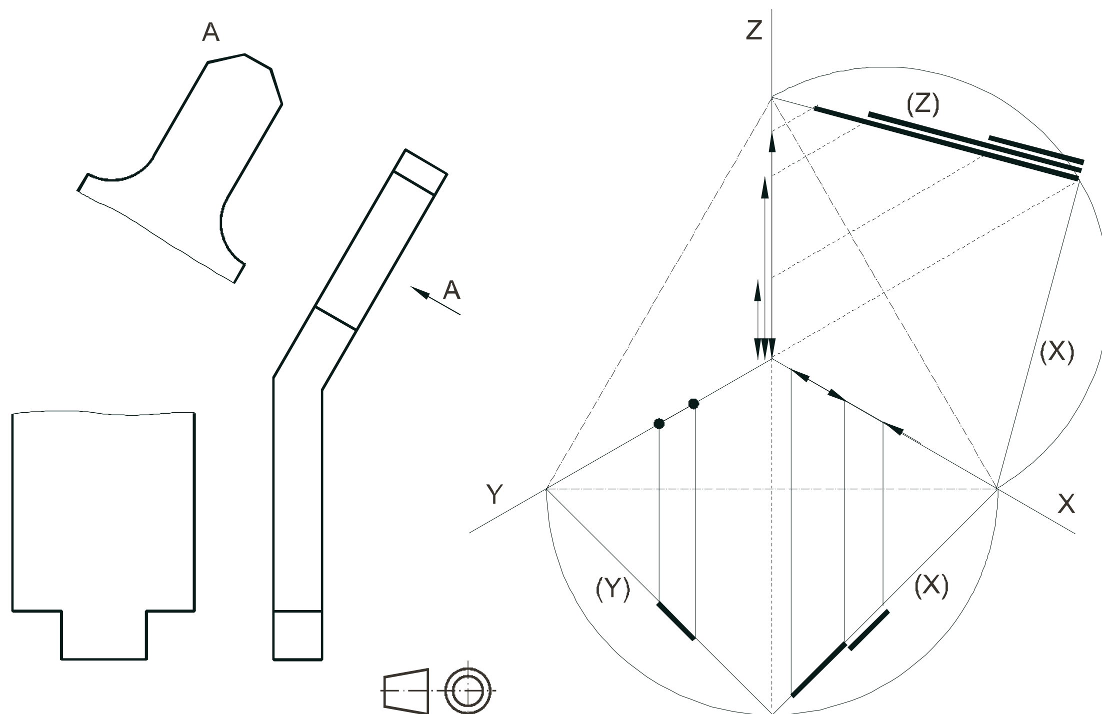


3. El contorno de la sección se traza con línea de trazo grueso continuo y se raya a 45º, utilizando el mismo espaciamiento y dirección en sus dos partes. A continuación se dibuja en proyección la parte de la pieza que está detrás del plano de corte.



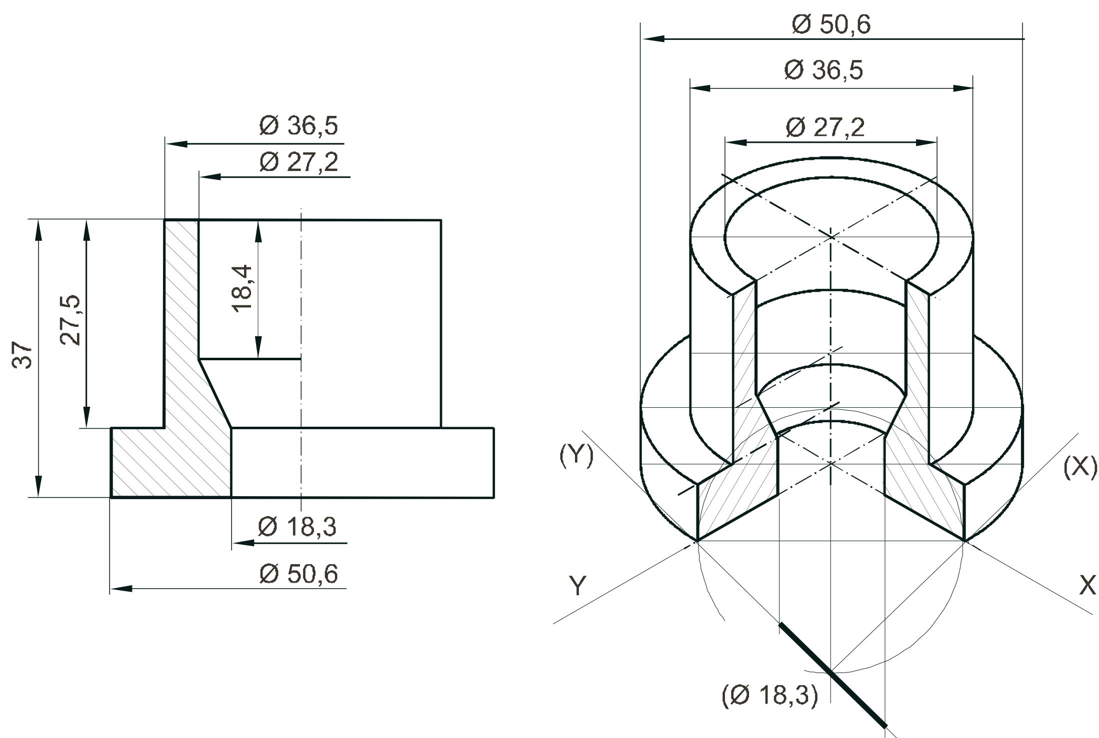
4. Se elige como vista principal (alzado) la que muestra, en verdadera magnitud, el ángulo que forman las dos partes de la pieza y sus longitudes.
El perfil lateral derecho es una vista parcial, omitiéndose la parte oblicua al plano de proyección. Una vista particular muestra la parte de la pieza que está situada en posición oblicua a los planos de proyección.

Se trazan unos ejes *X, Y, Z* que formen 120º entre si, se construye un triángulo de las trazas y se abaten sobre el cuadro los planos *XY* y *XZ*. Se llevan las medidas en perspectiva sobre los ejes, obteniéndose sus verdaderas magnitudes sobre *(X), (Y), (Z)* mediante paralelas a los ejes *X, Y, Z*.

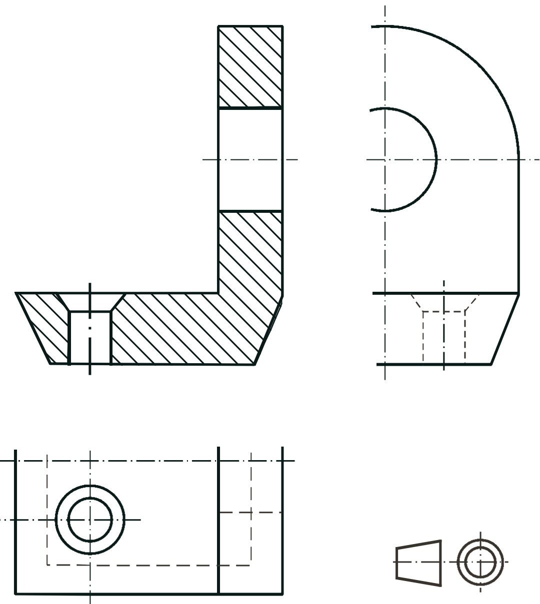


5. Al ser simétrica la pieza se puede representar mediante una media vista y un medio corte. La planta no es necesaria, ya que al acotar los símbolos de diámetro informan que la pieza está compuesta por cilindros y conos, macizos o huecos.

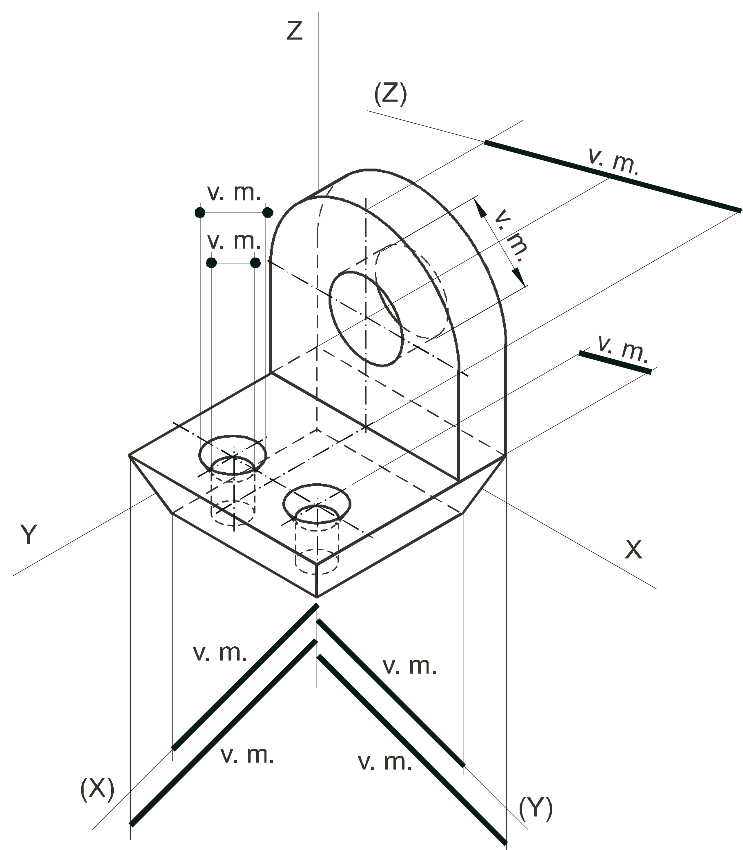
Se han trazado sobre la perspectiva las líneas necesarias para tomar las medidas de los diámetros. Los de 50’6, 36’5 y 27’2 directamente, según la dirección paralela al plano del cuadro, pero el de 18’3 habrá que medirlo según el eje *Y*, obteniendo su verdadera magnitud sobre *(Y)*.



6. Se elige como vista principal (alzado) la que muestra las dos partes de la pieza unidas en ángulo recto, pero sustituida por un corte para ver los agujeros. Dicho corte no se indica por innecesario y los agujeros se llevan al plano de corte (de simetría) representándose cortados.
El perfil lateral izquierdo muestra el redondeo de la parte vertical y la planta la situación de los agujeros. De dichas vistas, por ser simétricas, se dibuja sólo su mitad exterior.



Las medidas se toman en el dibujo isométrico según las direcciones de los ejes axonométricos, obteniéndose su verdadera magnitud sobre dichos ejes abatidos. Dichos ejes *(X), (Y), (Z)* se trazan dos a dos, formando entre sí 90º y 45º con el tercer eje y definen los planos axonométricos abatidos *(XY), (YZ), (ZX)*. Los diámetros de las elipses situadas en los planos axonométricos *XY* o *XZ*, perpendiculares al eje *Z* o *Y* respectivamente, están en verdadera magnitud (v. m.).

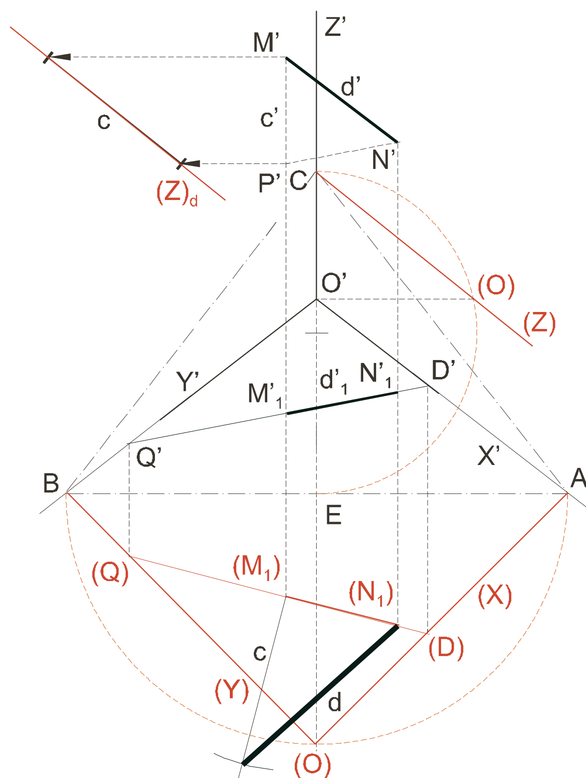


1. La verdadera magnitud del segmento *d* es la hipotenusa del triángulo rectángulo *MNP*, cuyos catetos *PN* y *MP* tienen longitudes respectivamente iguales a la de su proyección horizontal $\overline{M'_1N'_1}$ y a la diferencia de cota *c* de sus extremos *M*, *N*.
Se traza un triángulo de las trazas cuyos lados *AB, BC, CA* sean perpendiculares a *Z', X', Y'*, respectivamente.

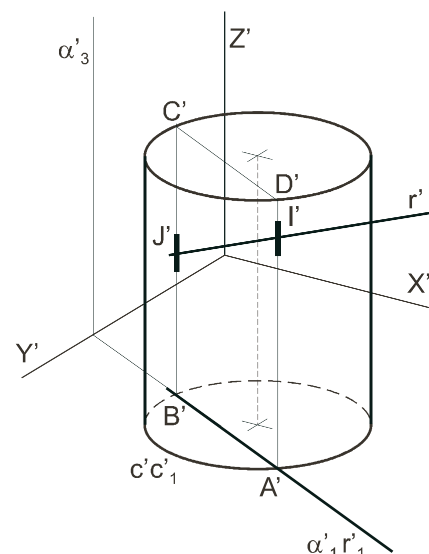
Al abatir el plano *XY*, la dirección de abatimiento de *O* es la perpendicular a *AB* trazada por *O'*, que corta al arco capaz de 90º sobre *AB* en *(O)*, siendo (*X*) ≡ *A*(*O*) e (*Y*) ≡ *B*(*O*).

Se obtienen *(M_1)*, *(N_1)* en los puntos de corte de sus direcciones de afinidad con la recta *(Q)(D)*, siendo *(Q)*, *(D)* afines de los puntos *Q', D'* en que la recta soporte de dicho segmento corta a los ejes *Y', X'*.

Se obtiene la diferencia de cota entre *N* y *M* abatiendo el eje *Z*. La dirección de abatimiento de *O* es la perpendicular a la charnela *Z'* trazada por *O'* que corta al arco capaz de 90º sobre *CE* en *(O)*, siendo . Las paralelas trazadas por *P'* y *M'* a la dirección de abatimiento determinan la diferencia de cota *c*, sobre una paralela cualquiera $(Z)_d$ a *(Z)*. Llevando *c* perpendicular a $\overline{(M_1)(N_1)}$ por *(M_1)* se obtiene *d* como hipotenusa de un triángulo rectángulo igual al *MNP*.



2. Se traza un plano α, paralelo al eje *Z*, que contenga la recta *r*. Su traza horizontal coincide con r'_1 y la vertical es paralela a *Z'*.
El plano α corta al cilindro según el rectángulo *ABCD* formado por las generatrices *A'D'*, *B'C'*, donde *A'*, *B'* son los puntos en que la traza horizontal α'_1 corta a la base. La proyección directa *I'*, *J'* de los puntos de intersección de recta y cilindro son los de corte de *r'* con la proyección directa *A'B'C'D'* de la sección.



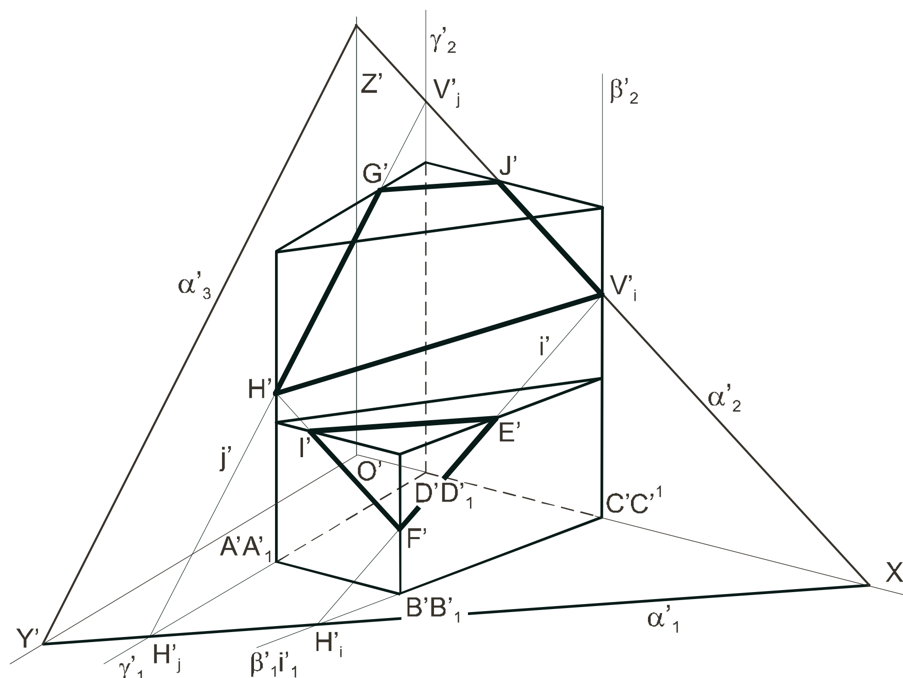
3. Los planos β y γ, que contienen las caras del poliedro cuyas aristas *A'D'* y *B'C'* están contenidas en el plano *XY*, son proyectantes en *él*, por lo que sus trazas horizontales β'_1 y γ'_1 coinciden con $B'_1C'_1$ y $A'_1D'_1$, y las verticales segundas β'_2 y γ'_2 son paralelas a *Z'*.

La recta *j* de intersección de γ y α está determinada por sus trazas H'_j, V'_j que son los puntos de intersección de γ'_1 con α'_1 y de γ'_2 con α'_2. Su proyección directa *j'* determina la arista *G'H'* de la sección.

Análogamente, la proyección directa *i'* de la intersección de β y α determina *E'F'*.

Uniendo *F'* con *H'* se obtiene el tercer vértice *I'* del triángulo E'F'I' que forma la proyección directa de la sección del cuerpo saliente inferior.

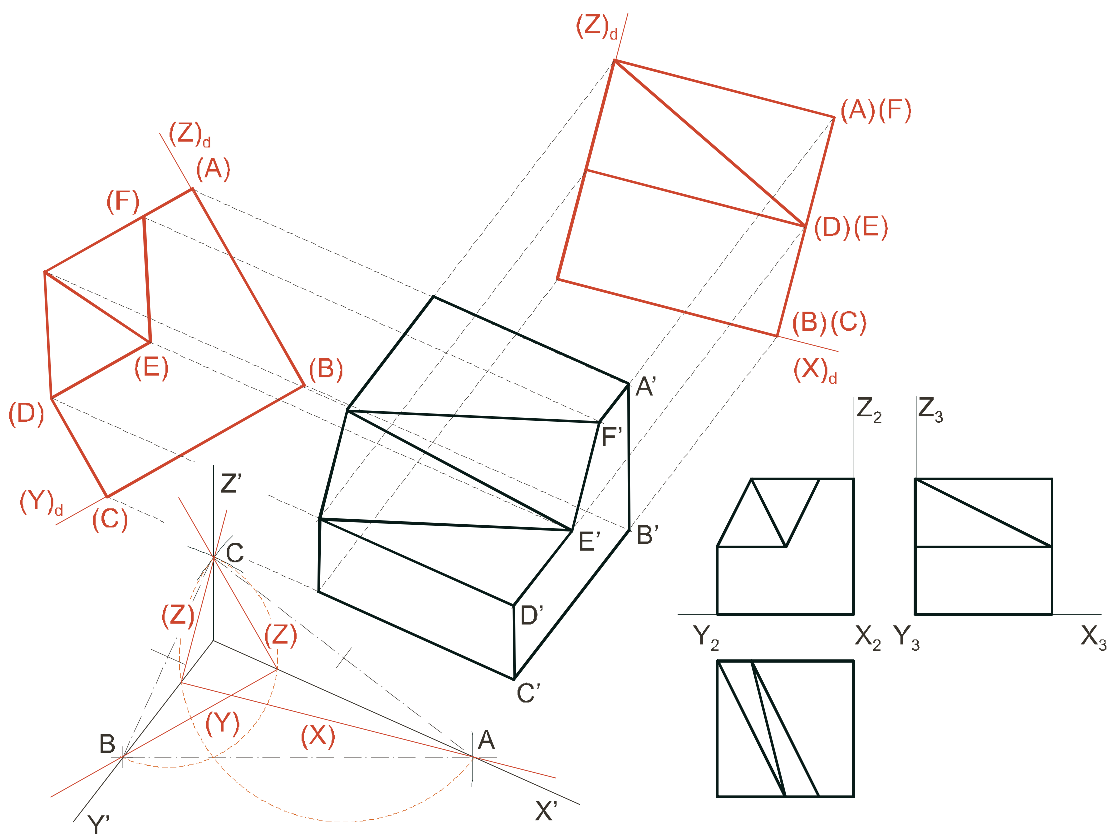
El resto de la sección es el cuadrilátero definido por la arista $J'V'_i$ que coincide con α'_2 y por G'H'.



4. Sobre la representación diédrica se dibuja el triedro de referencia del sistema axonométrico, de modo que el alzado se convierta en la proyección vertical tercera y la vista lateral izquierda en la proyección vertical segunda.

Sobre los ejes axonométricos se traza un triángulo de las trazas cualquiera *ABC* y se abaten los planos *XZ*, *YZ* con la misma orientación que los axonométricos. Se trasladan los planos *(X)(Z)*, *(Y)(Z)* a una posición conveniente, hasta transformarlos en $(X)_d(Z)_d$, $(Y)_d(Z)_d$. Se dibujan en ellos la vista lateral izquierda y el alzado.

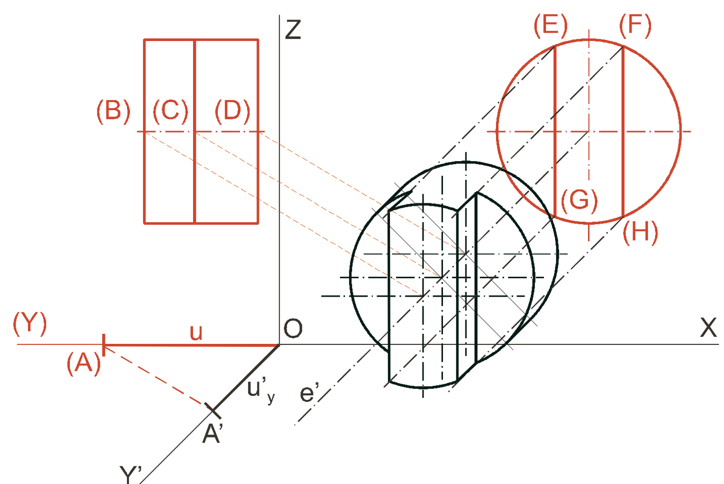
Se obtienen los puntos *A'*, *B'*, ... de la perspectiva axonométrica en los puntos de corte de las paralelas al eje *X'* e Y' trazadas desde los vértices *(A)*, *(B)*, ... del alzado y de la vista lateral izquierda, respectivamente.



5. La pieza es un cilindro del que se elimina parte, por lo que la situamos con su eje *e* paralelo al eje *Y*, de modo que las circunferencias de las bases e intermedia se proyecten sin deformarse.

Se dibuja el alzado en el plano *XZ* y la vista lateral en el plano *YZ* abatido, de modo que la línea de referencia de los ejes de ambas vistas sea perpendicular al eje *Z*.

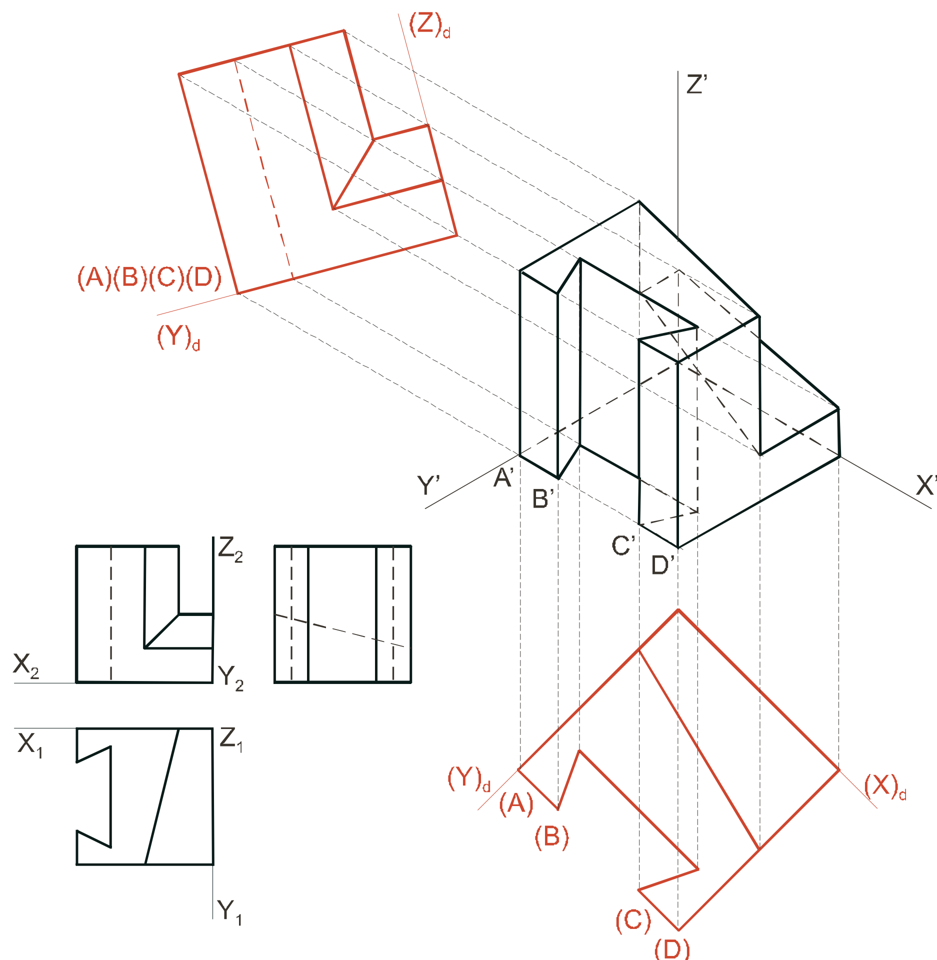
No es necesario obtener la proyección en el plano *YZ* del perfil completo, ya que sólo necesitamos las distancias entre los centros de las tres circunferencias que forman la pieza. Las paralelas a *(A)A'* trazadas desde *(B)*, *(C)*, *(D)* cortan a la proyección *e'* del eje en los centros de dichas circunferencias. Dibujadas éstas con el radio del alzado se trazan por sus centros perpendiculares a *Y'*, que las cortan en los puntos de tangencia de las generatrices del contorno aparente. Por último las paralelas a *Y'* desde los vértices *(E)*, *(F)*, ... del alzado determinan las generatrices que forman las partes sustraídas al cilindro, que definen la pieza.



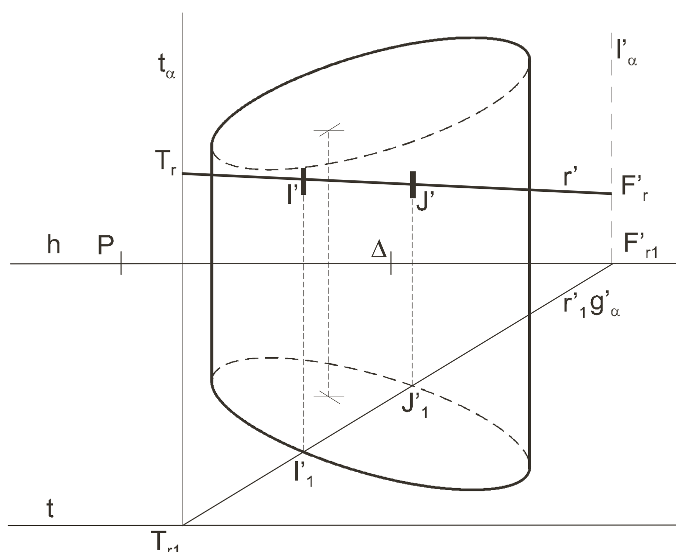
6. Sobre la representación diédrica se dibuja el triedro de referencia del sistema isométrico, de modo que el alzado se convierta en la proyección vertical segunda y la planta en la proyección horizontal. Se dibujan aparte unos ejes isométricos.

En la parte oculta de los ejes isométricos *Z'* y *X'* se dibujan los planos *(X)(Y)* e *(Y)(Z)*, abatidos y desplazados de modo que sus ejes $(X)_d$, $(Y)_d$, $(Z)_d$ formen ángulos de 45º con *Z'* y *X'*. Se dibujan en ellos la planta y el alzado.

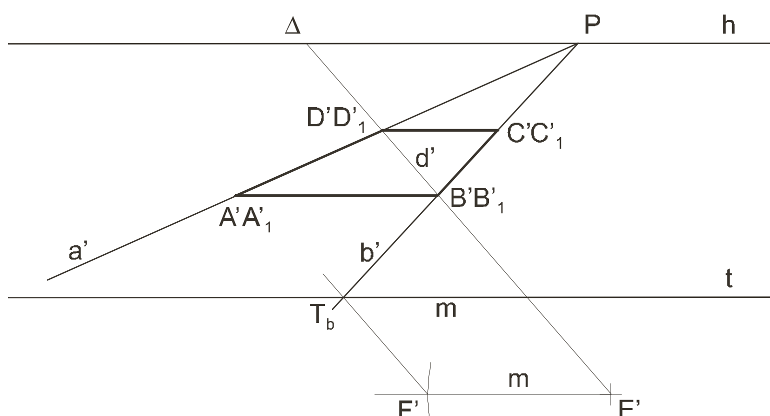
Se obtienen los puntos *A'*, *B'*, ... de la perspectiva isométrica en los puntos de corte de las paralelas al eje *Z'* y *X'* trazadas desde los vértices *(A)*, *(B)*, ... de la planta y del alzado, respectivamente.



1. Para hallar la intersección del cilindro con la recta r se traza el plano vertical α que la contiene. Su traza t_α pasa por T_r y es perpendicular a la línea de tierra en T_{r1}. Su recta límite l'_α pasa por F'_r y es perpendicular a la línea del horizonte en F'_{r1}. La traza g'_α, que coincide con $r'_1 = T_{r1} F'_{r1}$, corta a la base del cilindro en las proyecciones horizontales I'_1, J'_1 de los puntos de intersección *I*, *J*. Líneas de referencia trazadas desde ellas hasta *r'* permiten obtener sus proyecciones directas *I'*, *J'*.

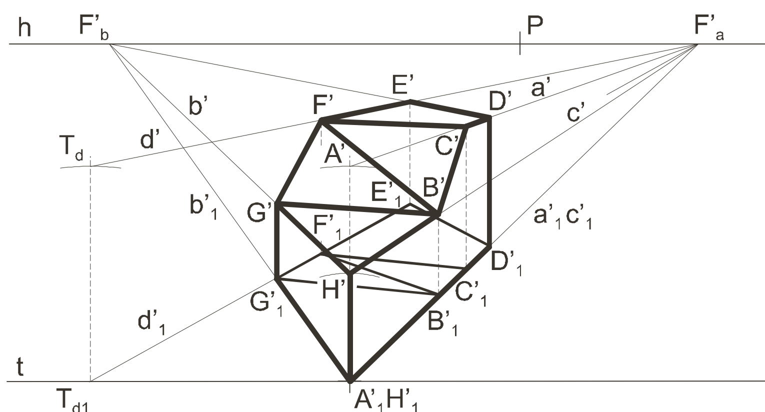


2. Se trata de una perspectiva cónica frontal ya que los lados *AB*, *CD* del cuadrado se conservan paralelos entre sí, siendo también paralelos a la línea de tierra. La paralela a ellos por el punto de corte de los otros dos lados *AD*, *BC*, que es el punto principal, es la línea del horizonte *h*.
La diagonal *BD* corta a *h* en el punto de medida Δ. Sobre una paralela a *h*, trazada por un punto cualquiera *E'* de dicha diagonal, se transporta la distancia *m*. Se dibuja por su otro extremo *F'* una paralela a la diagonal *BD* que corta a la perspectiva *b'*, de la recta que contiene el lado *CB*, en su traza T_b. Por ella pasa la línea de tierra *t*.



3. Los lados que delimitan la proyección horizontal del sólido cortan a la línea del horizonte en los puntos de fuga *F'*$_a$, *F'*$_b$ de las aristas horizontales paralelas a ellos. Las rectas *a'*, *b'*, *c'*, *d'* contienen los vértices situados por encima del geometral. La distancia entre las dos proyecciones de sus trazas son sus alturas sobre el geometral, cuya verdadera magnitud es el resultado de multiplicar por dos la medida obtenida en el alzado.

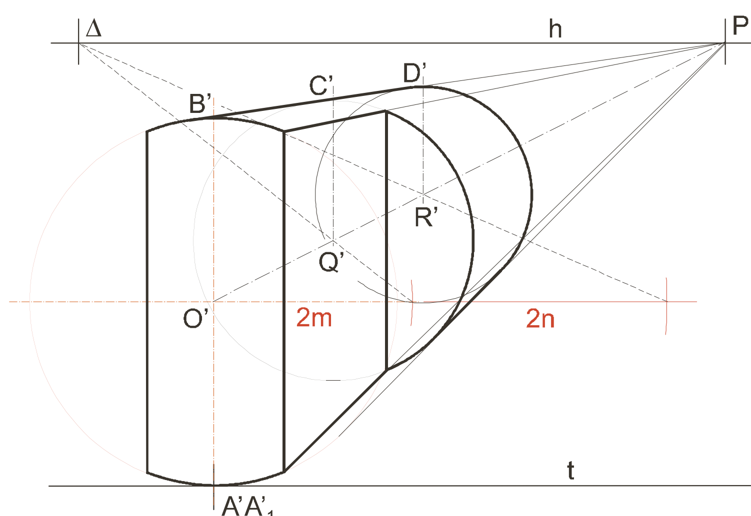
Se trazan en primer lugar las proyecciones horizontales a'$_1$, b'$_1$, ... y se llevan dichas alturas en la línea de referencia de *A'*$_1$, *T*$_{d1}$ para obtener *A'*, *H'*, *T*$_d$, que unidas con *F'*$_a$, *F'*$_b$ determinan las proyecciones directas a', b', ... Líneas de referencia trazadas desde las proyecciones horizontales A'$_1$, B'$_1$, ... de los vértices hasta a', b', ..., dan las perspectivas A', B', ... de éstos.



Por último se trazan las proyecciones directas de las aristas uniendo las de los vértices.

4. Se dibuja el alzado en el plano del cuadro (en rojo) con su punto *A* coincidiendo con el representado. Se trazan por *O'* el eje *O'P* de la pieza y una paralela a *t*, sobre la que se llevan las medidas de profundidad *2m*, *2n* de los planos intermedios.

Dos rectas trazadas desde Δ trasladan dichas medidas sobre el eje, determinando los centros *Q*', *R*' de las circunferencias de los planos intermedios. Líneas de referencia trazadas por ellos, hasta la proyección *B'P* de la generatriz más alta de la superficie cilíndrica de la pieza, determinan los radios *Q'C'*, *R'D'*. Conocido que las generatrices del contorno aparente fugan en *P* se dibujan las perspectivas de las aristas de la pieza.



5. En primer lugar se dibujan los elementos de la perspectiva en la representación diédrica:

- Se traza la dirección de la mirada V_1P_1 formando un ángulo de *60º* con la cara frontal y pasando por B_1.
- Se traza la proyección vertical h_2 de h a $14{,}6 = \frac{33+11}{3} mm$ de *L.T*.
- Se halla la verdadera magnitud *d* de la distancia al eje del cono óptico *VP* del punto *A* más alejado de él. Dicha distancia *a* es la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos son M_1A_1 y la diferencia de cota entre *M* y *A*.
- Las distancia *d* es el radio de la base del cono óptico. Dibujada la proyección horizontal M_1N_1, de uno de los radios de la base que es paralelo al plano geometral, se traza por su extremo N_1 la generatriz del contorno aparente que forma 60º con él y corta al eje en V_1.
- Se dibuja la traza π_1 del plano del cuadro π perpendicular a V_1P_1 pasando por B_1.
- La escultura está formada por tres haces de rectas paralelas: las verticales, que se conservan paralelas en la perspectiva; las paralelas a las rectas *a* o *b*, cuyas perspectivas convergen en F'_a o F'_b, sus primeras proyecciones F'_{a1} o F'_{b1} son los puntos de corte con π_1, de rectas paralelas a a_1 o b_1 trazadas por V_1.
- Se obtienen las primeras proyecciones M_{a1}, M_{b1} de los puntos de medida M_a, M_b de las rectas *a*, *b* en los puntos de corte con π_1 de dos arcos de centros F'_{a1}, F'_{b1} que pasan por V_1.

Para dibujar la perspectiva se trazan las líneas de tierra y del horizonte separadas y se transportan los puntos de fuga, de medida, principal y el de contacto con el plano del cuadro *B*, cuya proyección directa *B'* está a de *t*.

Se trazan las rectas horizontales *a*, *c* que fugan en F'_a y cuyas trazas *B'*, T_c están situadas, respectivamente, a 33 + 11 *mm* y 33 *mm* de *t*, donde se encuentran sus proyecciones horizontales B'_1, T_{c1}. Sobre éstas se transportan segmentos de 11 *mm* a partir de B'_1, mediante el punto métrico M_a, obteniendo las proyecciones horizontales F'_1, E'_1 , A'_1, de los puntos *F*, *E*, *A*, cuyas perspectivas *F'*, *E'* , *A'*, se determinan mediante líneas de referencia. El polígono $A'B'F'F'_1E'_1E'$ es la perspectiva de la cara principal de la escultura.

Se trazan las horizontales *b*, *d* que fugan en F'_b y pasan por *B*, *F*, respectivamente. Sobre la proyección horizontal b'_1 de *b* se transporta un segmento de a partir de B'_1, mediante el punto métrico M_b, obteniendo la proyección horizontal C'_1 de *C*, cuya perspectiva *C'* se determina mediante una línea de referencia. Obtenido G'_1 como punto de corte de $C'_1F'_a$ con $F'_1F'_b$ una línea de referencia determina *G'* en *d'*, que permite completar la perspectiva.









Afinidad ortogonal. Es aquella afinidad en la que la dirección y el eje son perpendiculares.

Altura. Es la distancia de un vértice del triángulo al lado opuesto. También recibe este nombre la recta que pasando por un vértice es perpendicular al lado opuesto.

Ángulo poliedro. Está formado por los puntos del espacio comprendidos entre varios planos que pasan por un punto.

Apotema. Es la distancia del centro de un polígono regular a uno de sus lados y radio de su circunferencia inscrita.

Arco capaz. Se llama arco capaz de un ángulo sobre un segmento, al lugar geométrico de los vértices de todos los ángulos iguales a él, cuyos lados pasan por los extremos del segmento.

Baricentro. Es el punto de corte de las tres medianas del triángulo.

Cambio de plano. Es uno de los métodos empleados en el sistema diédrico para obtener las verdaderas magnitudes de figuras planas, ángulos y distancias, nuevas vistas, secciones de cuerpos, etc.

Cicloide. Es la curva que describe un punto solidariamente unido a una circunferencia que rueda, sin resbalar, sobre una recta. Se llamará normal, acortada o alargada según que el punto esté en, dentro o fuera de la circunferencia ruleta.

Cilindro de revolución. Es el que se genera mediante el giro de un rectángulo alrededor de uno de sus lados.

Cilindro recto. Es aquel que tiene el pie de su altura en el centro de la base.

Circunferencia focal. En la elipse e hipérbola se llama así a la que tiene centro en los focos y radio *2a*.

Circunferencia principal. En la elipse e hipérbola se llama así a la circunferencia cuyo centro coincide con el de la curva y su radio es *a*.

Circuncentro. Es el punto de corte de las mediatrices del triángulo y centro de su circunferencia circunscrita.

Cono de revolución. Es aquel que se genera mediante el giro de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.

Cono recto. Es aquel que tiene el pie de su altura en el centro de la base.

Corte. Un corte representa la sección y la parte del objeto situada detrás del plano secante (con relación a la dirección de observación).

Eje radical. Eje radical de dos circunferencias es el lugar geométrico de los puntos del plano que tienen igual potencia respecto de ambas.

Equivalente. Se dice así de aquella figura plana que tiene igual área que otra, pero distinta forma.

Elipse. Es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.

Epicicloide. Es la curva que describe un punto solidariamente unido a una circunferencia que rueda, sin resbalar, sobre otra circunferencia, exteriormente a ella. Se llamará normal, acortada o alargada según el punto esté en, dentro o fuera de la circunferencia ruleta.

Escalas axonométricas. En el sistema axonométrico se llama así a los segmentos en que se convierte la unidad de medida, dispuesta en la dirección de los ejes coordenados, al proyectarse en el plano del cuadro.

Esfera. Es el sólido formado por los segmentos de igual longitud que comparten un extremo.

Evolvente de la circunferencia. Es la curva que describe un punto solidariamente unido a una recta que rueda, sin resbalar, sobre una circunferencia. Se llamará normal si el punto está en la recta, y acortada o alargada si está en el mismo semiplano, o en el opuesto, de los dos en que la recta divide al plano en cada instante.






Figuras coplanarias. Son aquellas situadas en un mismo plano.

Giro. Es uno de los métodos empleados en el sistema diédrico para obtener la verdadera magnitud de figuras planas, o de ángulos y distancias, entre puntos, rectas y planos, situados en posiciones oblicuas respecto a los planos de proyección.

Hipérbola. Es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.

Hipocicloide. Es la curva que describe un punto solidariamente unido a una circunferencia que rueda, sin resbalar, sobre otra circunferencia, interiormente a ella. Se llamará normal, acortada o alargada según que el punto esté en, dentro o fuera de la circunferencia ruleta.

Homografía. Transformación proyectiva en la que a un punto corresponde otro punto y a una recta otra recta.

Homología. Es una transformación homográfica en la que los puntos homólogos están alineados con un punto fijo llamado centro de homología y las rectas homólogas se cortan en una recta fija llamada eje de homología.

Incentro. Es el punto de corte de las bisectrices del triángulo y centro de su circunferencia inscrita.

Inversión. Es una transformación anamórfica que convierte un punto P del plano en otro P', mediante un segmento $\overline{OP'}$ alineado con $\overline{OP}$, donde O es un punto fijo llamado centro de inversión y el producto $\overline{OP} \times \overline{OP'} = k$, siendo k un número real distinto de cero llamado potencia de la inversión.

Línea del horizonte. En la perspectiva cónica se llama así a la perspectiva de la recta impropia del plano geometral.

Mediana. Es el segmento cuyos extremos son un vértice del triángulo y el punto medio del lado opuesto. También recibe este nombre la recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

Ortocentro. Es el punto de corte de las tres alturas del triángulo.

Parábola. Es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta llamada directriz.

Perspectiva cónica. Sistema de representación que utiliza la proyección cónica. El objeto se refiere a un plano horizontal (llamado geometral) proyectándolo sobre él, y el conjunto se proyecta sobre un plano perpendicular a él (plano del cuadro) desde un punto de vista V.

Perspectividad. Correspondencia definida entre dos proyecciones de una figura, una figura y su proyección o una figura y su sección.

Pirámide regular. Es aquella que tiene por base un polígono regular cuyo centro coincide con el pie de la altura.

Plano del cuadro. En las perspectivas axonométrica y cónica se llama así al plano de proyección, también llamado del dibujo porque contiene la imagen del objeto representado.

Plano del horizonte. En una perspectiva cónica se llama así al plano paralelo al geometral que contiene el punto de vista.

Plano geometral. En una perspectiva cónica se llama así al plano horizontal de referencia asimilable a la superficie de la tierra.

Poliedro. Poliedro es el sólido terminado por superficies planas.

Poliedros regulares. Son aquellos poliedros convexos cuyas caras son polígonos regulares iguales y en cuyos vértices concurren el mismo número de ellas.

Poliedros regulares conjugados. Son aquellos que se obtienen uno a partir del otro uniendo los centros de sus caras.

Polígono estrellado. Es el que se obtiene a partir de las divisiones de la circunferencia en partes iguales cuando éstas se unen de p en p partes y $p \neq 1$.

Polígono regular. Es aquel que tiene todos sus lados y ángulos iguales.





Potencia. Potencia de un punto respecto de una circunferencia es el producto de las distancias desde dicho punto a los dos de intersección de cualquier secante que pasa por él.

Prisma recto. Es aquel cuyas aristas laterales son perpendiculares a las bases.

Proyectiva. Se dice así de la transformación que puede convertir una figura en otra mediante una serie de proyecciones y/o secciones.

Punto de fuga. En una perspectiva cónica se llama así a cada uno de los puntos de que consta la representación del punto impropio de una recta.

Punto impropio. Es cualquier punto situado en el infinito de la recta o plano considerado. Se indica mediante su dirección.

Punto de medida. En una perspectiva cónica se llama punto de medida de una recta al de fuga de las rectas paralelas (rectas de medida) que interceptan segmentos iguales sobre la recta y sobre la traza del plano que determinan (plano de medida).

Punto principal. En una perspectiva cónica se llama así a la intersección con el plano del cuadro de la recta perpendicular a él trazada desde el punto de vista V.

Punto propio. Es cualquier punto que no está situado en el infinito de la recta o plano considerado.

Recta impropia. Es la formada por todos los puntos impropios del plano considerado.

Sección. Una sección representa la intersección del plano de corte con la materia del objeto.

Sección principal. Es la realizada en un poliedro regular por un plano de simetría que contenga la mayor cantidad posible de sus principales magnitudes.

Sección recta. Es la producida en un prisma por un plano perpendicular a las generatrices.

Suplementario. Se dice que un ángulo es suplementario de otro cuando juntos suman 180º.

Trimétrico. Es el sistema axonométrico ortogonal en el cual los tres ángulos que forman los ejes son diferentes. Tiene, por tanto, tres coeficientes de reducción diferentes.

Vista local. Es la que define elementos simétricos de una pieza excluyendo el resto.

Vista parcial. Es la que contiene los elementos imprescindibles de la que sería una vista completa, y que sustituye a ésta si no se dificulta la comprensión del dibujo.

Vista particular. Es la que se dibuja según una dirección de observación que no es paralela o perpendicular a la de la vista principal.





FELICES MAICAS, JAVIER. *Selectividad. Dibujo técnico 1994-1999.* Zaragoza. Mira editores. 2000.

GONZALO GONZALO, JOAQUÍN. *Dibujo geométrico.* San Sebastián. Editorial Donostiarra. 2001.

IZQUIERDO ASENSI, FERNANDO. *Geometría descriptiva.* Madrid. Distribuye la editorial Paraninfo. 2000.

PUIG ADAM, PEDRO. *Curso de geometría métrica. Tomo I - Fundamentos. Tomo II - Complementos.* Madrid. Euler. 1986.

RAMOS BARBERO, BASILIO Y GARCÍA MATE, ESTEBAN. *Dibujo técnico*. Madrid. AENOR. 2003

RODRÍGUEZ DE ABAJO, F. JAVIER. ÁLVAREZ DE BENGOA, VICTOR. *Curso de dibujo geométrico y de croquización.* San Sebastián. Editorial Donostiarra. 1992.

RODRÍGUEZ DE ABAJO, F. JAVIER. *Geometría descriptiva I. Sistema diédrico.* San Sebastián. Editorial Donostiarra. 1990.

RODRÍGUEZ DE ABAJO, F. JAVIER. *Geometría descriptiva 3. Sistema de perspectiva Axonométrica.* San Sebastián. Editorial Donostiarra. 1992.

RODRÍGUEZ DE ABAJO, F. JAVIER. *Geometría descriptiva 4. Sistema de perspectiva Caballera.* San Sebastián. Editorial Donostiarra. 2002.

RODRÍGUEZ DE ABAJO, F. JAVIER. *Geometría descriptiva 5. Sistema de Perspectiva Cónica.* San Sebastián. Editorial Donostiarra. 1990.